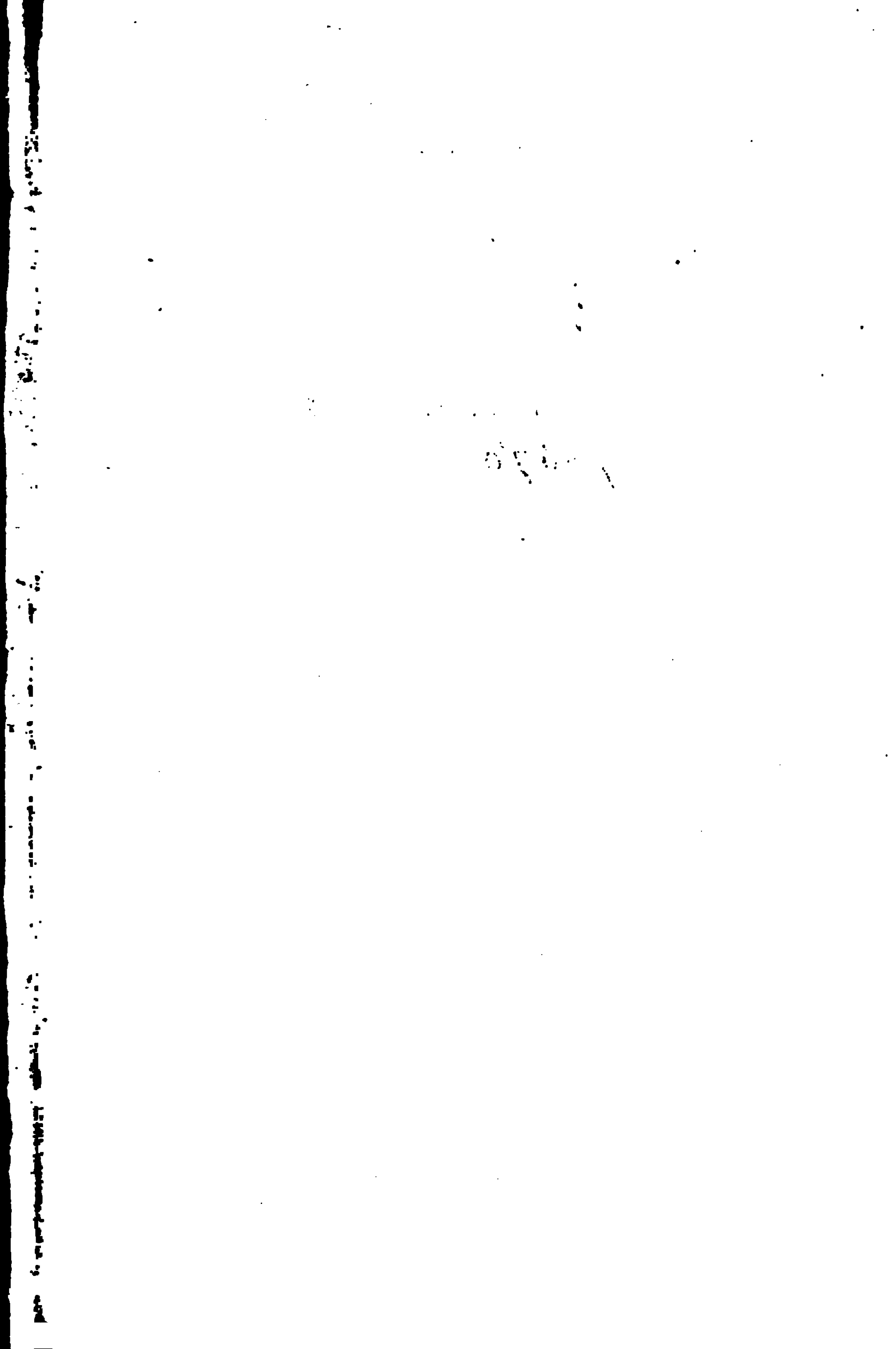
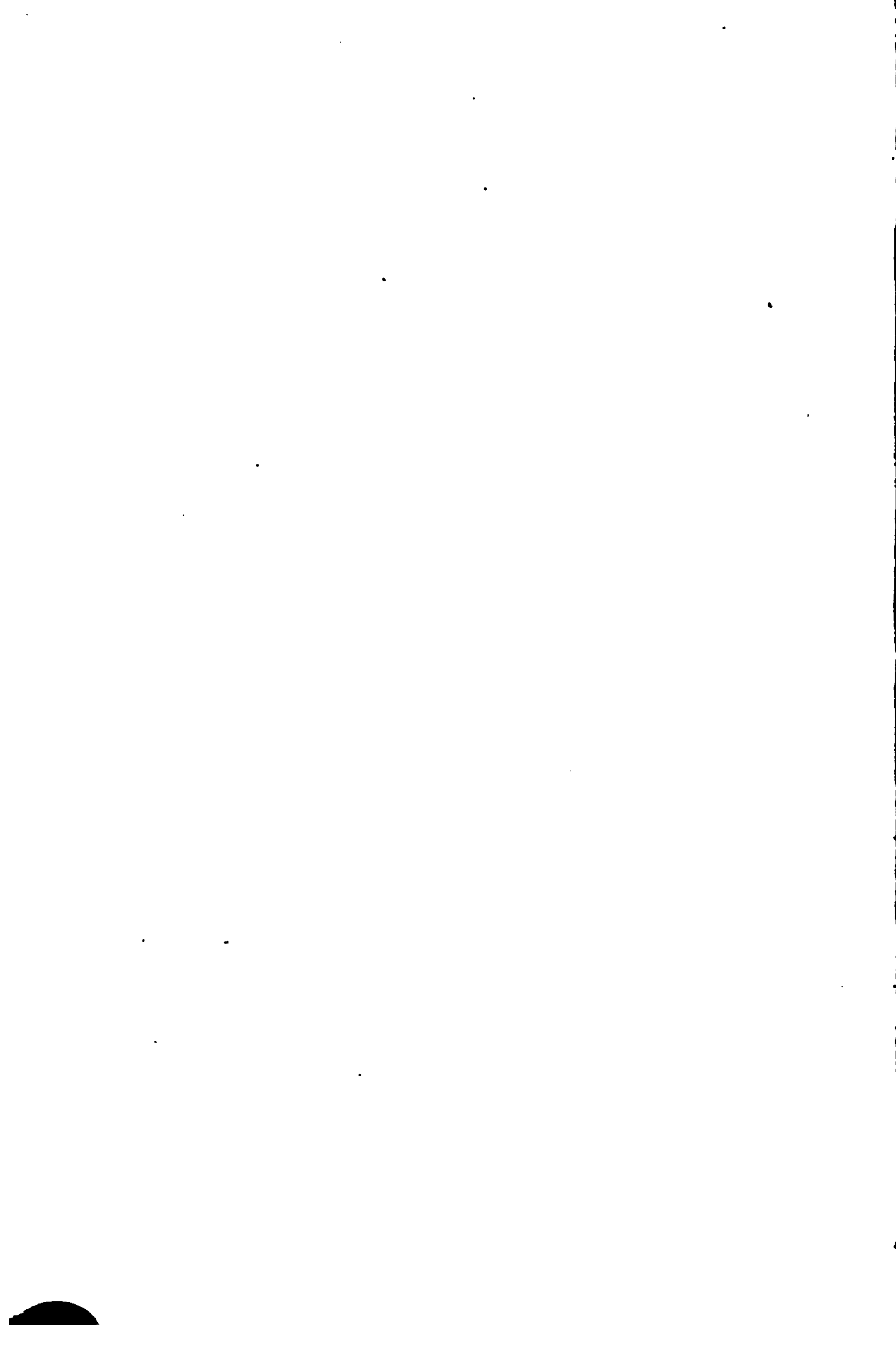






# Zeitschrift

für

# Mathematik und Physik

herausgegeben

unter der verantwortlichen Redaction

von

**Dr. O. Schlömilch, Dr. B. Witzschel**

und

**Dr. M. Cantor.**



**Vierter Jahrgang.**

**Mit 4 lithographirten Tafeln und Holzschnitten.**



**LEIPZIG,**

Verlag von B. G. Teubner.

1859.

9:11
14
v.4

72590

Druck von B. G. Teubner in Dresden.

# Inhalt.

## Arithmetik und Analysis.



## Theoretische und praktische Geometrie.

## Geschichte der Mathematik.



## Mechanik.



## Akustik.



## Optik.



## Wärmelehre und Molecularphysik.



## Elektricität und Magnetismus.



## Vermischtes.



# I.

## Ueber die mittleren Radien der Linien, Flächen und Körper.

Von Professor Dr. M. W. Drobisch.

(Aus den Sitzungsberichten der Königl. Sächs. Gesellschaft der Wissenschaften, mathematisch-physische Classe, am 1. Juli 1858.)

---

Die nächste Veranlassung zu den nachfolgenden Sätzen hat eine Bemerkung von Babinet im *Compte rendu* der Pariser Akademie (1857, Juni p. 121) gegeben, wo derselbe sagt, dass man den mittleren Erdhalbmesser nicht richtig bestimme, wenn man ihn als das Mittel zwischen dem Halbmesser des Pols und dem des Aequators ansehe, also, wenn letzterer $= 1$, die Abplattung $= \alpha$ gesetzt wird, durch $1 - \frac{1}{2}\alpha$ ausdrücke, da der Halbmesser des Pols einem einzigen Punkte, der des Aequators unzählig vielen zukomme. Es sei vielmehr evident, dass, um den wahren mittleren Erdhalbmesser zu finden, man für jedes Element der Oberfläche des Ellipsoids den demselben zugehörigen Halbmesser durch die Fläche dieses Elements multipliciren, das Produkt durch die ganze Oberfläche des Ellipsoids dividiren und von dem Quotienten das Integral nehmen müsse. Hierdurch findet Babinet, dass in Bezug auf die Erde, wo $\alpha = \frac{1}{300}$, dieser Werth aber, nach Airy, nur bis auf $\frac{1}{16}$ seiner Grösse zuverlässig, daher die Berücksichtigung der Potenzen von $\alpha$ ohne wahren Nutzen ist, der mittlere Halbmesser des Ellipsoids $= 1 - \frac{1}{3}\alpha$ gesetzt werden müsse. Er hat jedoch nicht bemerkt, dass dieser Halbmesser der einer Kugel ist, die den gleichen Inhalt und die gleiche Oberfläche wie das Ellipsoid hat, und unter dem in der That häufig der mittlere Erdhalbmesser verstanden wird. Ist nun zwar insofern das Resultat nicht neu, so ist dies doch seine Ableitung. Das Princip aber, auf dem diese beruht, scheint nicht so unmittelbar evident, um einer Begründung nicht zu bedürfen. Diese hat keine Schwierigkeit, sobald man von dem allgemeinen Begriff des mittleren Radius, als des arithmetischen Mittels zwischen den unendlich vielen Geraden ausgeht, die aus einem gegebenen festen Punkte nach allen Punkten einer begrenzten Linie, Fläche oder körperlichen Ausdehnung gezogen werden können. Die An-

wendung dieses Begriffes führt zu vielen merkwürdigen Resultaten. Der speciellen Aufgabe: die mittlere Entfernung aller im Umfang und Inhalt einer ebenen geradlinigen Figur enthaltenen Punkte von einem in ihrer Ebene gegebenen festen Punkte zu bestimmen, hat Grunert eine eigene Schrift*) gewidmet, die man aber wohl, ohne im Uebrigen den Verdiensten ihres Verfassers zu nahe zu treten, ermüdend weitschweifig nennen darf.

1.

Seien $r', r'', \ldots . r^{(n)}$ die von einem gegebenen festen Punkt oder Pol $O$ nach $n$ gegebenen Punkten $M', M'', \ldots . M^{(n)}$, welche entweder in derselben Ebene oder beliebig im Raume liegen mögen, auslaufenden Radien, so ist das Mittel aus allen

$$r_1 = \frac{r' + r'' + \ldots . + r^{(n)}}{n}.$$

Sind nun $M', M'', \ldots .$ die Theilpunkte einer in $n$ gleiche Theile zerlegten begrenzten geraden oder krummen Linie $s$, so ist, wenn $\Delta s$ die Grösse jedes Theils bezeichnet, $n = \frac{\Delta s}{s}$, daher dann

$$r_1 = (r' + r'' + \ldots . + r^{(n)}) \frac{\Delta s}{s},$$

oder auch, wenn $r$ im allgemeinen die gezogenen Radien bezeichnet,

$$r_1 = \Sigma \frac{r \Delta s}{s}.$$

Wird nun $s$ in unendlich viele gleiche Theile getheilt, so wird $\Delta s = ds$, daher dann

$$r_1 = \int \frac{r\,ds}{s},$$

oder da $s$ einen constanten Werth, die Länge der Linie bedeutet,

$$1) \qquad s r_1 = \int r\,ds,$$

wo das Integral zwischen den den Endpunkten von $s$ entsprechenden Grenzen zu nehmen ist. Nennt man nun $r_1$ den mittleren Radius der Linie $s$ aus dem Pole $O$, so hat die Formel 1) folgende Bedeutung. Ist 1) $s$ eine Gerade, so lege man durch sie und den Pol eine Ebene und drehe in derselben sämmtliche aus $O$ nach den Theilpunkten ihrer unter sich gleichen unendlich kleinen Elemente gezogenen Radien um diese Punkte, bis sie senkrecht auf der Geraden stehen. Alsdann geht durch ihre Endpunkte (die zuvor im Pole zusammenfielen) eine Curve, von der die Radien in ihrer jetzigen Lage die rechtwinkligen Ordinaten sind und deren zugehörige Abscissen auf der gegebenen Geraden liegen. Der durch diese Curve, die Ordinaten ihrer Endpunkte und die gegebene Gerade $s$ eingeschlossene

*) Ueber die mittlere Entfernung einer Figur von einem Punkte oder über die sogenannte Entfernung des Ackers vom Hofe. Greifswald, 1848.

Flächenraum ist nun gleich dem Rechteck aus der Länge von $s$ und dem mittleren Radius $r_1$. Ist 2) $s$ eine Curve, so denke man sie in eine Gerade gestreckt und verfahre im Uebrigen wie zuvor, so ergiebt sich dasselbe Resultat.

Durch die Formel 1) ist die Bestimmung des mittleren Radius von $s$ abhängig gemacht von der Rectification von $s$, sofern dies eine Curve bezeichnet, und von der Quadratur der Curve, deren Ordinate $r$ und Abscissenincrement $ds$ ist. Es bedarf aber zur Auffindung dieser Quadratur nicht der Entwickelung der Gleichung der zu quadrirenden Curve, sondern nur der Kenntniss des Zusammenhanges zwischen $r$ und $ds$.

Sei nämlich zuerst $s$ eine ebene Curve und liege $O$ in der Ebene derselben, so mache man $O$ zum Anfang der rechtwinkligen Coordinaten $x$, $y$, durch welche die Curve gegeben ist; dann wird offenbar

$$2) \quad s = \int \sqrt{dx^2 + dy^2} \text{ und } sr_1 = \int \sqrt{x^2 + y^2} \cdot \sqrt{dx^2 + dy^2},$$

wodurch die Gleichung der Curve $y$ als Function von $x$ gegeben und die Integrale zwischen den den Endpunkten von $s$ entsprechenden Grenzwerthen von $x$ zu nehmen sind.

Sei zweitens wiederum $s$ eine ebene Curve, der Pol aber ausserhalb ihrer Ebene in dem Abstand $h$ von derselben gelegen. Dann mache man den Fusspunkt der Senkrechten $h$ zum Coordinatenanfang, so wird

$$3) \quad s = \int \sqrt{dx^2 + dy^2} \text{ und } sr_1 = \int \sqrt{h^2 + x^2 + y^2} \cdot \sqrt{dx^2 + dy^2}.$$

Sei endlich $s$ eine Curve im Raum, von einfacher oder doppelter Krümmung, so ist, wenn dieselbe durch die rechtwinkligen Coordinaten $x$, $y$, $z$, deren Anfang $O$, bestimmt ist, so dass durch die beiden Gleichungen der Curve zwei dieser Coordinaten als Functionen der dritten gegeben sind,

$$4) \quad s = \int \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2} \text{ und } sr_1 = \int \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \cdot \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2},$$

wo von den Grenzen der Integrale dasselbe wie zuvor gilt.

## 2.

Es ist unmittelbar einleuchtend, dass man durch dieselben Betrachtungen wie zuvor auf die nämliche Formel 1) geführt wird, wenn $s$ ein begrenztes ebenes oder krummes Flächenstück bedeutet, das man in unendlich viele gleiche Theile $ds$ zerlegt, und nach jedem derselben aus dem beliebig gelegenen Pole $O$ einen Radius, der im Allgemeinen durch $r$ bezeichnet werde, zieht. Die Formel hat alsdann folgenden Sinn: Ist 1) $s$ eine ebene Figur, so drehe man die nach ihren Elementen gezogenen Radien um die Punkte, in denen sie diese treffen, bis sie auf der Ebene der Figur senkrecht stehen. Dann geht durch die Endpunkte dieser Radien (die zuvor im Pole zusammenfielen) eine krumme Fläche. Der Raum, welcher zwischen dieser Fläche, der Figur $s$ und zwischen der oder den Flächen

enthalten ist, welche eine durch den Umfang von $s$ geführte, auf der Ebene dieser Figur senkrechte Gerade beschreibt, ist gleich dem Inhalt des prismatischen oder cylindrischen Körpers, der $s$ zur Basis und den mittleren Radius $r_1$ der Figur $s$ aus dem Pole $O$ zur Höhe hat. Ist 2) $s$ ein begrenztes Stück einer krummen Fläche, so kann man immer auf unzählig verschiedene Weise eine ebene Figur $\sigma$ bilden, die aus denselben gleichen Flächenelementen $ds$ wie $s$ besteht und deren Flächeninhalt daher dem von $s$ gleich ist. Stellt man nun die allen diesen Elementen zugehörigen Radien senkrecht auf die Ebene von $\sigma$, so geht durch ihre Endpunkte eine krumme Fläche, die zu dem mittleren Radius von $s$ ganz in derselben Beziehung steht, wie die auf ähnliche Weise im ersten Falle erhaltene Fläche.

Durch die Formel 1) ist hier die Auffindung des mittleren Radius zurückgeführt auf die Complanation der Fläche $s$ und die Cubatur der krummen Fläche, von der $ds$ die senkrechte Projection jedes ihrer Elemente auf eine Ebene darstellt, in Bezug auf welche die Werthe von $r$ die senkrechten Ordinaten dieser Fläche ausdrücken. Auch hier bedarf es nur der Kenntniss des Zusammenhangs zwischen $r$ und $ds$, um diese Cubatur durch Integration auszuführen.

Sei nämlich 1) $s$ ein Flächenstück, welches von dem Bogen einer ebenen Curve, einer durch den in der Ebene derselben liegenden Pol gehenden Abscissenachse und die auf dieser senkrechten Ordinaten der Endpunkte des Bogens begrenzt wird. Ist dann $y = f(x)$ die Gleichung der Curve und bezeichnen $\alpha$, $\beta$ die Abscissen der Endpunkte des Bogens, wobei der Pol zum Coordinatenanfang gewählt ist; sind ferner $x$, $y'$ die Coordinaten eines innerhalb $s$ liegenden Punktes und ist, wie zuvor, $r_1$ der gesuchte mittlere Radius von $s$, so ist

$$5)\qquad s = \int_\alpha^\beta f(x)\,dx \quad \text{und} \quad sr_1 = \int_\alpha^\beta dx \int_0^{f(x)} dy' \sqrt{x^2 + y'^2},$$

oder wenn man in der zweiten Formel die Integration nach $y'$ ausführt, da

$$\int dy' \sqrt{x^2 + y'^2} = \tfrac{1}{2}\left\{y' \sqrt{x^2 + y'^2} + x^2\, lgn\left[y' + \sqrt{x^2 + y'^2}\right]\right\}$$

$$5^*)\quad sr_1 = \tfrac{1}{2}\int_\alpha^\beta dx \left\{f(x)\sqrt{x^2 + f(x)^2} + x^2\, lgn\left[\frac{f(x) + \sqrt{x^2 + f(x)^2}}{x}\right]\right\},$$

wo zur Abkürzung $f(x)^2$ für $[f(x)]^2$ geschrieben ist.

Offenbar kann man durch Anwendung dieser Formel auch den mittleren Radius der Fläche einer in sich zurücklaufenden Curve bestimmen. Einfacher wird dies aber im Allgemeinen durch Benutzung von Polarcoordinaten geschehen. Denn gehe die Achse, auf welche sich dann die Anomalie $\varphi$ bezieht, durch den Pol, sei dieser der Coordinatenanfang und $\varrho = f(\varphi)$ die Gleichung der gegebenen Curve, so ist die Fläche eines Sec-

tors, der von der Curve und den zu den Anomalien $\alpha$, $\beta$ gehörigen Vectoren derselben $f(\alpha)$, $f(\beta)$ begrenzt wird,

$$s = \tfrac{1}{2}\int_\alpha^\beta f(\varphi)^2\,d\varphi.$$

Sind nun $\varphi$, $r$ die Polarcoordinaten irgend eines innerhalb dieses Sectors liegenden Punktes, so ist das demselben zugehörige Flächenelement $r\,dr\,d\varphi$, daher nach 1)

$$6)\qquad s r_1 = \int_\alpha^\beta d\varphi \int_0^{f(\varphi)} r^2\,dr = \tfrac{1}{3}\int_\alpha^\beta f(\varphi)^3\,d\varphi.$$

Liegt der Pol innerhalb der in sich zurücklaufenden Curve, so ist um den mittleren Radius ihrer Fläche zu erhalten, $\alpha = 0$ und $\beta = 2\pi$ zu setzen. Liegt er ausserhalb, so sind $\alpha$, $\beta$ die Anomalien der beiden die Curve berührenden Vectoren. Es ist aber dann der dem Pole zunächst liegende, zwischen diesen Vectoren enthaltene Zweig zu unterscheiden von dem zwischen denselben Vectoren liegenden entfernteren. Wird jener durch $f_1(\varphi)$, dieser durch $f_2(\varphi)$ bezeichnet, so ist, wenn dann $r_1$ den mittleren Radius der von der Curve umschlossenen Fläche bedeutet,

$$7)\qquad \left\{\begin{aligned} s &= \tfrac{1}{2}\int_\alpha^\beta [f_2(\varphi)^2 - f_1(\varphi)^2]\,d\varphi, \\ s r_1 &= \tfrac{1}{3}\int_\alpha^\beta [f_2(\varphi)^3 - f_1(\varphi)^3]\,d\varphi. \end{aligned}\right.$$

Diese Formeln gelten auch noch, wenn $f_1(\varphi)$, $f_2(\varphi)$ nicht die Vectoren von Zweigen einer und derselben, sondern von zwei verschiedenen Curven bedeuten, die entweder allein oder in Verbindung mit den zu $\alpha$, $\beta$ gehörigen Vectoren die Fläche $s$ einschliessen.

2) Liegt der Pol ausserhalb der Ebene von $s$ in dem Abstand $h$ von derselben, so wird, wenn man den Fusspunkt von $h$ zum Coordinatenanfang macht, auf ähnliche Weise, wie in 5)

$$8)\qquad s = \int_\alpha^\beta f(x)\,dx, \qquad s r_1 = \int_\alpha^\beta dx \int_0^{f(x)} dy' \sqrt{x^2 + y'^2 + h^2}.$$

Bedient man sich polarer Coordinaten und bedeutet dann $s$ den Sector, der zwischen der gegebenen Curve und den aus dem Fusspunkt von $h$ gezogenen, zu den Anomalien $\alpha$, $\beta$ gehörigen Vectoren enthalten ist, so wird, wie zuvor,

$$s = \tfrac{1}{2}\int_\alpha^\beta f(\varphi)\,d\varphi.$$

Sind ferner $\varphi$, $\varrho'$ die Polarcoordinaten irgend eines innerhalb des Sectors $s$ liegenden Punktes, so ist wiederum $\varrho' \, d\varrho' \, d\varphi$ das zugehörige Flächenelement, der aus dem Pol gezogene Radius desselben aber $r = \sqrt{\varrho'^2 + h^2}$; folglich

$$s r_1 = \int\int \varrho' \, d\varrho' \, d\varphi \sqrt{\varrho'^2 + h^2},$$

oder, wenn man zuerst nach $\varrho'$ integrirt, das erhaltene Integral von $\varrho' = 0$ bis $\varrho' = f(\varphi)$ nimmt, und dann nach $\varphi$ integrirt, mit Hinzufügung der Grenzen von $\varphi$,

$$9) \qquad s r_1 = \tfrac{1}{3} \int_{\alpha}^{\beta} [f(\varphi)^2 + h^2]^{\frac{3}{2}} \, d\varphi,$$

welche Formel für $h = 0$ in 6) übergeht. Ist die Curve eine in sich zurücklaufende und liegt der Fusspunkt von $h$ innerhalb derselben, so ist auch hier, wenn $r_1$ der mittlere Radius der Fläche der Curve, $\alpha = 0$, $\beta = 2\pi$ zu setzen. Liegt dieser Fusspunkt ausserhalb der Curve, so ist mit derselben Unterscheidung wie unter 7)

$$10) \qquad s r_1 = \tfrac{1}{3} \int_{\alpha}^{\beta} \left\{ [f_2(\varphi)^2 + h^2]^{\frac{3}{2}} - [f_1(\varphi)^2 + h^2]^{\frac{3}{2}} \right\} d\varphi,$$

wo $s$ denselben Werth wie unter 7) hat. Auch dieser Formel kommt die bei 7) bemerkte weitere Bedeutung zu.

3) Ist $s$ ein Stück einer krummen Fläche und wird der Pol zum Coordinatenanfang gemacht, so ergiebt sich

$$11) \quad \begin{cases} s = \int\int dx \, dy \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}, \\ s r_1 = \int\int dx \, dy \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2} \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \end{cases}$$

wo $z$ und die partiellen Differentialquotienten $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$ durch die Gleichung der Fläche als Functionen von $x$ und $y$ gegeben sind.

Ist $s$ durch eine in sich zurücklaufende Curve begrenzt, so hat ihre Projection auf die Ebene $xy$ einen dem Pol näheren und einen entfernteren Zweig, von denen jener durch $y = f_1(x)$, dieser durch $y = f_2(x)$ gegeben sei. Integrirt man dann in den vorstehenden Formeln, nach Einführung der Ausdrücke von $z$, $\frac{\partial z}{\partial x}$ und $\frac{\partial z}{\partial y}$ durch $x, y$, zuerst nach $y$, so hat man das gefundene Integral zwischen den Grenzen $f_1(x)$ und $f_2(x)$ zu nehmen. Integrirt man sodann nach $x$, so hat man dieses zweite Integral zwischen denjenigen Werthen von $x$ zu nehmen, welche die Abscissen der diese Curve berührenden Ordinaten ausdrücken.

Die Anwendung polarer Coordinaten giebt complicirtere Formeln und scheint daher hier im Allgemeinen nicht angemessen.

3.

Endlich ist auch klar, dass man abermals die Formel 1) erhält, wenn $s$ einen von einer krummen, oder mehreren ebenen oder krummen Flächen begrenzten Raum bezeichnet, der in unendlich viele gleiche Körperelemente zerlegt wird, wenn man ferner nach jedem dieser Elemente aus dem innerhalb oder ausserhalb des Körpers gelegenen Pole einen Radius $r$ zieht und das Mittel $r_1$ aus allen diesen Radien sucht. Eine geometrische Deutung lässt sich nun zwar in diesem Falle der Formel nicht geben, wohl aber folgende statische.

Alle Elemente des Körpers $s$, welche den gleichen Abstand vom Pole $O$ haben, liegen auf einer Kugelfläche, deren Mittelpunkt $O$ ist. Man kann demnach $s$ in unendlich viele Schichten von Elementen zerlegt denken, von denen jede entweder eine vollständige Kugelschale oder einen Theil einer solchen bildet. Man kann ferner aus den Elementen einer jeden dieser Schichten eine ebene Schicht bilden und alle diese ebenen Schichten auf einander legen, auch jeder derselben eine Gestalt geben, die sich an die der nächsten Schicht stetig anschliesst. Auf diese Weise bildet die Gesammtheit dieser Schichten einen Körper $\sigma$ von gleichem Inhalt wie $s$. Stellt man nun die Radien, die in $s$ jedem Element zukommen, senkrecht auf die Ebenen der Schichten, in denen sie in $\sigma$ liegen, so fallen die Endpunkte der Radien aller Elemente von $\sigma$ in dieser Lage in eine und dieselbe den Ebenen jener Schichten parallele Ebene, drücken also die Abstände der Elemente von dieser Ebene aus. Da nun $s = \sigma$ und $ds = d\sigma$, so ist auch $\sigma r_1 = \int r\, d\sigma$, und drückt nun diese Formel aus, dass der mittlere Radius $r_1$ der Abstand des Schwerpunkts des Körpers $\sigma$ von der Ebene ist, von welcher seine Elemente resp. den gleichen Abstand haben, wie die ihnen entsprechenden Elemente des Körpers $s$ von dem Pole $O$.

Noch kürzer ist folgende Deutung der Formel. Man kann sich die Radien der Elemente von $s$ nach den Schwerpunkten derselben gezogen denken. Dreht man nun die Radien sämmtlicher Elemente mit diesen um den Pol, bis sie in eine und dieselbe gerade Linie kommen, so bilden die Schwerpunkte der sämmtlichen Elemente von $s$ eine begrenzte Gerade $\sigma$, deren Länge die Differenz zwischen dem grössten und kleinsten Radius von $s$ ist. Es fallen jedoch hierbei die Schwerpunkte aller derjenigen Elemente zusammen, die den gleichen Abstand $r$ vom Pole haben. Die Zahl der Elemente, deren Schwerpunkte in jedem Punkte der Geraden $\sigma$ zusammenfallen, ist daher proportional der Grösse der Durchschnittsfläche der mit dem Halbmesser $r$ beschriebenen Kugelfläche und des Körpers $s$. Denkt man sich nun die Elemente $ds$ als schwer und legt ihnen, da sie, nach der Voraussetzung, alle gleich sind, gleiche Gewichte bei, so stellt $\sigma$ eine ungleichförmig belastete Gerade dar. Der Abstand des Schwerpunkts dieser Geraden vom Pol ist der mittlere Radius des Körpers $s$.

Es ist leicht begreiflich, dass diese Deutung auch auf die Fälle, wo $s$ eine Fläche oder Linie bezeichnet, übertragen werden kann.

Wir können nun auch allgemeine Formeln zur Berechnung des mittleren Radius des körperlichen Raums $s$ entwickeln.

Sei der Pol $O$ der Anfang eines rechtwinkligen Coordinatensystems, und in Bezug auf dieses $z = f(x, y)$ die Gleichung einer krummen Fläche, die in Verbindung mit der $xy$-Ebene, ferner mit zwei Ebenen, die der $yz$-Ebene in den Abständen $\alpha$, $\alpha'$ parallel sind, endlich mit zwei, der $xz$-Ebene in den Abständen $\beta$, $\beta'$ parallelen Ebenen, den Raum $s$ begrenzt, so ist

$$12)\quad \begin{cases} s = \int_{\alpha}^{\alpha'} dx \int_{\beta}^{\beta'} f(x, y)\, dy, \\ s r_1 = \int_{\alpha}^{\alpha'} dx \int_{\beta}^{\beta'} dy \int_{0}^{f(x,y)} dz \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}. \end{cases}$$

Auf ähnliche Weise, wie es bei 5) geschehen ist, könnte hier in der zweiten Formel die Integration nach $z$ ausgeführt werden, wodurch sich das dreifache Integral auf ein doppeltes reducirt. Wir halten uns jedoch dabei nicht auf, da sich auch hier die Anwendung von Polarcoordinaten vortheilhafter erweist.

Sei nämlich $\varrho$ der Radiusvector der krummen Fläche aus dem Pole $O$, $\vartheta$ der Winkel, den derselbe mit der $x$-Achse macht, und $\psi$ die Neigung der Ebene dieses Winkels gegen die Ebene $xy$, so ist die Gleichung der Fläche von der Form

$$\varrho = f(\vartheta, \psi),$$

wo $f$ eine gegebene Function bezeichnet. Dies vorausgesetzt, lässt sich das Körperelement $ds$, dessen von 0 bis $\varrho$ veränderlicher Abstand vom Pol, $r$, der Lage nach mit $\varrho$ zusammenfällt, ausdrücken durch $ds = r^2 \sin\vartheta\, dr\, d\vartheta\, d\psi$. Hieraus folgt

$$s = \int\int\int r^2 \sin\vartheta\, dr\, d\vartheta\, d\psi,$$

$$s r_1 = \int\int\int r^3 \sin\vartheta\, dr\, d\vartheta\, d\psi.$$

Integrirt man in beiden Formeln zuerst nach $r$, nimmt die Integrale von $r = 0$ bis $r = \varrho = f(\vartheta, \psi)$ und bezeichnet die Grenzen der Integration nach $\vartheta$ durch $\beta$, $\beta'$, die der Integration nach $\psi$ durch $\alpha$, $\alpha'$, so wird

$$13)\quad \begin{cases} s = \frac{1}{3} \int_{\alpha}^{\alpha'} d\psi \int_{\beta}^{\beta'} f(\vartheta, \psi)^3 \sin\vartheta\, d\vartheta, \\ s r_1 = \frac{1}{4} \int_{\alpha}^{\alpha'} d\psi \int_{\beta}^{\beta'} f(\vartheta, \psi)^4 \sin\vartheta\, d\vartheta. \end{cases}$$

Sind $\alpha$, $\alpha'$, $\beta$, $\beta'$ constante Werthe, so ist durch diese Formeln der mittlere Radius des Körpers gegeben, der durch die krumme Fläche, zwei unter den Winkeln $\beta$, $\beta'$ gegen die Ebene $xy$ geneigte, durch die $x$-Achse gehende Ebenen, und zwei Kegelflächen begrenzt ist, die durch Umdrehung der Winkel $\alpha$, $\alpha'$ um die $x$-Achse erzeugt werden. Man kann durch dieselben aber auch den mittleren Radius des Körpers bestimmen, der von der gegebenen Fläche und zwei Kegelflächen begrenzt wird, von denen die erzeugende Gerade einer jeden durch den Pol und eine auf der Fläche liegende Directrix geht, welche letztere dann durch eine Gleichung zwischen $\vartheta$ und $\psi$ bestimmt sein muss. In diesem Falle sind $\alpha$, $\alpha'$ die Neigungen der beiden durch die $x$ Achse gelegten, die Kegelfläche berührenden Ebenen, $\beta$ und $\beta'$ die Functionen von $\psi$, durch welche für jede von beiden Kegelflächen die Directrix auf der Oberfläche gegeben ist.

Läuft die Fläche, deren Gleichung $\varrho = f(\vartheta, \psi)$, in sich zurück und umschliesst also einen körperlichen Raum $s$, so ergeben die Formeln 13) seinen mittleren Radius, sofern der Pol innerhalb $s$ liegt, wenn $\alpha = 0$, $\alpha' = 2\pi$, $\beta = 0$ und $\beta' = \pi$ gesetzt wird. Liegt der Pol aber ausserhalb $s$, so ist zuvörderst zwischen dem dem Pol näheren Theil der Oberfläche und dem entfernteren Theil zu unterscheiden, welche beide durch die Curve gesondert werden, in der die Kegelfläche, deren Scheitel der Pol, die Fläche $s$ berührt. Bezeichnen wir jenen durch $f_1(\vartheta, \psi)$, diesen durch $f_2(\vartheta, \psi)$ und ist $\vartheta = \varphi(\psi)$ die Gleichung der berührenden Kegelfläche, so wird, da man die Achse $x$, auf welche sich $\vartheta$ bezieht, immer so legen kann, dass sie $s$ trifft,

$$14)\quad \begin{cases} s = \frac{1}{3}\int_0^{2\pi} d\psi \int_0^{\varphi(\psi)} [f_2(\vartheta, \psi)^3 - f_1(\vartheta, \psi)^3] \sin\vartheta\, d\vartheta, \\ s r_1 = \frac{1}{4}\int_0^{2\pi} d\psi \int_0^{\varphi(\psi)} [f_2(\vartheta, \psi)^4 - f_1(\vartheta, \psi)^4] \sin\vartheta\, d\vartheta. \end{cases}$$

Dass $f_1$ und $f_2$ auch hier zwei von einander unabhängige Flächen bedeuten können, wird kaum bemerkt zu werden brauchen.

## 4.

Werde jetzt der mittlere Radius von zwei oder mehreren zusammenhängenden oder nicht zusammenhängenden Linien, Flächen oder Körpern aus einem gemeinsamen Pol gesucht.

1) Seien gegeben zwei von einander unabhängige Systeme von Punkten $M'$, $M''$, ... $M^{(n)}$ und $N'$, $N''$, ... $N^{(\nu)}$, und seien resp. $r'$, $r''$, ... $r^{(n)}$ und $\varrho'$, $\varrho''$, ... $\varrho^{(\nu)}$ die aus dem gemeinsamen Pol $O$ nach ihnen gezogenen Radien, so ist das Mittel aus allen

$$R = \frac{r' + r'' + \ldots + r^{(n)}}{n + \nu} + \frac{\varrho' + \varrho'' + \ldots + \varrho^{(\nu)}}{n + \nu}.$$

Werden nun sowohl $M', M'' \ldots$ als $N', N'' \ldots$ die Theilpunkte von zwei begrenzten Linien $s$, $\sigma$, welche resp. in $n$ und $\nu$ gleiche Theile $\Delta s = \Delta\sigma$ zerlegt sind, so wird $n = \frac{s}{\Delta s}$, $\nu = \frac{\sigma}{\Delta\sigma}$, daher: $n:\nu = s:\sigma$, folglich auch

$$n + \nu = \frac{n(s+\sigma)}{s} = \frac{s+\sigma}{\Delta s}, \text{ und ebenso } n + \nu = \frac{\nu(s+\sigma)}{\sigma} = \frac{s+\sigma}{\Delta\sigma};$$

daher

$$R = (r' + r'' + \ldots + r^{(n)})\frac{\Delta s}{s+\sigma} + (\varrho' + \varrho'' + \ldots + \varrho^{(\nu)})\frac{\Delta\sigma}{s+\sigma},$$

wofür auch abgekürzt geschrieben werden kann:

$$R = \frac{\Sigma r \Delta s}{s+\sigma} + \frac{\Sigma\varrho\Delta\sigma}{s+\sigma}.$$

Werden nun $n$ und $\nu$ unendlich, so geht diese Formel über in

$$(s+\sigma)R = \int r\,ds + \int\varrho\,d\sigma.$$

Bezeichnen aber $r_1$, $\varrho_1$ die mittleren Radien der einzelnen Linien $s$, $\sigma$ aus demselben Pol, so ist nach dem Vorigen

$$sr_1 = \int r\,ds, \quad \sigma\varrho_1 = \int\varrho\,ds;$$

daher ist

$$15) \qquad (s+\sigma)R = sr_1 + \sigma\varrho_1.$$

2) Seien allgemeiner drei Systeme von resp. $n$, $\nu$ und $\mathfrak{n}$ Punkten gegeben, deren von dem gemeinschaftlichen Pol auslaufende Radien resp. durch $r', r'', \ldots r^{(n)}$, $\varrho', \varrho'', \ldots \varrho^{(\nu)}$, $\mathfrak{r}', \mathfrak{r}'', \ldots \mathfrak{r}^{(\mathfrak{n})}$ bezeichnet werden mögen, so ist das Mittel aus allen

$$R = \frac{r' + r'' + \ldots + r^{(n)}}{n+\nu+\mathfrak{n}} + \frac{\varrho' + \varrho'' + \ldots + \varrho^{(\nu)}}{n+\nu+\mathfrak{n}} + \frac{\mathfrak{r}' + \mathfrak{r}'' + \ldots + \mathfrak{r}^{(\mathfrak{n})}}{n+\nu+\mathfrak{n}}.$$

Sind nun wieder diese Punkte die Theilpunkte von drei begrenzten, in die gleichen Theile $\Delta s = \Delta\sigma = \Delta\mathfrak{s}$ getheilten Linien $s$, $\sigma$, $\mathfrak{s}$, so ist $n = \frac{s}{\Delta s}$, $\nu = \frac{\sigma}{\Delta\sigma}$, $\mathfrak{n} = \frac{\mathfrak{s}}{\Delta\mathfrak{s}}$, daher $n:\nu:\mathfrak{n} = s:\sigma:\mathfrak{s}$, folglich

$$\begin{aligned} n+\nu+\mathfrak{n} &= \frac{n}{s}(s+\sigma+\mathfrak{s}) = \frac{s+\sigma+\mathfrak{s}}{\Delta s} \\ &= \frac{\nu}{\sigma}(s+\sigma+\mathfrak{s}) = \frac{s+\sigma+\mathfrak{s}}{\Delta\sigma} \\ &= \frac{\mathfrak{n}}{\mathfrak{s}}(s+\sigma+\mathfrak{s}) = \frac{s+\sigma+\mathfrak{s}}{\Delta\mathfrak{s}} \end{aligned}$$

daher

$$R = \frac{\Sigma r\Delta s}{s+\sigma+\mathfrak{s}} + \frac{\Sigma\varrho\Delta\sigma}{s+\sigma+\mathfrak{s}} + \frac{\Sigma\mathfrak{r}\Delta\mathfrak{s}}{s+\sigma+\mathfrak{s}}.$$

Werden nun $n$, $\nu$ und $\mathfrak{n}$ unendlich, so geht diese Formel über in

$$(s+\sigma+\mathfrak{s})R = \int r\,ds + \int\varrho\,ds + \int\mathfrak{r}\,d\mathfrak{s}.$$

Es ist aber, wenn $r_1$, $\varrho_1$, $\mathfrak{r}_1$ die mittleren Radien der einzelnen Linien $s$, $\sigma$, $\mathfrak{f}$ bezeichnen,

$$sr_1 = \int r\,ds, \quad \sigma\varrho_1 = \int \varrho\,ds, \quad \mathfrak{f}\mathfrak{r}_1 = \int \mathfrak{r}\,d\mathfrak{f},$$

folglich

$$16) \qquad (s+\sigma+\mathfrak{f})\,R = sr_1 + \sigma\varrho_1 + \mathfrak{f}\mathfrak{r}_1.$$

3) Durch dieselben Schlüsse folgt völlig allgemein, wenn $R$ den mittleren Radius von $m$ begrenzten, von einander unabhängigen Linien $s$, $s'$, $s''$, ... $s^{(m-1)}$ aus einem gemeinsamen Pol, und $r_1$, $r_1'$, $r_1''$, ... $r^{(m-1)}$ die mittleren Radien bezeichnen, die ihnen in Bezug auf denselben Pol einzeln zukommen, dass

$$17) \quad (s+s'+s''+\ldots+s^{(m-1)})\,R = sr_1 + s'r_1' + s''r_1'' + \ldots + s^{(m-1)}r_1^{(m-1)}.$$

Denn unterscheidet man zuerst $m$ Systeme von resp. $n$, $n'$, $n''$, ... $n^{(m-1)}$ Punkten, so ist, wenn diese die Theilpunkte von $m$ in gleiche Theile $\Delta s = \Delta s' = \Delta s'' = \ldots = \Delta s^{(m-1)}$ zerlegten begrenzten Linien $s$, $s'$, $s''$, ... $s^{(m-1)}$ werden,

$$n = \frac{s}{\Delta s}, \quad n' = \frac{s'}{\Delta s'}, \quad n'' = \frac{s''}{\Delta s''}, \ldots n^{(m-1)} = \frac{s^{(m-1)}}{\Delta s^{(m-1)}};$$

daher

$$\begin{aligned} n + n' + n'' + \ldots + n^{(m-1)} &= \frac{s + s' + s'' + \ldots + s^{(m-1)}}{\Delta s} \\ &= \frac{s + s' + s'' + \ldots + s^{(m-1)}}{\Delta s'} \\ &= \frac{s + s' + s'' + \ldots + s^{(m-1)}}{\Delta s''} \\ &\quad \cdots\cdots\cdots \\ &= \frac{s + s' + s'' + \ldots + s^{(m-1)}}{\Delta s^{(m-1)}}, \end{aligned}$$

folglich, da offenbar, wenn jetzt $r$, $r'$, $r''$, ... $r^{(m-1)}$ die veränderlichen Radien der Theilpunkte der Linien $s$, $s'$ u. s. w. bezeichnen,

$$R = \frac{\Sigma r}{n+n'+\ldots+n^{(m-1)}} + \frac{\Sigma r'}{n+n'+\ldots+n^{(m-1)}} + \ldots + \frac{\Sigma r^{(m-1)}}{n+n'+\ldots+u^{(m-1)}},$$

$$(s+s'+s''+\ldots+s^{(m-1)})\,R = \Sigma r\Delta s + \Sigma r'\Delta s' + \ldots + \Sigma r^{(m-1)}\Delta s^{(m-1)},$$

woraus, wie man leicht übersieht, wenn $n$, $n'$, $n''$, ... $n^{(m-1)}$ unendlich werden, die Formel 17) sich ergiebt.

Es bedarf wohl keines weiteren Beweises, dass diese Formel auch gilt, wenn $s$, $s'$, $s''$ ... begrenzte Flächen oder körperliche Räume bedeuten, die der Reihe nach in $n$, $n'$, $n''$ ... unter sich gleiche Elemente $ds = ds' = ds''$ ... zerlegt gedacht werden, da auch dann die unendlich werdenden Zahlen $n$, $n'$, $n''$ ... sich wie $s$, $s'$, $s''$ ... verhalten, und ebenso alle übrigen, zur Auffindung von $R$ erforderlichen Bestimmungen sich wesentlich gleich bleiben. Man kann daher aus der in dieser Ausdehnung genommenen Formel folgenden Satz ziehen: Dreht man die mittleren Ra-

dien $r_1$, $r_1'$, $r_1''$ ... $r_1^{(m-1)}$ der Linien, Flächen oder Körper $s, s', s'', \ldots s^{(m-1)}$ um ihren gemeinsamen Pol, bis sie in eine und dieselbe Gerade fallen, und denkt sich ihre Endpunkte als schwere Punkte, deren Gewichte resp. den Grössen $s, s'$, $s'' \ldots s^{(m-1)}$ proportional sind, so ist der Abstand des Schwerpunktes dieser Punkte vom Pol der mittlere Radius des ganzen Systems der $s, s', s'', \ldots s^{(m-1)}$.

Es darf nicht unerwähnt bleiben, dass die Formel 17) für den speciellen Fall, wo $s, s', s'' \ldots$ in einer und derselben Ebene liegende gerade Linien oder ebene Figuren bedeuten, schon von Grunert aufgestellt und erwiesen worden ist*).

Wir geben in den folgenden Artikeln eine Reihe von Anwendungen der vorstehenden allgemeinen Betrachtungen, bei denen wir es jedoch häufig vorziehen werden, auf die allgemeine Formel 1) zurückzugehen, anstatt uns der daraus abgeleiteten unmittelbar zu bedienen, um für jede gegebene Aufgabe diejenigen Coordinatenbestimmungen zu wählen, die uns die kürzeste Auflösung zu geben scheinen.

5.

Sei gegeben ein ebenes Dreieck $ABC$ und werde gesucht 1) der mittlere Radius $r_1$ der Basis $BC$ aus der Spitze $A$ als Pol, und 2) der mittlere Radius $r_2$ der Fläche des Dreiecks aus demselben Pol.

1) Macht man die Basis $BC = a$ zur Abscissenachse, den Fusspunkt $D$ der von der Spitze $A$ auf die Basis gefällten Senkrechten $AD = h$ zum Coordinatenanfang, und bezeichnet durch $x$ die Abscisse eines beliebigen Punktes der Basis, so ist der aus $A$ nach demselben gezogene Radius $r = \sqrt{h^2 + x^2}$. Ferner ist das Element der Basis $ds = dx$, daher, wenn überdies die Abschnitte $DC$, $DB$, in welche $AD$ die Basis zerlegt, durch $p$ und $q$ bezeichnet werden, nach Formel 1)

$$ar_1 = \int_{-q}^{p} dx \sqrt{h^2 + x^2},$$

folglich, wenn $AB = c$ und $AC = b$, daher $\sqrt{h^2 + p^2} = b$ und $\sqrt{h^2 + q^2} = c$,

$$\text{I)} \qquad r_1 = \frac{1}{2a}\left[pb + qc + h^2 lgn\left(\frac{b+p}{c+q}\right)\right].$$

Es ist aber

$$p = b \cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2a}; \quad q = c \cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2a};$$

woraus folgt

$$pb + qc = \frac{1}{2}\,\frac{(b+c)}{a}\,[a^2 + (b-c)^2],$$

*) In der oben angeführten Schrift S. 34 und 111.

$$\frac{b+q}{c-q}=\frac{a+b+c}{b+c-a},$$

oder, wenn $a+b+c=2u$ gesetzt wird,

$$\frac{b+p}{c-q}=\frac{u}{u-a}.$$

Es ist ferner, wenn $\Delta$ die Fläche des Dreiecks bezeichnet,

$$h=\frac{2\Delta}{a}.$$

Setzt man nun diese Ausdrücke in 1) ein, so ergiebt sich

$$\text{I*)}\qquad r_1=\tfrac{1}{4}(b+c)\left[1+\left(\frac{b-c}{a}\right)^2\right]-\frac{2\Delta^2}{a^3}\,lgn\left(1-\frac{a}{u}\right),$$

wo, da $\Delta^2=u(u-a)(u-b)(u-c)$, $r_1$ durch die drei Seiten des Dreiecks gegeben ist. Dass durch die Vertauschung von $a$ mit $b$ diese Formel den mittleren Radius der Seite $b$ aus der Spitze $B$, und ebenso durch Vertauschung von $a$ mit $c$ den mittleren Radius der Seite $c$ aus der Spitze $C$ giebt, erhellt von selbst. Die vorstehende Formel hat auf andere Weise schon Grunert (a. a. O. S. 25) abgeleitet.

Nimmt die Höhe des Dreiecks ohne Ende ab und verschwindet sie zuletzt gänzlich, so wird $\Delta=0$. Dann giebt die Formel den mittleren Radius der Geraden $a$ aus einem in ihr oder ihrer Verlängerung liegenden Pol an.

2) Zur Auflösung des zweiten Theils der Aufgabe kann unmittelbar die Formel 6) benutzt werden, wenn wir die Spitze $A$ des Dreiecks zum Pol machen, und als die Achse, auf welche sich die Anomalie $\varphi$ bezieht, die Senkrechte $AD$ annehmen. Dann ist, entsprechend der dort angenommenen allgemeinen Gleichung $\varrho=f(\varphi)$, die Gleichung der Basis $\varrho=\frac{h}{\cos\varphi}$, wo, wenn $\varrho$ mit den Seiten $AB$, $AC$ zusammenfällt, resp. $\varphi=-\alpha$ und $\varphi=\beta$ sein mag, und giebt demnach 6), da hier $s=\frac{1}{2}ah$ ist, den mittleren Radius

$$r_2=\frac{2h^2}{3a}\int_{-\alpha}^{\beta}\frac{d\varphi}{\cos^3\varphi}.$$

Es ist aber nicht nöthig, dieses Integral zu entwickeln. Denn bedient man sich für die Auflösung des ersten Theils der Aufgabe derselben polaren Coordinaten, so ist der aus $A$ nach einem beliebigen Punkte der Basis gezogene Radius $r=\frac{h}{\cos\varphi}$, und $ds=d\,.\,r\sin\varphi=\frac{h\,d\varphi}{\cos^2\varphi}$, daher, da $s=a$, nach 1)

$$r_1=\frac{h^2}{a}\int_{-\alpha}^{\beta}\frac{d\varphi}{\cos^3\varphi}.$$

Es ist demnach der gesuchte mittlere Radius der Dreiecksfläche

II) $$r_2 = \tfrac{2}{3} r_1,$$
und damit der zweite Theil der Aufgabe durch den ersten gelöst. Man kann dieses Resultat auch so aussprechen: Zieht man aus der Spitze des Dreiecks, als Pol, nach seiner Basis den mittleren Radius derselben, $r_1$, und durch den Schwerpunkt des Dreiecks eine Parallele zur Basis, so ist das zwischen dieser Parallele und der Spitze des Dreiecks enthaltene Stück von $r_1$ der mittlere Radius $r_2$ der Dreiecksfläche.

6.

Man sucht den mittleren Radius des Umfangs und den des Inhalts des Dreiecks $ABC$, wenn der Pol $O$ beider Radien, die wieder $r_1$, $r_2$ bezeichnet werden mögen, in einem beliebigen Punkte der Ebene des Dreiecks liegt.

Man ziehe aus $O$ nach den Spitzen des Dreiecks die Geraden $OA = \alpha$, $OB = \beta$, $OC = \gamma$, und setze die Fläche des Dreiecks $OBC = \Delta'$, ebenso $OCA = \Delta''$, $OAB = \Delta'''$; nenne ferner die halben Umfänge dieser Dreiecke $u'$, $u''$, $u'''$, so dass also $a + \beta + \gamma = 2u'$, $b + \alpha + \gamma = 2u''$, $c + \alpha + \beta = 2u'''$, und bezeichne die mittleren Radien der Grundlinien $a$, $b$, $c$ dieser drei Dreiecke aus dem Pole durch $r_1'$, $r_1''$, $r_1'''$, so ist nach I*) in der vorigen Nummer

$$r_1' = \tfrac{1}{4}(\beta + \gamma)\left[1 + \left(\frac{\beta - \gamma}{a}\right)^2\right] - \frac{2\Delta'^2}{a^3}\, lgn\left(1 - \frac{a}{u'}\right)$$
$$r_1'' = \tfrac{1}{4}(\gamma + \alpha)\left[1 + \left(\frac{\gamma - \alpha}{b}\right)^2\right] - \frac{2\Delta''^2}{b^3}\, lgn\left(1 - \frac{b}{u''}\right)$$
$$r_1''' = \tfrac{1}{4}(\alpha + \beta)\left[1 + \left(\frac{\alpha - \beta}{c}\right)^2\right] - \frac{2\Delta'''^2}{c^3}\, lgn\left(1 - \frac{c}{u'''}\right).$$

Es ist aber vermöge der Formel 16), wenn daselbst der Reihe nach $r_1$, $\varrho_1$, $\mathfrak{r}_1$ mit $r_1'$, $r_1''$, $r_1'''$, desgleichen $s$, $\sigma$, $\mathfrak{f}$ mit $a$, $b$, $c$, ferner $R$ mit $r_1$ vertauscht und zur Abkürzung $a + b + c = 2u$ gesetzt wird,

$$r_1 = \frac{a r_1' + b r_1'' + c r_1'''}{2u};$$

daher wird durch Substitution der vorstehenden Ausdrücke

$$\text{I)}\quad r_1 = \frac{1}{8u}\left\{\begin{aligned} &a(\beta+\gamma)\left[1 + \left(\frac{\beta-\gamma}{a}\right)^2\right] + b(\gamma+\alpha)\left[1 + \left(\frac{\gamma-\alpha}{b}\right)^2\right] \\ &\qquad + c(\alpha+\beta)\left[1 + \left(\frac{\alpha-\beta}{c}\right)^2\right] \\ &-2\left(\frac{2\Delta'}{a}\right)^2 lgn\left(1 - \frac{a}{u'}\right) - 2\left(\frac{2\Delta''}{b}\right)^2 lgn\left(1 - \frac{b}{u''}\right) \\ &\qquad - 2\left(\frac{2\Delta'''}{c}\right)^2 lgn\left(1 - \frac{c}{u'''}\right) \end{aligned}\right\}.$$

Was $r_2$ betrifft, so ist, wenigstens vorläufig, zwischen den zwei Fällen zu unterscheiden, wo der Pol $O$ entweder innerhalb oder ausserhalb des Dreiecks $ABC$ liegt. In dem ersten dieser Fälle ist $ABC = \Delta = \Delta' + \Delta'' + \Delta'''$,

daher, wenn $r_2'$, $r_2''$, $r_2'''$ die mittleren Radien der Dreiecksflächen $\Delta'$, $\Delta''$, $\Delta'''$ aus dem Pole $O$ bezeichnen, in ganz ähnlicher Weise wie zuvor, vermöge der Formel 16),

$$r_2 = \frac{\Delta' r_2' + \Delta'' r_2'' + \Delta''' r_2'''}{\Delta},$$

folglich, da nach dem vorigen Art. unter II)

$$r_2' = \tfrac{2}{3} r_1', \quad r_2'' = \tfrac{2}{3} r_1'', \quad r_2''' = \tfrac{2}{3} r_1''',$$

$$\text{II)}\quad r_2 = \frac{1}{6\Delta}\left\{\begin{array}{r} \Delta'(\beta+\gamma)\left[1+\left(\frac{\beta-\gamma}{a}\right)^2\right] + \Delta''(\gamma+\alpha)\left[1+\left(\frac{\gamma-\alpha}{b}\right)^2\right] \\ + \Delta'''(\alpha+\beta)\left[1+\left(\frac{\alpha-\beta}{c}\right)^2\right] \\ -\left(\frac{2\Delta'}{a}\right)^3 lgn\left(1-\frac{a}{u'}\right) - \left(\frac{2\Delta''}{b}\right)^3 lgn\left(1-\frac{b}{u''}\right) \\ -\left(\frac{2\Delta'''}{c}\right)^3 lgn\left(1-\frac{c}{u'''}\right) \end{array}\right\}.$$

Liegt aber der Pol ausserhalb des Dreiecks, so sind in $\Delta = \Delta' + \Delta'' + \Delta'''$ immer ein oder zwei Glieder des Ausdrucks zur Rechten negativ. Denn man kann bekanntlich überhaupt die Fläche $\Delta$ von $ABC$ dadurch erzeugen, dass man aus dem Pole $O$, liege er nun innerhalb oder ausserhalb desselben, einen Radiusvector zieht, und diesen um $O$, nöthigenfalls verlängert, so dreht, dass er successiv die Seiten $AB$, $BC$, $CA$ durchläuft und hierdurch die Dreiecke $OAB$, $OBC$, $OCA$ beschreibt, zuletzt also in seine anfängliche Lage zurückkehrt. Bleibt nun der Sinn der Drehung in allen drei Dreiecken derselbe, so sind alle drei als positiv anzusehen und ist ihre Summe die Fläche von $ABC$. Dies findet statt, wenn der Pol innerhalb des Dreiecks liegt. Ist aber der Sinn der Drehung bei der Beschreibung des zweiten oder dritten Dreiecks, oder beider, dem im ersten Dreieck entgegengesetzt, so sind die Flächen dieser Dreiecke als negativ anzusehen, wenn man die des ersten als positiv nimmt, und ist dann die algebraische Summe der so bezeichneten Flächen $\Delta'$, $\Delta''$, $\Delta'''$ die Fläche von $ABC$. Sei demnach zuerst $\Delta = \Delta' + \Delta'' - \Delta'''$, folglich $\Delta + \Delta''' = \Delta' + \Delta''$, wo das Gleichheitszeichen offenbar Congruenz anzeigt, so müssen auch die mittleren Radien beider Summen von Flächen aus dem gemeinsamen Pol $O$ gleich sein. Diese sind aber nach 15) resp. $\frac{\Delta r_2 + \Delta''' r_2'''}{\Delta + \Delta'''}$ und $\frac{\Delta' r_2' + \Delta'' r_2''}{\Delta' + \Delta''}$. Da nun die Nenner beider Ausdrücke gleich sind, so folgt aus der Gleichheit dieser mittleren Radien

$$r_2 = \frac{\Delta' r_2' + \Delta'' r_2'' - \Delta''' r_2'''}{\Delta}.$$

Sei zweitens $\Delta = \Delta' - \Delta'' - \Delta'''$, also $\Delta + \Delta' + \Delta'' = \Delta'$, so ist nach 16) der mittlere Radius der Fläche, welche der linke Theil dieser Gleichung ausdrückt, $\frac{\Delta r_2 + \Delta'' r_2'' + \Delta''' r_2'''}{\Delta + \Delta'' + \Delta'''}$, der von $\Delta'$ aber $r_2' = \frac{\Delta' r_2'}{\Delta'}$; folglich durch Gleichsetzung beider, vermöge der Gleichheit der Nenner,

$$r_2 = \frac{\Delta' r_2' - \Delta'' r_2'' - \Delta''' r_2'''}{\Delta}.$$

Hieraus erhellt nun, dass die Formel $r_2 = \frac{\Delta' r_2' + \Delta'' r_2'' + \Delta''' r_2'''}{\Delta}$, mithin auch die aus ihr abgeleitete unter II), bei jeder Lage des Pols anwendbar ist, wofern man nur den Flächen $\Delta'$, $\Delta''$, $\Delta'''$ ihre dieser Lage entsprechenden Zeichen giebt*). Liegt der Pol auf einer der Seiten von $ABC$, also entweder auf $a$ oder $b$ oder $c$, so wird resp. $\Delta'$ oder $\Delta''$ oder $\Delta''' = 0$.

Durch die vorstehenden Formeln kann nun auch die allgemeinere Aufgabe: den mittleren Radius des Umfangs und Inhalts einer beliebigen $n$-seitigen geradlinigen Figur aus jedem in ihrer Ebene liegenden Pole zu finden, als im Wesentlichen gelöst betrachtet werden. Denn die Fläche jeder solchen Figur wird immer durch die algebraische Summe von $n$ entweder durchaus positiven oder zum Theil negativen Flächen von Dreiecken ausgedrückt werden, deren Grundlinien die Seiten der Figur sind, und deren Spitzen im Pol zusammenfallen. Da nun die mittleren Radien der Umfänge und Inhalte aller dieser Dreiecke sich finden lassen, so kann hieraus durch Anwendung der Formel 17) auch immer der mittlere Radius der ganzen $n$-seitigen Figur bestimmt werden.

## 7.

Werde gesucht der mittlere Radius $r_1$ des Umfangs eines Kreises vom Halbmesser $a$ aus einem in der Ebene desselben liegenden Pol, dessen Abstand vom Mittelpunkte desselben $= c$ ist.

Sei $\varphi$ der Winkel, welchen der nach einem beliebigen Punkt des Kreisumfangs gezogene Halbmesser mit demjenigen Halbmesser macht, auf dem, oder auf dessen Verlängerung der Pol liegt, so ist in Formel 1) der aus dem Pol nach demselben Punkt gezogene Vector

$$r = \sqrt{a^2 + c^2 - 2ac\cos\varphi}, \text{ und } ds = a\,d\varphi;$$

daher, da für den halben Kreisumfang $s = \pi a$,

$$\pi r_1 = \int_0^\pi d\varphi \sqrt{a^2 + c^2 - 2ac\cos\varphi}$$

$$= 2(a+c)\int_0^\pi d.\tfrac{1}{2}\varphi \sqrt{1 - \frac{4ac}{(a+c)^2}\cos^2\tfrac{1}{2}\varphi},$$

oder, wenn $\frac{1}{2}\varphi = \psi$ gesetzt wird,

---

*) Grunert hat zwar ähnliche Formeln wie die vorstehenden aufgestellt, dabei aber die verschiedenen Lagen, die der Pol haben kann, nicht erörtert. Es versteht sich übrigens von selbst, dass diese Formeln durch Zugrundelegung anderer Bestimmungsstücke des Dreiecks und seiner Lage gegen den Pol mannigfach transformirt werden können, was zu verfolgen jedoch nicht in unserer Aufgabe liegt.

$$\pi r_1 = 2(a+c)\int_0^{\frac{1}{2}\pi} d\psi \sqrt{1 - \frac{4ac}{(a+c)^2}\cos^2\psi}.$$

Dieser Ausdruck von $\pi r_1$ bezeichnet aber, da immer $\frac{4ac}{(a+c)^2} < 1$, den halben Umfang einer Ellipse, deren halbe grosse Achse $= a + c$, deren Excentricität $= 2\sqrt{ac}$, folglich deren halbe kleine Achse, jenachdem $c \lessgtr a$, $= \pm(a-c)$ ist. Es ist daher der mittlere Radius des Kreisumfangs aus einem beliebigen in der Ebene des Kreises liegenden Pol der Halbmesser eines Kreises, dessen Umfang gleich ist dem Umfang einer Ellipse, deren halbe Achsen die Abstände des Pols von den beiden Scheiteln desjenigen Kreisdurchmessers sind, in dem oder in dessen Verlängerung der Pol liegt.

Für $c = a$ wird $\pi r_1 = 4a$. Liegt also der Pol im Umfang des Kreises, so ist der mittlere Radius des Umfangs der Halbmesser desjenigen Kreises, dessen Umfang gleich dem vierfachen Durchmesser des gegebenen Kreises ist. In der That stellt dann dieser letztere den Umfang der Ellipse dar, deren halbe Achse $= 2a$, und deren halbe kleine Achse verschwindend klein ist.

Für $c = 0$ giebt die Formel, wie es sein muss, $r_1 = a$.

Der Flächeninhalt der obigen Ellipse ist, jenachdem $c \lessgtr a$, $= \pm\pi(a^2 - c^2)$, also gleich der Ringfläche, welche zwischen dem Umfang des gegebenen und dem eines concentrischen Kreises enthalten ist, der den Abstand des Pols vom Mittelpunkte des gegebenen zum Halbmesser hat.

## 8.

Nicht ebenso einfach ist die Lösung der Aufgabe: den mittleren Radius $r_2$ des Inhalts des Kreises vom Halbmesser $a$ aus einem in seiner Ebene liegenden Pol, dessen Abstand vom Mittelpunkt $= c$, zu bestimmen.

1) Liege der Pol innerhalb des Kreises, so dass also $c < a$, und sei derselbe der Anfang der polaren Coordinaten $r$, $\varphi$ der im Kreise liegenden Punkte; die Ache, auf welche sich $\varphi$ bezieht, sei der Halbmesser, in welchem der Pol liegt, in der Richtung von der Peripherie zum Centrum genommen. Dann ist nach Formel 6)

$$s r_1 = \frac{1}{3}\int_0^{\pi} f(\varphi)^3 d\varphi,$$

wo $s = \frac{1}{2}\pi a^2$ die halbe Kreisfläche und $f(\varphi)$ der Vector des Kreises aus dem Pol, also, wie man ohne Mühe findet,

$$f(\varphi) = c\cos\varphi \pm a\sqrt{1 - \frac{c^2}{a^2}\sin^2\varphi}.$$

Hieraus folgt, wenn man zur Abkürzung

$$\sqrt{1-\frac{c^2}{a^2}\sin^2\varphi}=\varDelta$$

setzt und nur das Zeichen $+$ berücksichtigt,

$$\tfrac{1}{3}\int f(\varphi)^3\,d\varphi=\tfrac{1}{3}c^3\int\cos^3\varphi\,d\varphi+ac^2\int\varDelta\cos^2\varphi\,d\varphi+a^2c\int\varDelta^2\cos\varphi\,d\varphi+\tfrac{1}{3}a^3\int\varDelta^3 d\varphi.$$

Es ist aber

$$\int\cos^3\varphi\,d\varphi=\sin\varphi-\tfrac{1}{3}\sin^3\varphi;$$

$$\int\varDelta\cos^2\varphi\,d\varphi=\int\left(1-\frac{c^2}{a^2}\sin^2\varphi\right)(1-\sin^2\varphi)\frac{d\varphi}{\varDelta}$$

$$=\int\frac{d\varphi}{\varDelta}-\left(\frac{a^2+c^2}{a^2}\right)\int\frac{\sin^2\varphi\,d\varphi}{\varDelta}+\frac{c^2}{a^2}\int\frac{\sin^4\varphi\,d\varphi}{\varDelta};$$

$$\int\varDelta^2\cos\varphi\,d\varphi=\sin\varphi-\tfrac{1}{3}\frac{c^2}{a^2}\sin^3\varphi;$$

$$\int\varDelta^3\,d\varphi=\int\left(1-\frac{c^2}{a^2}\sin^2\varphi\right)^2\frac{d\varphi}{\varDelta}$$

$$=\int\frac{d\varphi}{\varDelta}-2\frac{c^2}{a^2}\int\frac{\sin^2\varphi\,d\varphi}{\varDelta}+\frac{c^4}{a^4}\int\frac{\sin^4\varphi\,d\varphi}{\varDelta}.$$

Hieraus folgt zunächst

$$\tfrac{1}{3}\int f(\varphi)^3\,d\varphi=\tfrac{1}{3}c\,(3a^2+c^2)\sin\varphi-\tfrac{4}{9}c^3\sin^3\varphi$$

$$+\tfrac{1}{3}a\,(a^2+3c^2)\int\frac{d\varphi}{\varDelta}-\tfrac{1}{3}\frac{c^2}{a}(5a^2+3c^2)\int\frac{\sin^2\varphi\,d\varphi}{\varDelta}+\tfrac{4}{3}\frac{c^4}{a}\int\frac{\sin^4\varphi\,d\varphi}{\varDelta}.$$

Es ist aber

$$\int\frac{\sin^2\varphi\,d\varphi}{\varDelta}=\frac{a^2}{c^2}\int\frac{d\varphi}{\varDelta}-\frac{a^2}{c^2}\int\varDelta\,d\varphi,$$

$$\int\frac{\sin^4\varphi\,d\varphi}{\varDelta}=\tfrac{1}{3}\frac{a^2}{c^2}\varDelta\cos\varphi\sin\varphi+\tfrac{1}{3}\frac{a^2(2a^2+c^2)}{c^4}\int\frac{d\varphi}{\varDelta}-\frac{2a^2}{3}\left(\frac{a^2+c^2}{c^4}\right)\int\varDelta\,d\varphi.$$

Durch Substitution dieser Ausdrücke wird daher

$$\tfrac{1}{3}\int f(\varphi)^3\,d\varphi=\tfrac{1}{3}(a^2+c^2)\,c\sin\varphi+\tfrac{4}{9}(a\varDelta\cos\varphi-c\sin^2\varphi)\,c^2\sin\varphi$$

$$+\tfrac{1}{9}a\,(7a^2+c^2)\int\varDelta d\varphi-\tfrac{4}{9}a\,(a^2-c^2)\int\frac{d\varphi}{\varDelta}.$$

Nimmt man dieses Integral von $\varphi=0$ bis $\varphi=\pi$ und dividirt durch $s=\frac{1}{2}\pi a^2$, so erhält man, da

$$\int_0^{\pi}\varDelta\,d\varphi=2\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\varDelta\,d\varphi=2E^1\left(\frac{c}{a}\right),\ \text{und}\int_0^{\pi}\frac{d\varphi}{\varDelta}=2\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\frac{d\varphi}{\varDelta}=2F^1\left(\frac{c}{a}\right),$$

$$\text{I)}\qquad r_2=\frac{4}{9\pi}\left[\left(\frac{7a^2+c^2}{a}\right)E^1\left(\frac{c}{a}\right)-4\left(\frac{a^2-c^2}{a}\right)F^1\left(\frac{c}{a}\right)\right].$$

Für $c=a$ wird $f(\varphi)=2a\cos\varphi$, daher

$$\tfrac{1}{3}\int f(\varphi)^3\,d\varphi=\frac{8a^3}{3}(\sin\varphi-\tfrac{1}{3}\sin^3\varphi)!$$

Es kann aber in diesem Falle, da der Pol im Umfange des Kreises liegt, $\varphi$ die Grenze $\frac{1}{2}\pi$ nicht überschreiten, daher wird

$$s r_2 = \frac{1}{3}\int_0^{\frac{1}{2}\pi} f(\varphi)^3 d\varphi = \frac{16}{9} a^3; \text{ folglich } r_2 = \frac{32 a}{9\pi};$$

ein Resultat, das auch die vorstehende Formel I) giebt.

Für $c = 0$ wird $r_2 = \frac{2}{3} a$, was auch schon aus Art. 5 folgt, da man die Kreisfläche als ein Dreieck betrachten kann, dessen Basis gleich dem Umfang und dessen Höhe gleich dem Halbmesser des Kreises ist.

2) Liege der Pol ausserhalb des Kreises, so kann in der Gleichung des Kreises

$$f(\varphi) = c \cos\varphi \pm a \sqrt{1 - \frac{c^2}{a^2}\sin^2\varphi},$$

da jetzt $c > a$, der Werth von $\sin^2\varphi$ nicht grösser als $\frac{a^2}{c^2}$ werden. Es muss aber hier die Formel 7) in Anwendung kommen, in der

$$s = \frac{1}{2}\pi a^2, \quad \alpha = 0, \quad \beta = arc \sin \frac{a}{c},$$

$$f_2(\varphi) = c \cos\varphi + \sqrt{a^2 - c^2 \sin^2\varphi}, \quad f_1(\varphi) = c \cos\varphi - \sqrt{a^2 - c^2\sin^2\varphi}$$

zu setzen ist. Hierdurch erhält man

$$r_2 = \frac{2}{3\pi a^2}\int_0^{arc \sin \frac{a}{c}} [(c\cos\varphi + \sqrt{a^2 - c^2\sin^2\varphi})^3 - (c\cos\varphi - \sqrt{a^2 - c^2\sin^2\varphi})^3]\, d\varphi$$

$$= \frac{4(a^2 + 3c^2)}{3\pi a^2}\int_0^{arc \sin \frac{a}{c}} d\varphi \sqrt{a^2 - c^2\sin^2\varphi} - \frac{16 c^2}{3\pi a^2}\int_0^{arc \sin \frac{a}{c}} \sin^2\varphi\, d\varphi \sqrt{a^2 - c^2\sin^2\varphi}.$$

Man setze $c \sin\varphi = a \sin\psi$ und $\sqrt{1 - \frac{a^2}{c^2}\sin^2\psi} = \Delta'$, so wird

$$(a^2 + 3c^2)\int d\varphi \sqrt{a^2 - c^2\sin^2\varphi} = \frac{a^2(a^2 + 3c^2)}{c}\int\frac{d\psi}{\Delta'} - \frac{a^2(a^2+3c^2)}{c}\int\frac{\sin^2\psi d\psi}{\Delta'}$$

$$4c^2\int \sin^2\varphi\, d\varphi \sqrt{a^2 - c^2\sin^2\varphi} = \frac{4a^4}{c}\int\frac{\sin^2\psi\, d\psi}{\Delta'} - \frac{4a^4}{c}\int\frac{\sin^4\psi\, d\psi}{\Delta'}.$$

Zieht man dieses Integral von dem vorhergehenden ab, so erhält man die Differenz

$$\frac{a^2(a^2 + 3c^2)}{c}\int\frac{d\psi}{\Delta'} - \frac{a^2(5a^2+3c^2)}{c}\int\frac{\sin^2\psi\, d\psi}{\Delta'} + \frac{4a^4}{c}\int\frac{\sin^4\psi\, d\psi}{\Delta'}.$$

Reducirt man auf ähnliche Weise wie im ersten Theile dieser Aufgabe die Integrale, so wird hieraus

$$\frac{4}{3} a^2 c \Delta' \cos\psi \sin\psi + \frac{1}{3} c(7a^2 + c^2)\int\Delta' d\psi + \left[\frac{4a^4 - (a^2 + c^2)^2}{3c}\right]\int\frac{d\psi}{\Delta'}.$$

Dieser Ausdruck ist zwischen den den Grenzwerthen $\varphi = 0$, $\varphi = arc\sin\frac{a}{c}$ entsprechenden Grenzen $\psi = 0$, $\psi = \frac{1}{2}\pi$ zu nehmen und vermöge des obigen Ausdrucks für $r_2$, dann noch mit $\frac{4}{3\pi a^2}$ zu multipliciren. Man erhält hierdurch

$$\text{II)} \quad r_2 = \frac{4}{9\pi}\left\{\frac{c\,(7a^2 + c^2)}{a^2}E^1\left(\frac{a}{c}\right) - \frac{[(a^2 + c^2)^2 - 4a^4]}{a^2 c}F^1\left(\frac{a}{c}\right)\right\}.$$

Für $c = a$ geht auch dieser Ausdruck in den schon gefundenen $r_2 = \frac{32a}{9\pi}$ über.

## 9.

Wenn in Art. 7 die Bestimmung des mittleren Radius des Kreisumfangs auf die Rectification der Ellipse zurückgeführt worden ist, so kann auch umgekehrt die Länge eines elliptischen Bogens mittelst des Kreises durch Construction oder Rechnung mit beliebiger Schärfe annähernd bestimmt werden. Sei nämlich $r_1$ der mittlere Radius des Kreisbogens $a\,(\varphi_1 - \varphi_0)$, welcher dem Winkel entspricht, dessen Schenkel mit dem Halbmesser, auf dem der Pol in dem Abstande $c$ vom Mittelpunkt liegt, die Winkel $\varphi_0$, $\varphi_1$ machen, so findet sich ganz auf dieselbe Weise wie in Art. 7

$$r_1 = \frac{a + c}{\frac{1}{2}(\varphi_1 - \varphi_0)}\int_{\frac{1}{2}\varphi_0}^{\frac{1}{2}\varphi_1} d\psi\,\sqrt{1 - \varepsilon^2\cos^2\psi},$$

wo, wie dort, wieder $\psi = \frac{1}{2}\varphi$ und zur Abkürzung $\varepsilon^2 = \frac{4ac}{(a + c)^2}$ gesetzt ist und $\varphi_0$, $\varphi_1$ in Theilen der Maasseinheit ausgedrückt zu denken sind.

Setzt man $\frac{1}{2}\varphi_0 = \psi_0$ und $\frac{1}{2}\varphi_1 = \psi_1$, so wird

$$r_1 = \frac{a + c}{\psi_1 - \psi_0}\int_{\psi_0}^{\psi_1} d\psi\,\sqrt{1 - \varepsilon^2\cos^2\psi},$$

und ist nun $r_1$ der mittlere Radius des Bogens $2a\,(\psi_1 - \psi_0)$ desselben Kreises aus demselben Pole wie zuvor. Setzt man endlich $a + c = \alpha$ und $a - c = \beta$, wodurch $\varepsilon^2 = \frac{\alpha^2 - \beta^2}{\alpha^2}$ wird, so erhält man

$$\text{I)} \qquad \alpha\int_{\psi_0}^{\psi_1} d\psi\,\sqrt{1 - \varepsilon^2\cos^2\psi} = r_1\,(\psi_1 - \psi_0).$$

Diese Formel zeigt, dass der Bogen einer Ellipse, deren grosse und kleine Achse $2\alpha$, $2\beta$, welcher durch die Amplituden $\frac{1}{2}\pi - \psi_0$, $\frac{1}{2}\pi - \psi_1$, oder astronomisch ausgedrückt, durch die excentrischen Anomalien $\psi_0$, $\psi_1$ gegeben ist, gleich ist dem Bogen eines Kreises, der dem Mittelpunktswinkel $\psi_1 - \psi_0$ entspricht und mit einem Halbmesser $r_1$ beschrieben wird, der

sich durch folgende Construction finden lässt. Man beschreibe mit einem Halbmesser, welcher gleich der halben Summe der halben Achsen der Ellipse, also $= \frac{1}{2}(\alpha + \beta)$ ist, einen Kreis, nehme auf einem beliebigen Halbmesser desselben in einer Entfernung, welche gleich der halben Differenz der halben Achsen der Ellipse, also $= \frac{1}{2}(\alpha - \beta)$ ist, einen festen Punkt als Pol an, ziehe sodann einen zweiten und dritten Halbmesser, welche mit dem ersten die Winkel $2\psi_0$, $2\psi_1$ bilden, daher auf dem Kreisumfang einen Bogen abschneiden, dem der Mittelpunktswinkel $2(\psi_1 - \psi_0)$ entspricht. Man theile diesen Bogen in $n$ gleiche Theile und ziehe nach den Theilpunkten, sowie nach dem Anfangspunkt des Bogens aus dem Pole, Radien, setze dieselben in gerader Linie an einander und nehme den $n$ten Theil dieser Summe der Radien, so ist dieser um so näher der mittlere Radius des Bogens, je grösser $n$. Beschreibt man nun mit diesem mittleren Radius aus dem Mittelpunkte des Kreises zwischen den Schenkeln des Winkels $2(\psi_1 - \psi_0)$ einen Kreisbogen und halbirt denselben, so hat man die genäherte Länge des gegebenen elliptischen Bogens.

Ebenso einfach erhält man einen genäherten Werth desselben durch Rechnung. Sei nämlich $\frac{2(\psi_1 - \psi_0)}{n} = 2\delta$, so machen die nach dem 1sten, 2ten, 3ten, $k$-ten Theilpunkt des Kreisbogens gezogenen Halbmesser mit dem Halbmesser, auf welchem der Pol liegt, der Reihe nach die Winkel

$$2(\psi_0 + \delta), \quad 2(\psi_0 + 2\delta), \quad 2(\psi_0 + 3\delta) \ldots 2(\psi_0 + k\delta).$$

Bezeichnen wir nun die nach diesen Theilpunkten aus dem Pol gezogenen Radien der Reihe nach durch $r'$, $r''$, $r'''$, $\ldots r^{(k)}$, so ist

$$r^{(k)} = \sqrt{\tfrac{1}{4}(\alpha + \beta)^2 + \tfrac{1}{4}(\alpha - \beta)^2 - \tfrac{1}{2}(\alpha^2 - \beta^2)\cos 2(\psi_0 + k\delta)},$$

was sich, da $\alpha^2 - \beta^2 = \alpha^2 \varepsilon^2$, auf

$$r^{(k)} = \alpha\sqrt{1 - \varepsilon^2 \cos^2(\psi_0 + k\delta)}$$

reducirt. Setzt man nun successiv $k = 1, 2, 3, \ldots n$, so ist durch diese Formel näherungsweise gegeben

$$\alpha \int_{\psi}^{\psi_0} d\psi \sqrt{1 - \varepsilon^2 \cos^2\psi} = r_1(\psi_1 - \psi_0) = (\psi_1 - \psi_0)\left(\frac{r' + r'' + r''' + \ldots + r^{(n)}}{n}\right).$$

Führt man noch den Hilfswinkel $\vartheta^{(k)}$ ein, indem man setzt

$$\varepsilon \cos(\psi_0 + k\delta) = \cos \vartheta^{(k)},$$

woraus folgt

$$r^{(k)} = \alpha \sin \vartheta^{(k)},$$

so wird

$$\text{II)} \quad \alpha \int_{\psi_0}^{\psi_1} d\psi \sqrt{1 - \varepsilon^2 \cos^2\psi} = \alpha(\psi_1 - \psi_0)\left(\frac{\sin\vartheta' + \sin\vartheta'' + \ldots + \sin\vartheta^{(n)}}{n}\right).$$

Offenbar kann man in der Construction wie in der Rechnung statt des Mittels aus den Radien $r'$, $r''$, $\ldots r^{(n-1)}$ der Theilpunkte und dem Radius $r^{(n)}$

des Endpunkts des Bogens auch das aus jenen Radien und dem Radius $r^0$ des Anfangspunktes nehmen, wodurch der genäherte Ausdruck des elliptischen Bogens, wenn $\varepsilon \cos\psi_0 = \cos\vartheta^0$, wird

$$\alpha(\psi_1 - \psi_0)\left(\frac{\sin\vartheta^0 + \sin\vartheta' + \sin\vartheta'' + \ldots + \sin\vartheta^{(n-1)}}{n}\right).$$

Man kann endlich auch noch zwischen beiden Ausdrücken das Mittel nehmen, wodurch sich, mit gleichmässiger Berücksichtigung der Radien des Anfangs- und Endpunktes des Bogens, für seine Länge ergiebt

$$\alpha(\psi_1 - \psi_0)\left(\frac{\frac{1}{2}\sin\vartheta^0 + \sin\vartheta' + \sin\vartheta'' + \ldots + \sin\vartheta^{(n-1)} + \frac{1}{2}\sin\vartheta^{(n)}}{n}\right).$$

## 10.

Vorstehende Rectificationsmethode lässt sich noch weit einfacher und ganz unabhängig von dem in Art. 7 enthaltenen Satze ableiten. Da nämlich

$$d\psi = \lim\frac{\psi_1 - \psi_0}{n} = \lim\delta,$$

so ist unmittelbar klar, dass

$$\alpha\int_{\psi_0}^{\psi_1} d\psi\sqrt{1-\varepsilon^2\cos^2\psi} = (\psi_1 - \psi_0)\lim\sum_{k=1}^{k=n}\frac{\alpha\sqrt{1-\varepsilon^2\cos^2(\psi_0 + k\delta)}}{n},$$

woraus sofort, wenn man $\cos\vartheta^{(k)} = \varepsilon\cos(\psi_0 + k\delta)$ einführt, die Formel II) im vorigen Artikel folgt. Man kann hieraus nun auch rückwärts die dort angegebene Construction ableiten, wenn man bemerkt, dass

$$\alpha\sqrt{1-\varepsilon^2\cos^2(\psi_0 + k\delta)} = \sqrt{\tfrac{1}{4}(\alpha+\beta)^2 + \tfrac{1}{4}(\alpha-\beta)^2 - \tfrac{1}{2}(\alpha^2-\beta^2)\cos 2(\psi_0 + k\delta)}.$$

Die obige Formel hat aber auch noch einen andern Sinn. In derselben ist nämlich $\alpha\sqrt{1-\varepsilon^2\cos^2(\psi_0 + k\delta)}$ derjenige Halbmesser der Ellipse, welcher dem Halbmesser derselben conjugirt ist, der durch das Complement der Amplitude oder die excentrische Anomalie $\psi_0 + k\delta$ bestimmt wird. Denn dieser letztere ist $\sqrt{1-\varepsilon^2\sin^2(\psi_0 + k\delta)}$. Sein conjugirter Halbmesser wird erhalten, wenn man sein Quadrat von $\alpha^2 + \beta^2$ subtrahirt und aus dem Reste die Wurzel zieht, was den vorstehenden Ausdruck giebt. Hiernach führt nun die obige erste Formel auch auf folgenden Satz: *Die Länge des durch die excentrischen Anomalien $\psi_0$, $\psi_1$ seiner Endpunkte bestimmten Bogens einer Ellipse ist gleich der Länge eines Kreisbogens, der dem Mittelpunktswinkel $\psi_1 - \psi_0$ entspricht und mit einem Halbmesser beschrieben wird, welcher das Mittel von allen den Halbmessern der Ellipse ist, die denjenigen Halbmessern des zu rectificirenden Bogens derselben conjugirt sind, welche bei gleichförmiger und stetiger Aenderung der Anomalie aufeinander folgen.*

Da jeder Halbmesser der Ellipse parallel ist der Berührenden am Endpunkte seines conjugirten Halbmessers, so gehören im vorstehenden Satze

die Halbmesser, aus denen das Mittel zu nehmen ist, einem Bogen, der von zwei Halbmessern abgeschnitten wird, die den Berührenden des Anfangs- und Endpunktes des zu rectificirenden Bogens parallel sind. Es wird jedoch vielleicht nicht überflüssig sein, zu bemerken, dass jenes Mittel keineswegs der mittlere Halbmesser dieses elliptischen Bogens ist, da durch die Theilung der Differenz der Anomalien der Endpunkte des gegebenen Bogens in $n$ gleiche Theile weder dieser selbst noch jener, den die Halbmesser abschneiden, welche den Berührenden seiner Endpunkte parallel sind, in $n$ gleiche Theile getheilt wird, wie es der Begriff des „mittleren Radius" fordert. Der Satz selbst ist nicht neu, sondern auf anderem Wege schon von Grunert gefunden*); die im vorigen Artikel enthaltene Construction der Länge des elliptischen Bogens mittelst des Kreises ist jedoch hier hinzugekommen.

Grunert, der den Satz durch Betrachtung von Polygonen erhält, die sich in und um die Ellipse beschreiben lassen, giebt auch (a. a. O. mit Bezugnahme auf eine frühere Abhandlung) Grenzen an, zwischen welche für jedes endliche $n$ die wahre Länge des elliptischen Bogens fällt. Da sie sich ohne grosse Vorbereitung ergeben und durch sie der Satz eine Ergänzung erhält, so möge ihre Ableitung hier noch eine Stelle finden.

Sei $s$ ein Bogen der Ellipse, dessen Endpunkte durch die den Hauptachsen $2\alpha$, $2\beta$ parallelen rechtwinkligen Coordinaten aus dem Mittelpunkte $x_0$, $y_0$ und $x_1$, $y_1$ gegeben sind, so ist, wenn $\sigma$ die Sehne dieses Bogens,

$$s > \sigma \text{ und } \sigma^2 = (x_0 - x_1)^2 + (y_0 - y_1)^2.$$

Sind nun $u_0$, $u_1$ die excentrischen Anomalien der beiden Endpunkte von $s$, so ist

$$x_0 = \alpha \cos u_0, \quad y_0 = \beta \sin u_0, \quad x_1 = \alpha \cos u_1, \quad y_1 = \alpha \sin u_1.$$

Hieraus folgt, wenn wie zuvor $\alpha^2 - \beta^2 = \alpha^2 \varepsilon^2$,

$$\sigma^2 = 4a^2 [1 - \varepsilon^2 \cos^2 \tfrac{1}{2} (u_0 - u_1)] \sin^2 \tfrac{1}{2} (u_0 - u_0),$$

oder, wenn man $\alpha^2 [1 - \varepsilon^2 \cos^2 \frac{1}{2} (u_0 + u_1)] = \varrho^2$ setzt, wo nach dem Obigen $\varrho$ den Halbmesser der Ellipse bedeutet, der der Berührenden an demjenigen Punkte parallel ist, dessen excentrische Anomalie $= \frac{1}{2} (u_0 + u_1)$, also das Mittel aus den Anomalien der Endpunkte des Bogens,

$$\sigma = 2\varrho \sin \tfrac{1}{2} (u_0 - u_1).$$

Es ist also erstens

$$\text{I)} \qquad s > 2\varrho \sin \tfrac{1}{2} (u_0 - u_1).$$

Zieht man ferner an die Endpunkte des elliptischen Bogens die Berührenden, bezeichnet die Coordinaten ihres Durchschnitts durch $x'$, $y'$ und die zwischen diesem Durchschnitt und den Berührungspunkten enthaltenen Abschnitte der beiden Berührenden durch $p_0$, $p_1$, so ist

$$s < p_0 + p_1$$

und

*) Archiv, Bd. 30, S. 213.

$$p_0^2 = (x' - x_0)^2 + (y' - y_0)^2, \quad p_1^2 = (x' - x_0)^2 + (y' - y_0)^2.$$

Es sind aber die Gleichungen der beiden Berührenden

$$y' - y_0 = -\frac{\beta^2 x_0}{\alpha^2 y_0}(x' - x_0) = -\frac{\beta}{\alpha} \cot u_0 \,.\, (x' - x_0),$$

$$y' - y_1 = -\frac{\beta^2 x_1}{\alpha^2 y_1}(x' - x_1) = -\frac{\beta}{\alpha} \cot u_1 \,.\, (x' - x_1).$$

Eliminirt man nach diesen beiden Gleichungen $y'$, so erhält man nach gehöriger Reduction

$$x' - x_0 = \alpha \sin u_0 \tang \tfrac{1}{2}(u_0 - u_1), \quad x' - x_1 = \alpha \sin u_1 \tang \tfrac{1}{2}(u_0 - u_1).$$

Hieraus folgt

$$p_0^2 = (\alpha^2 \sin^2 u_0 + \beta^2 \cos^2 u_0) \tang^2 \tfrac{1}{2}(u_0 - u_1),$$
$$p_1^2 = (\alpha^2 \sin^2 u_1 + \beta^2 \cos^2 u_1) \tang^2 \tfrac{1}{2}(u_0 - u_1),$$

oder

$$p_0 = \varrho_0 \tang \tfrac{1}{2}(u_0 - u_1), \quad p_1 = \varrho_1 \tang \tfrac{1}{2}(u_0 - u_1),$$

wo $\varrho_0$, $\varrho_1$ die den Berührenden am Anfangs- und Endpunkte von $s$ parallelen Halbmesser der Ellipse bedeuten.

Es ist also zweitens

II) $$s < (\varrho_0 + \varrho_1) \tang \tfrac{1}{2}(u_0 - u_1).$$

Theilt man nun die Differenz $\psi_1 - \psi_0$ der excentrischen Anomalien, durch die ein zu rectificirender elliptischer Bogen $S(\psi_0, \psi_1)$ bestimmt ist, in $n$ gleiche Theile $\frac{\psi_1 - \psi_0}{n} = \delta$, wodurch der Bogen in $n$ Theile $s', s'', \ldots s^{(n)}$ zerlegt wird, die nicht gleich sind, bezeichnet ferner die Halbmesser der Ellipse, welche den Berührenden an den durch die Anomalien $\psi_0$, $\psi_0 + \delta$, $\psi_0 + 2\delta, \ldots \psi_0 + (n-1)\delta$, $\psi_1$ bestimmten Punkten parallel sind, der Reihe nach durch $r^0, r', r'' \ldots r^{(n-1)}, r^{(n)}$, so giebt die Anwendung der Formel II) auf die Bogentheile $s', s'', \ldots s^{(n)}$, deren Summe $= S(\psi_0, \psi_1)$, wenn man in derselben $u_0 - u_1 = \delta$ setzt, ferner successiv $\varrho_0$ mit $r^0, r' \ldots r^{(n-1)}$ und $\varrho_1$ mit $r', r'', \ldots r^{(n)}$ vertauscht, endlich die sämmtlichen hierdurch sich ergebenden Ungleichungen addirt,

$$S(\psi_0, \psi_1) < 2\left\{\tfrac{1}{2} r^0 + r^0 + r'' + \ldots + r^{(n-1)} + \tfrac{1}{2} r^{(n)}\right\} \tang \tfrac{1}{2}\delta.$$

Auf gleiche Weise giebt die Anwendung der Formel I), wenn man die Halbmesser, welche den Berührenden an den durch die Anomalien $\psi_0 + \frac{1}{2}\delta$, $\psi_0 + \frac{3}{2}\delta$, $\psi_0 + \frac{5}{2}\delta, \ldots \psi_0 + \left(\frac{2k-1}{2}\right)\delta$ bestimmten Punkten parallel sind, der Reihe nach durch $\varrho', \varrho'', \varrho''' \ldots \varrho^{(n)}$ bezeichnet,

$$S(\psi_0, \psi_1) > 2\left\{\varrho' + \varrho'' + \varrho''' + \ldots + \varrho^{(n)}\right\} \sin \tfrac{1}{2}\delta.$$

Man kann diese beiden Ungleichungen auch schreiben

III) $$\begin{cases} S(\psi_0, \psi_1) < (\psi_1 - \psi_0)\left(\dfrac{r' + r'' + \ldots + r^{(n)}}{n}\right)\dfrac{tg\,\frac{1}{2}\delta}{\frac{1}{2}\delta} - (\psi_1 - \psi_0)\left(\dfrac{r^{(n)} - r^0}{2n}\right)\dfrac{tg\,\frac{1}{2}\delta}{\frac{1}{2}\delta}, \\ S(\psi_0, \psi_1) > (\psi_1 - \psi_0)\left(\dfrac{r' + r'' + \ldots + r^{(n)}}{n}\right)\dfrac{\sin \frac{1}{2}\delta}{\frac{1}{2}\delta}, \end{cases}$$

welche Formeln mit den von Grunert gefundenen übereinstimmen. Da, wenn $n$ ins Unendliche wächst, $\varrho'$, $\varrho''$ ... der Reihe nach mit $r'$, $r''$ ... zusammenfallen, so nähern sich dann beide Werthe, zwischen denen $S(\psi_0, \psi_1)$ liegt, einer gemeinschaftlichen Grenze und wird

$$S(\psi_0, \psi_1) = lim\,(\psi_1 - \psi_0)\left(\frac{r' + r'' + \ldots + r^{(n)}}{n}\right),$$

## 11.

Werde gesucht: 1) der mittlere Halbmesser $r_1$ der Ellipse, deren Achsen $2a$, $2b$ und 2) der mittlere Radius $r_2$ ihres Inhalts.

1) Wenn $r$ der zu der Amplitude $\psi$ gehörige Halbmesser, $s$ der durch $\psi = \frac{1}{2}\pi$ und $\psi = \psi$ bestimmte Bogen der Ellipse, und $a^2 - b^2 = a^2 c^2$, so ist

$$r = a\sqrt{1 - c^2 \cos^2 \psi}, \quad ds = a\,d\psi \sqrt{1 - c^2 \sin^2 \psi},$$

folglich

$$\int r\,ds = a^2 \int d\psi \sqrt{(1 - \tfrac{1}{2}c^2)^2 - \tfrac{1}{4}c^4 \cos^2 2\psi},$$

oder, wenn man $2\psi = \frac{1}{2}\pi - \chi$ setzt,

$$\int r\,ds = -\tfrac{1}{4}a^2\,(2 - c^2)\int d\chi \sqrt{1 - \left(\frac{c^2}{2 - c^2}\right)^2 \sin^2 \chi},$$

welches Integral, zwischen den den Werthen $\psi = \frac{1}{2}\pi$ und $\psi = 0$ entsprechenden Grenzen $\chi = -\frac{1}{2}\pi$ und $\chi = \frac{1}{2}\pi$ genommen, giebt

$$-\tfrac{1}{2}a^2\,(2 - c^2)\int_0^{\frac{1}{2}\pi} d\chi \sqrt{1 - \left(\frac{c^2}{2 - c^2}\right)^2 \sin^2 \chi}.$$

Andererseits ist, zwischen denselben Grenzen genommen,

$$s = -a\int_0^{\frac{1}{2}\pi} d\psi \sqrt{1 - c^2 \sin^2 \psi},$$

folglich nach Formel 1) der gesuchte mittlere Halbmesser des Quadranten, daher auch des ganzen Umfangs der Ellipse,

$$\text{I)} \qquad r_1 = \frac{\tfrac{1}{2}a^2\,(2 - c^2)\,E^1\left(\frac{2 - c^2}{c^2}\right)}{a\,E^1(c)}.$$

In diesem Bruche bedeutet der Nenner die Länge des Quadranten der gegebenen Ellipse, der Zähler das Rechteck aus $a$ in die Länge des Quadranten einer Ellipse, deren halbe grosse Achse $= \frac{1}{2}a\,(2 - c^2) = \frac{a^2 + b^2}{2a}$, und deren halbe kleine Achse $= b$ ist. Bringt man daher in vorstehender Formel den Nenner auf die linke Seite des Gleichheitszeichens und multiplicirt auf beiden Seiten mit 4, so ergiebt sich der Satz: das Rechteck aus dem Umfang der gegebenen Ellipse in ihren mittleren Halb-

messer ist gleich dem Rechteck aus ihrer halben grossen Achse in den Umfang einer zweiten Ellipse, welche dieselbe kleine Achse wie die gegebene hat, deren grosse Achse aber $= a + \frac{b^2}{a}$, also um den halben Parameter der gegebenen Ellipse grösser ist als deren halbe grosse Achse. Errichtet man auf der Geraden, welche die Scheitel der beiden halben Achsen der gegebenen Ellipse verbindet, eine Senkrechte, so schneidet diese, genugsam verlängert, von ihrer grossen Achse ein Stück ab, welches die grosse Achse der vorgedachten zweiten Ellipse ist.

Ist $c$ so klein, dass seine höheren Potenzen vernachlässigt werden können, so wird

$$r_1 = a\left(1 - \tfrac{1}{4}c^2\right) = \tfrac{1}{2}(a + b).$$

2) Zur Auflösung des zweiten Theils der Aufgabe können wir uns der Formel 6) bedienen. Bezeichnet in ihr $f(\varphi)$ den Halbmesser der Ellipse, der mit der positiven Seite ihrer kleinen Achse den Winkel $\varphi$ macht, so ist

$$f(\varphi) = \frac{b}{\sqrt{1 - c^2 \sin^2 \varphi}},$$

folglich

$$\tfrac{1}{3}\int f(\varphi)^3 d\varphi = \tfrac{1}{3} b^3 \int \frac{d\varphi}{(1 - c^2 \sin^2 \varphi)\sqrt{1 - c^2 \sin^2 \varphi}} = \tfrac{1}{3} b^3 \Pi(-c^2, c, \varphi)$$

$$= \frac{b^3}{3(1 - c^2)} \left\{ E(c, \varphi) - c^2 \frac{\sin \varphi \cos \varphi}{\sqrt{1 - c^2 \sin^2 \varphi}} \right\}.$$

Andererseits ist

$$\tfrac{1}{2}\int f(\varphi)^2 d\varphi = \tfrac{1}{2} b^2 \int \frac{d\varphi}{1 - c^2 \sin^2 \varphi} = \tfrac{1}{4} b^2 \int \left( \frac{d\varphi}{1 + c \sin \varphi} + \frac{d\varphi}{1 - c \sin \varphi} \right)$$

$$= -\frac{b^2}{2\sqrt{1 - c^2}} \operatorname{arc\,tang} \left( \frac{\cot \varphi}{1 - c^2} \right).$$

Nimmt man beide Integrale von $\varphi = 0$ bis $\varphi = \frac{\pi}{2}$, so erhält man nach Formel 6):

$$r_2 = \frac{4 a E^1(c)}{3\pi}.$$

Da $\frac{2 a E^1(c)}{\pi}$ der Halbmesser eines Kreises, dessen Umfang dem Umfang der gegebenen Ellipse gleich ist, so führt die vorstehende Formel zu dem Satz: der mittlere Radius des Inhalts der Ellipse beträgt $\frac{2}{3}$ des Halbmessers des Kreises, dessen Umfang dem Umfang der Ellipse gleich ist.

## 12.

Sei zu finden der mittlere Radius 1) des Umfangs, 2) des Inhalts einer Ellipse, deren Achsen $2a$, $2b$, aus einem ihrer Brennpunkte.

1) Sei der Brennpunkt der Coordinatenanfang, so ist, wenn die Richtung von ihm aus nach dem Scheitel der halben grossen Achse, auf der er liegt, als die der positiven Abscissen angenommen und wieder $a^2 - b^2 = a^2c^2$ gesetzt wird, die Gleichung der Ellipse:

$$\left(\frac{ac+x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1.$$

Hieraus ergiebt sich für den Radiusvector der Werth

$$r = a - c\,(ac + x),$$

und für das Bogenelement

$$ds = dx \sqrt{\frac{a^2 - c^2\,(ac+x)^2}{a^2 - (ac+x)^2}}.$$

Setzt man $ac + x = a \sin\varphi$, was zulässig ist, da $ac + x$ die Grenzwerthe $a$ und $-a$ nicht überschreitet, so wird

$$r = a\,(1 - c \sin\varphi), \quad ds = a\,d\varphi \sqrt{1 - c^2 \sin^2\varphi};$$

daher

$$\int r\,ds = a^2 \int (1 - c \sin\varphi) \sqrt{1 - c^2 \sin^2\varphi} \,.\, d\varphi$$

$$= a^2 \int d\varphi \sqrt{1 - c^2 \sin^2\varphi} + \tfrac{1}{2} a^2 c \cos\varphi \sqrt{1 - c^2 \sin^2\varphi}$$

$$+ \tfrac{1}{2} a^2 (1 - c^2)\, lgn\left[c \cos\varphi + \sqrt{1 - c^2 \sin^2\varphi}\right].$$

Nimmt man dieses Integral zwischen den zu $x = -a\,(1 + c)$ und $x = a\,(1 + c)$ gehörigen Grenzen $\varphi = -\tfrac{1}{2}\pi$ und $\varphi = \tfrac{1}{2}\pi$, so erhält man

$$2a^2 \int_0^{\frac{1}{2}\pi} d\varphi \sqrt{1 - c^2 \sin^2\varphi},$$

folglich, da, zwischen denselben Grenzen genommen,

$$s = 2a \int_0^{\frac{1}{2}\pi} d\varphi \sqrt{1 - c^2 \sin^2\varphi},$$

$$\text{I)} \qquad r_1 = a.$$

D e r M i t t e l w e r t h a u s a l l e n V e c t o r e n d e r E l l i p s e i s t a l s o, b e i j e d e r E x c e n t r i c i t ä t, d e r h a l b e n g r o s s e n A c h s e, d. i. d e m M i t t e l a u s d e m k l e i n s t e n u n d g r ö s s t e n V e c t o r $a\,(1 - c)$ u n d $a\,(1 + c)$ g l e i c h. Die „mittlere Entfernung" der Planeten von der Sonne führt also auch in diesem Sinne ihren Namen mit Recht.

2) Bezeichnet $\psi$ die wahre Anomalie irgend eines Punktes der Ellipse, so ist der zugehörige Vector

$$r = \frac{a\,(1 - c^2)}{1 + c \cos\varphi},$$

daher nach Formel 6), wenn $r_2$ der gesuchte mittlere Radius,

$$s r_2 = \frac{1}{3}\int_0^\pi r^3\,d\varphi = \frac{1}{3}a^3(1-c^2)^3\int_0^\pi \frac{d\varphi}{(1+c\cos\varphi)^3}.$$

Es ist aber

$$(1-c^2)^3\int\frac{d\varphi}{(1+c\cos\varphi)^3} = \frac{-(1-c^2)^2 c\sin\varphi}{2(1+c\cos\varphi)^2} - \frac{3(1-c^2)c\sin\varphi}{2(1+c\cos\varphi)}$$
$$+\frac{1}{2}(2+c^2)\sqrt{1-c^2}\,arc\cos\left(\frac{c+\cos\varphi}{1+c\cos\varphi}\right).$$

Nimmt man dieses Integral von $\varphi = 0$ bis $\varphi = \pi$, so erhält man

$$\frac{1}{2}\pi(2+c^2)\sqrt{1-c^2}.$$

Da nun zwischen denselben Grenzen $s = \frac{1}{2}\pi ab = \frac{1}{2}\pi a^2\sqrt{1-c^2}$ ist, so folgt hieraus

$$r_2 = \frac{1}{3}a(2+c^2) = a - \frac{1}{3}\frac{b^2}{a}.$$

Der mittlere Radius des Inhalts der Ellipse aus einem ihrer Brennpunkte ist also um ein Sechstel ihres Parameters kleiner als ihre halbe grosse Achse.

13.

Sei $a$ der Halbmesser der Kreisbasis eines geraden Kegels, dessen Höhe $= h$; es wird gesucht 1) der mittlere Radius der Basis desselben aus der Spitze als Pol, 2) der mittlere Radius des Inhalts des Kegels aus dem nämlichen Pol.

1) Bezeichnet $z$ den Abstand des Punktes, in welchem der veränderliche Radius $r$ aus der Spitze die Basis trifft, vom Mittelpunkt der letzteren, so ist

$$r = \sqrt{h^2+z^2}.$$

Ferner kann hier in Formel 1) $ds$ als die Ringfläche angesehen werden, deren Halbmesser $= z$, und deren Breite $= dz$. Es ist dann

$$ds = 2\pi z\,dz.$$

Da nun die Fläche der Basis $s = 2\pi a^2$, so wird nach 1)

$$\text{I)}\quad \begin{cases} r_1 = \dfrac{2}{a^2}\displaystyle\int_0^a z\,dz\sqrt{h^2+z^2} \\ \quad = \dfrac{2}{3}\left\{\dfrac{(h^2+a^2)^{\frac{3}{2}} - h^3}{a^2}\right\}. \end{cases}$$

Ist $h$ im Verhältniss zu $a$ sehr gross, so wird

$$r_1 = h + \frac{1}{4}\frac{a^2}{h};$$

ist umgekehrt $h$ gegen $a$ sehr klein, so wird

$$r_1 = \frac{2}{3}a + \frac{h^2}{a}$$

Der erstere Werth hat also zur Grenze $h$, der zweite $\frac{2}{3}a$, wie es sein muss, da in diesen Fällen der Kegel bezüglich in einen Cylinder und einen Kreis übergeht.

2) Man mache die Achse des Kegels zur $x$-Achse, die Spitze zum Coordinatenanfang, so ist, wenn für irgend einen Achsenschnitt $x, y$ die rechtwinkligen Coordinaten eines innerhalb des Kegels liegenden Punktes bezeichnen, der Inhalt eines kreisförmigen Ringes, dessen innerer Halbmesser $= y$, Breite $= dy$, und Höhe $= dx$, gleich $2\pi y\, dy\, dx$. Dieser kann als das Körperelement $ds$ des Kegels angesehen werden. Da nun

$$r = \sqrt{x^2 + y^2},$$

so ist

$$\int r\, ds = 2\pi \int\int y\, dy\, dx \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Integrirt man zuerst nach $y$, so kommt

$$\int y\, dy \sqrt{x^2 + y^2} = \tfrac{1}{3}(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}.$$

Dieses Integral muss von $y = 0$ bis $y = \frac{ax}{h}$ genommen werden, und giebt zwischen diesen Grenzen

$$\tfrac{1}{3}\frac{x^3}{h^3}\left[(h^2 + a^2)^{\frac{3}{2}} - h^3\right].$$

Integrirt man diesen Ausdruck nach $x$ und nimmt das Integral von $x = 0$ bis $x = h$, so erhält man, nach Hinzufügung des Coefficienten $2\pi$,

$$\tfrac{1}{6}\pi h\left[(h^2 + a^2)^{\frac{3}{2}} - h^3\right].$$

Dividirt man endlich diesen Werth durch den Inhalt des Kegels $s = \frac{1}{3}\pi a^2 h$, so erhält man den gesuchten mittleren Radius seines Inhalts

$$\text{II)} \qquad r_2 = \tfrac{1}{2}\left[\frac{(h^2 + a^2)^{\frac{3}{2}} - h^3}{a^2}\right].$$

Vergleicht man diesen Werth mit dem von $r_1$, so zeigt sich sofort, dass

$$\text{III)} \qquad r_2 = \tfrac{3}{4} r_1.$$

Hieraus ergiebt sich der Satz: *Zieht man aus der Spitze des geraden Kegels nach seiner Basis den mittleren Radius derselben, $r_1$, und legt durch den Schwerpunkt des Kegels eine seiner Basis parallele Ebene, so ist das zwischen dieser Ebene und der Spitze des Kegels enthaltene Stück von $r_1$ der mittlere Radius des Inhalts der Kegelfläche, $r_2$.*

Dieser Satz ist dem in Art. 5 für die Basis und den Inhalt des Dreiecks gefundenen analog, und es gilt daher hier von einem Strahlenbündel Aehnliches, wie dort von einem Strahlenfächer.

14.

Seien die mittleren Radien 1) der Oberfläche, 2) des Inhalts einer Kugel, deren Halbmesser $= a$, zu bestimmen, wenn der Abstand des Pols vom Mittelpunkt der Kugel $= c$ ist.

1) Sei der Pol der Coordinatenanfang, seine Verbindungslinie mit dem Mittelpunkt die $x$-Achse, so ist die Gleichung jedes grössten Kreises, dessen Ebene durch diese Achse geht,

$$(c-x)^2 + y^2 = a^2.$$

Das Flächenelement $ds$ ist hier die mit dem Halbmesser $y$ um die $x$-Achse beschriebene Zone, deren Breite das Differential des Bogens des vorstehenden grössten Kreises. Hieraus folgt $ds = 2\pi a\, dx$, und da der aus dem Pol nach einem beliebigen Punkt dieses Elements gezogene Radius

$$r = \sqrt{x^2+y^2},$$

$$\int r\, ds = 2\pi a \int dx \sqrt{x^2+y^2} = 2\pi a \int dx \sqrt{a^2-c^2+2cx}$$
$$= \frac{2\pi a}{3c}(a^2-c^2+2cx)^{\frac{3}{2}}.$$

Wird dieses Integral von $x = c-a$ bis $x = c+a$ genommen und durch $s = 4\pi a^2$ dividirt, so erhält man

$$\text{I)} \quad \begin{cases} r_1 = \dfrac{1}{6ac}\left\{(c+a)^3 - (c-a)^3\right\} \\ \quad = c + \frac{1}{3}\dfrac{a^2}{c}. \end{cases}$$

Diese Formel gilt jedoch nur, wenn $c > a$, also der Pol ausserhalb der Kugel liegt. Ist dagegen $c < a$, liegt also der Pol innerhalb der Kugel, so wird

$$\text{II)} \quad \begin{cases} r_1 = \dfrac{1}{6ac}\left\{(a+c)^3 - (a-c)^3\right\} \\ \quad = a + \frac{1}{3}\dfrac{c^2}{a}. \end{cases}$$

Liegt der Pol auf der Kugelfläche, wo $c = a$, so geben beide Formeln

$$r_1 = \tfrac{4}{3}a.$$

Liegt er im Mittelpunkt, wo $c = 0$ wird, so giebt die zweite, wie es sein muss, $r_1 = a$.

2) Ganz auf dieselbe Weise wie in Nr. 13 2) findet man auch hier

$$\int r\, ds = 2\pi \int\int y\, dy\, dx \sqrt{x^2+y^2},$$

und hieraus, wenn man zuerst nach $y$ integrirt,

$$\int y\, dy \sqrt{x^2+y^2} = \tfrac{1}{3}(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}.$$

Dieses Integral ist aber jetzt von $y = 0$ bis $y = \sqrt{a^2-(c-x)^2}$ zu nehmen und giebt zwischen diesen Grenzen

$$\tfrac{1}{3}\left\{(a^2-c^2+2cx)^{\frac{3}{2}} - x^3\right\}.$$

Integrirt man diesen Ausdruck nach $x$, so kommt

$$\tfrac{1}{3}\left\{\frac{1}{5c}(a^2-c^2+2cx)^{\frac{5}{2}} - \tfrac{1}{4}x^4\right\},$$

und nimmt man dieses Integral von $x = c - a$ bis $x = c + a$, so erhält man, nach Hinzufügung des Coefficienten $2\pi$ und Division mit $s = \frac{4}{3}\pi a^3$,

$$\text{III)} \quad \begin{cases} r_2 = \dfrac{1}{2.4.5.ca^3}\left\{(4a-c)(c+a)^4 + (4a+c)(c-a)^4\right\} \\ \quad = c + \frac{1}{5}\dfrac{a^2}{c}. \end{cases}$$

Diese Formel gilt aber wieder nur, wenn $c > a$, also der Pol ausserhalb der Kugel liegt. Liegt er innerhalb derselben, und ist also $c < a$, so wird

$$\text{IV)} \quad \begin{cases} r_2 = \dfrac{1}{2.4.5.ca^3}\left\{(4a-c)(a+c)^4 - (4a+c)(a-c)^4\right\} \\ \quad = \frac{3}{4}a + \frac{1}{2}\dfrac{c^2}{a} - \frac{1}{20}\dfrac{c^4}{a^3}. \end{cases}$$

Ist $c = a$, liegt also der Pol auf der Kugelfläche, so geben beide Formeln

$$r_2 = \tfrac{6}{5}a.$$

Für $c = 0$ endlich giebt IV) $r_2 = \frac{3}{4}a$, was auch schon aus dem vorigen Artikel folgt, da die Kugel als ein gerader Kegel angesehen werden kann, dessen Basis ihre Oberfläche und Höhe ihr Halbmesser. Man findet leicht, dass $r_2$ für $c = 0$ ein Minimum wird.

## 15.

Werde gesucht: 1) der mittlere Halbmesser $r_1$ des durch Umdrehung der Ellipse, deren Achsen $2a$, $2b$, um ihre kleine Achse erzeugten Sphäroids, und 2) der mittlere Radius $r_2$ aus dem Mittelpunkt, in Bezug auf den Inhalt desselben Sphäroids.

1) Bezeichnet $\varphi$ das Complement der excentrischen Anomalie, oder die Amplitude des Halbmessers $r$, so ist $r = a\sqrt{1 - c^2\cos^2\varphi}$, und das Bogenelement der Ellipse $a\,d\varphi\sqrt{1 - c^2\sin^2\varphi}$. Dieses letztere beschreibt bei der Drehung der Ellipse um die Achse $2b$ eine Zone $ds$, deren Halbmesser $a\sin\varphi$. Es ist daher

$$ds = 2\pi a^2 \sin\varphi\, d\varphi\sqrt{1 - c^2\sin^2\varphi},$$

folglich

$$\int r\,ds = -2\pi a^3\int d\cos\varphi\sqrt{(1 - c^2\sin^2\varphi)(1 - c^2\cos^2\varphi)}.$$

Setzt man $c\cos\varphi = \cos\psi$, so wird

$$\int r\,ds = \frac{2\pi a^3}{c}\int \sin^2\psi\, d\psi\sqrt{2 - c^2 - \sin^2\psi},$$

oder, wenn man noch zur Abkürzung $2 - c^2 = \dfrac{a^2 + b^2}{a^2} = \dfrac{1}{\gamma^2}$ einführt,

$$\int r\,ds = \frac{2\pi a^3}{c\gamma}\left\{\int\frac{\sin^2\psi\,d\psi}{\varDelta} - \gamma^2\int\frac{\sin^4\psi\,d\psi}{\varDelta}\right\},$$

wo $\varDelta = \sqrt{1 - \gamma^2\sin^2\psi}$. Durch Reduction der Integrale ergiebt sich

$$\int r\,ds = \frac{2\pi a^3}{3\gamma c}\left\{(1-c^2)F(\gamma,\psi) + c^2 E(\gamma,\psi) - \sin\psi\cos\psi\sqrt{1-\gamma^2\sin^2\psi}\right\}.$$

Dieses Integral ist zwischen den Grenzen zu nehmen, welche $\varphi = \frac{1}{2}\pi$ und $\varphi = 0$ entsprechen und daher, weil $\cos\psi = c\cos\varphi$, $\psi = \frac{1}{2}\pi$ und $\psi = arc\cos c$ sind. Zwischen diesen Grenzen genommen, geben im vorstehenden Ausdruck von $\int r\,ds$ die drei Glieder in der Parenthese der Reihe nach

$$(1-c^2)\left[F(\gamma,\tfrac{1}{2}\pi) - F(\gamma, arc\cos c)\right],$$
$$c^2\left[E(\gamma,\tfrac{1}{2}\pi) - E(\gamma, arc\cos c)\right],$$
$$\gamma c\sqrt{1-c^2}.$$

Die beiden ersteren lassen sich aber durch Anwendung bekannter Sätze von der Addition der elliptischen Functionen noch weiter zusammenziehen in

$$(1-c^2)\,F[\gamma, arc\cos(1-c^2)]$$

und

$$c^2\left[E(\gamma, arc\cos(1-c^2)) - \gamma c\sqrt{1-c^2}\right].$$

Demnach ist, wenn noch zur Abkürzung $arc\cos(1-c^2) = \vartheta$ gesetzt wird, der Werth von $\int r\,ds$ zwischen den angegebenen Grenzen

$$\frac{2\pi a^3}{3\gamma c}\left\{(1-c^2)\,F(\gamma,\vartheta) + c^2 E(\gamma,\vartheta) + \gamma c\,(1-c^2)^{\frac{3}{2}}\right\}.$$

Dividirt man nun diesen Ausdruck durch die halbe Oberfläche des Sphäroids

$$s = \pi a^2\left[1 + \frac{1-c^2}{2c}\,lgn\left(\frac{1+c}{1-c}\right)\right],$$

so erhält man

$$\text{I)}\qquad r_1 = \frac{2a}{3\gamma}\left\{\frac{(1-c^2)F(\gamma,\vartheta) + c^2 E(\gamma,\vartheta) + \gamma c(1-c^2)^{\frac{3}{2}}}{c + \frac{1}{2}(1-c^2)\left[lgn(1+c) - lgn(1-c)\right]}\right\}.$$

Ist $c$ so klein, dass seine höheren Potenzen vernachlässigt werden können, so wird

$$\int r\,ds = -2\pi a^3\int d\cos\varphi\,(1-c^2+c^4\cos^2\varphi - c^4\cos^4\varphi)^{\frac{1}{2}}$$
$$= -2\pi a^3\int d\cos\varphi\,(1-\tfrac{1}{2}c^2 - \tfrac{1}{8}c^4 + \tfrac{1}{2}c^4\cos^2\varphi - \tfrac{1}{2}c^4\cos^4\varphi).$$

Integrirt man, so findet sich zwischen den Grenzen $\varphi = 0$, $\varphi = \frac{1}{2}\pi$ als der Werth des Integrals:

$$2\pi a^3(1-\tfrac{1}{2}c^2 - \tfrac{7}{120}c^4).$$

Andererseits ist dann

$$s = -2\pi a^2\int d\cos\varphi\,(1-c^2+c^2\cos^2\varphi)^{\frac{1}{2}}$$
$$= -2\pi a^2\int d\cos\varphi\,[1-\tfrac{1}{2}c^2 - \tfrac{1}{8}c^4 + \tfrac{1}{4}(2c^2+c^4)\cos^2\varphi - \tfrac{1}{8}c^4\cos^4\varphi],$$

was, integrirt und zwischen den vorigen Grenzen genommen, giebt

$$2\pi a^2(1-\tfrac{1}{3}c^2 - \tfrac{1}{15}c^4).$$

Hieraus folgt

$$r_1 = a\,(1 - \tfrac{1}{8} c^2 - \tfrac{1}{360} c^4),$$

wogegen das Mittel zwischen den beiden halben Achsen

$$\tfrac{1}{2}(a + b) = a\,(1 - \tfrac{1}{4} c^2 - \tfrac{1}{16} c^4),$$

also kleiner. Für ein Sphäroid, dessen Abplattung (wie etwa die des Jupiter) $\alpha = \frac{1}{14}$, ist $c^2 = 2\alpha - \alpha^2 = \frac{27}{196}$. Hieraus folgt, wenn $a = 1$ gesetzt wird,

$$r_1 = 0{,}97704 \text{ und } \tfrac{1}{2}(a + b) = 0{,}92857.$$

2) Auf ähnliche Weise wie in Nr. 13, 2) ergiebt sich, dass

$$\int r\,ds = 2\pi \int\!\!\int x\,dx\,dy\,\sqrt{x^2 + y^2};$$

daher ist weiter, wenn man zuerst nach $x$ integrirt und das Integral von $x = 0$ bis $x = \sqrt{a^2 - \frac{a^2 y^2}{b^2}}$ nimmt,

$$\int r\,ds = \tfrac{2}{3}\pi \int dy \left\{ \left[ a^2 - \left( \frac{a^2 - b^2}{b^2} \right) y^2 \right]^{\frac{3}{2}} - y^3 \right\}.$$

Integrirt man nun nach $y$ und setzt zur Abkürzung

$$a^2 - \left( \frac{a^2 - b^2}{b^2} \right) y^2 = Y,$$

so kommt

$$\tfrac{2}{3}\pi \left\{ \tfrac{1}{4}(Y + \tfrac{3}{2} a^2)\, y \sqrt{Y} + \frac{3a^4 b}{8\sqrt{a^2 - b^2}}\, arc\cos \sqrt{1 - \left( \frac{a^2 - b^2}{a^2 b^2} \right) y^2} - \tfrac{1}{4} y^4 \right\}.$$

Nimmt man endlich dieses Integral von $y = 0$ bis $y = b$ und dividirt dann durch den halben Inhalt des Sphäroids $s = \frac{2}{3}\pi a^2 b$, so erhält man

$$\text{II)} \qquad r_2 = \tfrac{3}{8} \left( b + \frac{a^2}{\sqrt{a^2 - b^2}}\, arc\cos \frac{b}{a} \right).$$

Diese Formel hat einen geometrischen Sinn. Multiplicirt man sie nämlich mit $2\pi b$, so wird

$$\text{II*)} \qquad 2\pi b r_2 = \tfrac{3}{8} \cdot 2\pi \left( b^2 + \frac{a^2 b}{\sqrt{a^2 - b^2}}\, arc\cos \frac{b}{a} \right),$$

wo der rechte Theil der Gleichung $\frac{3}{8}$ der Oberfläche desjenigen Sphäroids ausdrückt, das durch Umdrehung derselben Ellipse, welche das gegebene erzeugt, um ihre **grosse** Achse entsteht, der linke Theil aber als die krumme Oberfläche eines geraden Cylinders angesehen werden kann, dessen Höhe $r_2$, und dessen Basis ein mit dem Halbmesser $b$ beschriebener Kreis ist.

Hiernach giebt die Formel II*) folgenden Satz: **der Mittelwerth von den aus dem Centrum eines Sphäroids, das durch Umdrehung einer Ellipse um ihre kleine Achse erzeugt wird, nach allen Punkten seines Inhalts gezogenen Radien ist gleich der Höhe eines geraden Cylinders, dessen Basis ein über der kleinen Achse der Ellipse beschriebener Kreis,**

und dessen krumme Oberfläche gleich $\frac{3}{8}$ der Oberfläche desjenigen Sphäroids ist, das durch Umdrehung derselben Ellipse um ihre grosse Achse entsteht.

Führt man in der Formel II) $c = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}$ ein, so wird

II**) $$r_2 = \tfrac{3}{8} a \left(\sqrt{1 - c^2} + \frac{1}{c} \, arc \sin c\right).$$

Entwickelt man diesen Ausdruck in eine Reihe, so erhält man, wenn man die höheren Potenzen von $c$ vernachlässigt,

$$r_2 = \tfrac{3}{4} a \left(1 - \tfrac{1}{6} c^2 - \tfrac{1}{40} a^4\right),$$

was mit $c = 0$ in $\frac{3}{4} a$ übergeht, wie es, nach Art. 14, 2) a. E., sein muss.

## 16.

Sei zu finden: 1) der mittlere Halbmesser $r'_1$ des durch Umdrehung der Ellipse, deren Achsen $2a$, $2b$, um ihre grosse Achse erzeugten Sphäroids, und 2) der mittlere Radius $r'_2$ aus dem Mittelpunkt in Bezug auf den Inhalt desselben Sphäroids.

1) Hier ist $ds$ die durch das Bogenelement $a \, d\varphi \sqrt{1 - c^2 \sin^2 \varphi}$ mit dem Halbmesser $b \cos \varphi$ um die Achse $2a$ beschriebene Zone, daher

$$ds = 2\pi a b \cos \varphi \, d\varphi \sqrt{1 - c^2 \sin^2 \varphi},$$

folglich da wiederum

$$r = a \sqrt{1 - c^2 \cos^2 \varphi},$$

$$\int r \, ds = 2\pi a^2 b \int d \sin \varphi \sqrt{(1 - c^2 \cos^2 \varphi)(1 - c^2 \sin^2 \varphi)}.$$

Vergleicht man diesen Ausdruck mit dem entsprechenden zu Anfang des ersten Theils der vorigen Nr., so sieht man, dass er aus diesem durch Multiplication mit $-\frac{b}{a}$ und Vertauschung von $\cos \varphi$ mit $\sin \varphi$ erhalten wird. Setzt man daher jetzt $c \sin \varphi = \cos \psi$, so wird

$$\int r \, ds = -\frac{2\pi a^2 b}{c} \int \sin^2 \psi \, d\psi \sqrt{2 - c^2 - \sin^2 \psi}$$

und hieraus weiter, nach der vorigen Nr.,

$$\int r \, ds = -\frac{2\pi a^2 b}{3\gamma c} \left\{(1 - c^2) F(\gamma, \psi) + c^2 E(\gamma, \psi) - \sin \psi \cos \psi \sqrt{1 - \gamma^2 \sin^2 \psi}\right\}.$$

Nimmt man dieses Integral zwischen den $\varphi = \frac{1}{2}\pi$ und $\varphi = 0$ entsprechenden Grenzwerthen $\psi = arc \cos c$ und $\psi = \frac{1}{2}\pi$, so erhält man

$$\frac{2\pi a^2 b}{3\gamma c} \left\{(1 - c^2) F(\gamma, \vartheta) + c^2 E(\gamma, \vartheta) + \gamma c (1 - c^2)^{\frac{3}{2}}\right\}.$$

Dividirt man diesen Werth durch die halbe Oberfläche des Sphäroids, welche hier

$$s' = \pi b^2 \left(1 + \frac{1}{c\sqrt{1 - c^2}} \, arc \sin c\right)$$

ist, so erhält man

$$\text{I)} \qquad r_1' = \frac{2a}{3\gamma}\left\{\frac{(1-c^2)F(\gamma,\vartheta)+c^2E(\gamma,\vartheta)+\gamma c(1-c^2)^{\frac{3}{2}}}{c\sqrt{1-c^2}+arc\sin c}\right\}.$$

Vergleicht man diese Formel mit der Formel I) der vorigen Nr., so erhält man die Proportion

$$2r_1 b : 2r_1' a = 2s' : 2s,$$

d. i.: die Oberflächen der beiden Rotationssphäroide sind umgekehrt proportional den Rechtecken aus ihren mittleren Halbmessern in ihre Rotationsachsen.

2) Hier ist

$$\int r\,ds = 2\pi\int\int y\,dy\,dx\sqrt{x^2+y^2},$$

also, wenn man zuerst nach $y$ integrirt und das Integral von $y=0$ bis $y=\sqrt{b^2-\frac{b^2}{a^2}x^2}$ nimmt,

$$\int r\,ds = \tfrac{2}{3}\pi\int dx\left\{\left[b^2+\left(\frac{a^2-b^2}{a^2}\right)x^2\right]^{\frac{3}{2}}-x^3\right\}.$$

Setzt man $b^2+\frac{a^2-b^2}{a^2}x^2=X$ und führt die Integration nach $x$ aus, so kommt

$$\tfrac{2}{3}\pi\left\{\tfrac{1}{4}(X+\tfrac{3}{2}b^2)x\sqrt{X}+\frac{3ab^4}{8\sqrt{a^2-b^2}}\,lgn\left[\frac{x\sqrt{a^2-b^2}}{a}+\sqrt{X}\right]-\tfrac{1}{4}x^4\right\}.$$

Nimmt man endlich dieses Integral von $x=0$ bis $x=a$ und dividirt durch den halben Inhalt des Sphäroids, $s=\frac{2}{3}\pi ab^2$, so kommt

$$\text{III)} \qquad r_2' = \tfrac{3}{8}\left\{a+\frac{b^2}{\sqrt{a^2-b^2}}\,lgn\left(\frac{a+\sqrt{a^2-b^2}}{b}\right)\right\},$$

oder, nach Multiplication mit $2\pi a$,

$$\text{III*)} \quad 2\pi a r_2' = \tfrac{3}{8}\cdot 2\pi\left\{a^2+\frac{ab^2}{\sqrt{a^2-b^2}}\,lgn\left(\frac{a+\sqrt{a^2-b^2}}{b}\right)\right\},$$

woraus sich folgender, dem in dem vorigen Artikel a. E. erhaltenen, entsprechender Satz ergiebt: der Mittelwerth von den aus dem Centrum eines, durch Umdrehung einer Ellipse um ihre **grosse** Achse erzeugten Sphäroids nach allen Punkten seines Inhalts gezogenen Radien ist gleich der Höhe eines geraden Cylinders, dessen Basis ein über der grossen Achse der Ellipse beschriebener Kreis, und dessen krumme Oberfläche gleich $\frac{3}{8}$ der Oberfläche desjenigen Sphäroids ist, das durch Umdrehung derselben Ellipse um ihre **kleine** Achse entsteht.

Hiernach ist also, wenn $s$ die Oberfläche des Sphäroids um die kleine Achse, und $s'$ die Oberfläche dessen um die grosse Achse bezeichnet, nach III*) und nach II*) in der vorigen Nr.

$$\text{IV)} \qquad 2\pi a r_2' = \tfrac{3}{8}s \text{ und } 2\pi b r_2 = \tfrac{3}{8}s';$$

folglich

$$2r_2 b : 2r_2' a = 2s' : 2s,$$

d. i.: die Oberflächen der beiden Sphäroide sind den Rechtecken aus den Mittelwerthen der von ihren Centren aus nach allen Punkten ihres Inhalts gezogenen Radien in ihre Rotationsachsen umgekehrt proportional.

Combinirt man endlich die beiden Proportionen II) und IV), so folgt

V) $$r_1 : r_1' = r_2 : r_2',$$

d. i. die mittleren Halbmesser und die Mittelwerthe der Radien aus den Centren nach allen Punkten des Inhalts stehen zu einander in beiden Sphäroiden in dem gleichen Verhältniss.

Führt man in III) $c = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}$ ein, so erhält man

III**) $$r_2' = \tfrac{3}{8} a \left\{1 + \frac{1 - c^2}{2c} \, lgn \left(\frac{1 + c}{1 - c}\right)\right\}.$$

Dies giebt, entwickelt, mit Vernachlässigung der höheren Potenzen von $c$,

$$r_2' = \tfrac{3}{4} a \left\{1 - \tfrac{1}{5} c^2 - \tfrac{1}{15} c^4\right\},$$

welcher Werth für $c = 0$, wie es sein muss, sich auf $\tfrac{3}{4} a$ reducirt.

# II.

## Studien über Differentialgleichungen.

Von Professor SIMON SPITZER.

(Fortsetzung.)

---

§. 14. Ich habe im letzten Paragraphen jene lineare Differentialgleichung aufgesucht, welcher genügt wird durch

$$y = C_1 e^{\alpha x} \int_{-1}^{+1} (1-u^2)^{B-\frac{3}{2}} du$$

$$+ C_2 e^{\alpha x} \int_{-1}^{+1} (1-u^2)^{B-\frac{3}{2}} \log [(1-u^2)\sqrt{m+x}]\, du$$

$$+ C_3 e^{\alpha x} \int_{-1}^{+1} (1-u^2)^{B-\frac{3}{2}} \log^2 [(1-u^2)\sqrt{m+x}]\, du$$

$$+ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$+ C_r e^{\alpha x} \int_{-1}^{+1} (1-u^2)^{B-\frac{3}{2}} \log^{r-1} [(1-u^2)\sqrt{m+x}]\, du,$$

woselbst $B > \frac{1}{2}$ ist und $C_1, C_2, C_3 .. C_r$ willkürliche Integrationsconstante bedeuten. Es ist leicht zu zeigen, dass das eben aufgestellte Integral sich in folgender vereinfachten Form wiedergeben lässt:

$$y = e^{\alpha x} [K_1 + K_2 \log (m+x) + K_3 \log^2 (m+x) + \ldots + K_r \log^{r-1} (m+x)],$$

welche giltig ist, wie auch immer das $B$ beschaffen ist und woselbst $K_1$, $K_2$, $K_3 .. K_r$ ebenfalls willkürliche Constante bedeuten.

§. 15. Die Integrale der Gleichungen

$$Q_1 = 0, \quad Q_2 = 0, \quad Q_3 = 0, \quad Q_4 = 0, \quad Q_5 = 0,$$

welche ich in §. 12 bestimmte, setzen durchgehends ein $B$ voraus, das grösser als $\frac{1}{2}$ ist, und werden unbrauchbar für $B = \frac{1}{2}$ und für $B < \frac{1}{2}$.

Ich glaube daher, es dürfte nicht überflüssig sein, auch diese Fälle zu erörtern, und so betrachte ich denn jetzt vorerst denjenigen Fall, wo $B = \frac{1}{2}$ ist. Die Gleichung

$$Q_1 = (m+x) y'' + [\tfrac{1}{2} - 2\alpha (m+x)] y' + \left[A - \frac{\alpha}{2} + \alpha^2 (m+x)\right] y = 0$$

hat zum Integrale

$$y = C_1 e^{\alpha x + 2\sqrt{-A(m+x)}} + C_2 e^{\alpha x - 2\sqrt{-A(m+x)}};$$

es fragt sich jetzt, wie ist das Integral der Gleichung:

$$(m+x)[(m+x)Q_1]''+[\tfrac{1}{2}-2\alpha(m+x)].[(m+x)Q_1]'$$
$$+\left[A-\frac{\alpha}{2}+\alpha^2(m+x)\right].(m+x)Q_1=0.$$

Aus ihr folgt unmittelbar

$$(m+x)Q_1=C_1e^{\alpha x+2\sqrt{-A(m+x)}}+C_2e^{\alpha x-2\sqrt{-A(m+x)}}$$

und wenn man statt $Q_1$ seinen Werth setzt und beiderseits durch $m+x$ dividirt, so erhält man:

$$(m+x)y''+[\tfrac{1}{2}-2\alpha(m+x)]y'+\left[A-\frac{\alpha}{2}+\alpha^2(m+x)\right]y$$
$$=\frac{C_1e^{\alpha x+2\sqrt{-A(m+x)}}+C_2e^{\alpha x-2\sqrt{-A(m+x)}}}{m+x},$$

welche Gleichung linear, von der zweiten Ordnung und complet ist. Behufs ihrer Integration setze ich

$$y=e^{\alpha x}z,$$

dies giebt

$$57)\quad (m+x)z''+\tfrac{1}{2}z'+Az=\frac{C_1e^{+2\sqrt{-A(m+x)}}+C_2e^{-2\sqrt{-A(m+x)}}}{m+x},$$

dann führe ich eine unabhängige Variable $\xi$ in Rechnung ein, mittelst der Substitution

$$-A(m+x)=\xi^2$$

finde dadurch

$$z'=-\frac{A}{2\xi}\frac{dz}{d\xi}$$
$$z''=\frac{A^2}{4\xi^2}\frac{d^2z}{d\xi^2}-\frac{A^2}{4\xi^3}\frac{dz}{d\xi}$$

und diese Werthe in 57) eingeführt, geben die Gleichung

$$\frac{d^2z}{d\xi^2}-4z=\frac{4}{\xi^2}(C_1e^{+2\xi}+C_2e^{-2\xi}).$$

Durch Multiplication mit $e^{2\xi}$ wird dieselbe integrabel, denn es lässt sich die Gleichung

$$e^{2\xi}\frac{d^2z}{d\xi^2}-4e^{2\xi}z=\frac{4}{\xi^2}(C_1e^{4\xi}+C_2)$$

folgendermaassen schreiben:

$$\frac{d}{d\xi}\left[e^{2\xi}\frac{dz}{d\xi}-2e^{2\xi}z\right]=\frac{4}{\xi^2}(C_1e^{4\xi}+C_2)$$

und giebt integrirt:

$$e^{2\xi}\frac{dz}{d\xi}-2e^{2\xi}z=4C_1\int\frac{e^{4\xi}d\xi}{\xi^2}-\frac{4C_2}{\xi}+C_3.$$

Nun wird durch Multiplication mit $e^{-4\xi}$ die jetzt erhaltene Gleichung auch integrabel, denn man hat:

$$e^{-2\xi}\frac{dz}{d\xi}-2e^{-2\xi}z=4C_1e^{-4\xi}\int\frac{e^{4\xi}d\xi}{\xi^2}-\frac{4C_2e^{-4\xi}}{\xi}+C_3e^{-4\xi},$$

Diese Gleichung gestattet folgende Schreibweise:

$$\frac{d}{dz}[e^{-2\xi}z] = 4C_1 e^{-4\xi}\int\frac{e^{4\xi}d\xi}{\xi^2} - \frac{4C_2 e^{-4\xi}}{\xi} + C_3 e^{-4\xi}$$

und giebt integrirt:

$$e^{-2\xi}z = -4C_1 e^{-4\xi}\int\frac{e^{4\xi}dz}{\xi} - 4C_2\int\frac{e^{-4\xi}d\xi}{\xi} - \frac{C_3}{4}e^{-4\xi},$$

folglich ist

$$z = -4C_1 e^{-2\xi}\int\frac{e^{4\xi}d\xi}{\xi} - 4C_2 e^{2\xi}\int\frac{e^{-4\xi}d\xi}{\xi} - \frac{C_3}{4}e^{-2\xi} + C_4 e^{2\xi},$$

was sich auch unbeschadet der Allgemeinheit so schreiben lässt:

$$z = C_1 e^{-2\xi}\int\frac{e^{4\xi}d\xi}{\xi} + C_2 e^{2\xi}\int\frac{e^{-4\xi}d\xi}{\xi} + C_3 e^{-2\xi} + C_4 e^{+2\xi}.$$

Demnach ist das Integral der Gleichung $Q_2 = 0$ in dem speciellen Falle als $B = \frac{1}{2}$ ist, folgendes:

$$y = C_1 e^{\alpha x - 2\sqrt{-A(m+x)}}\int\frac{e^{4\sqrt{-A(m+x)}}dx}{m+x} + C_2 e^{\alpha x + 2\sqrt{-A(m+x)}}\int\frac{e^{-4\sqrt{-A(m+x)}}dx}{m+x}$$
$$+ C_3 e^{\alpha x - 2\sqrt{-A(m+x)}} + C_4 e^{\alpha x + 2\sqrt{-A(m+x)}}$$

und es ist klar, dass sich die Untersuchung ganz auf dieselbe Weise weiter führen lässt. — Ja noch mehr, es lässt sich ganz derselbe Weg auch bei solchen Gleichungen von der Form

$$Q_2 = 0$$

einschlagen, wo das $B$ irgend eine, in der Form $n + \frac{1}{2}$ enthaltene Zahl ist, unter $n$ eine ganze positive Zahl verstanden, endlich auch dann, wenn $Q$ von folgender etwas verallgemeinerten Gestalt ist:

$$Q_r = (m+x)[(m+x)^\lambda Q_{r-1}]'' + [B - 2\alpha(m+x)].[(m+x)^\lambda Q_{r-1}]'$$
$$+ [A - B\alpha + \alpha^2(m+x)].(m+x)^\lambda Q_{r-1},$$

nur muss $n$, wie schon gesagt, ganz und positiv oder Null sein.

§. 16. Ich werde jetzt jene lineare Differential-Gleichung aufsuchen, welcher genügt wird durch

$$58)\left\{\begin{aligned} y = {} & C_1(m+x)^{1-A-B}\int_\alpha^\beta e^{u(m+x)}(u-\alpha)^{-B}(u-\beta)^{-A}du \\ & + C_2(m+x)^{1-A-B}\int_\alpha^\beta e^{u(m+x)}(u-\alpha)^{-B}(u-\beta)^{-A}\log[(m+x)(u-\alpha)(u-\beta)]\,du \\ & + C_3(m+x)^{1-A-B}\int_\alpha^\beta e^{u(m+x)}(u-\alpha)^{-B}(u-\beta)^{-A}\log^2[(m+x)(u-\alpha)(u-\beta)]\,du \\ & + \cdots\cdots\cdots\cdots \\ & + C_r(m+x)^{1-A-B}\int_\alpha^\beta e^{u(m+x)}(u-\alpha)^{-B}(u-\beta)^{-A}\log^{r-1}[(m+x)(u-\alpha)(u-\beta)]\,du \end{aligned}\right.$$

woselbst $A<1$ und $B<1$ ist, oder $A$ und $B$ solche imaginäre Zahlen bedeuten, deren reelle Bestandtheile $<1$ sind, und nachdem mir dies gelungen sein wird, bestimme ich jene lineare Differentialgleichung, welcher genügt wird für

$$59)\left\{\begin{aligned} y = {} & C_1 (m+x)^{1-B} e^{\alpha x} \int_{-2\sqrt{-A}}^{+2\sqrt{-A}} e^{u\sqrt{m+x}} (u^2+4A)^{\frac{1}{2}-B} du \\ & + C_2 (m+x)^{1-B} e^{\alpha x} \int_{-2\sqrt{-A}}^{+2\sqrt{-A}} e^{u\sqrt{m+x}} (u^2+4A)^{\frac{1}{2}-B} \log[(u^2+4A)\sqrt{m+x}]\, du \\ & + C_3 (m+x)^{1-B} e^{\alpha x} \int_{-2\sqrt{-A}}^{+2\sqrt{-A}} e^{u\sqrt{m+x}} (u^2+4A)^{\frac{1}{2}-B} \log^2[(u^2+4A)\sqrt{m+x}]\, du \\ & + \cdots\cdots\cdots \\ & + C_r (m+x)^{1-B} e^{\alpha x} \int_{-2\sqrt{-A}}^{+2\sqrt{-A}} e^{u\sqrt{m+x}} (u^2+4A)^{\frac{1}{2}-B} \log^{r-1}[(u^2+4A)\sqrt{m+x}]\, du \end{aligned}\right.$$

unter $B$ eine solche Zahl verstanden, die $<\frac{3}{2}$ ist. Die Differentialgleichungen, zu denen ich hier komme, sind, wie ich zeigen werde, genau dieselben, die ich in meinem früheren Memoire mit

$$P_1=0, \quad P_2=0, \quad P_3=0, \quad P_4=0, \quad P_5=0 \quad \text{etc.}$$

und

$$Q_1=0, \quad Q_2=0, \quad Q_3=0, \quad Q_4=0, \quad Q_5=0 \quad \text{etc.}$$

bezeichnete, mit dem einzigen Unterschiede, dass im frühern Memoire die in den Gleichungen

$$P=0$$

vorkommenden Buchstaben $A$ und $B$ positiv waren, hier aber Zahlen sind, die kleiner als 1 sind, mithin auch negativ sein können; ferner sind die, in den Gleichungen

$$Q=0$$

vorkommenden $B$ im frühern Memoire als Zahlen vorausgesetzt, die grösser als $\frac{1}{2}$ sind, während sie hier kleiner als $\frac{3}{2}$ sind.

Ich habe noch eine andere Bemerkung zu machen. Sind $A$ und $B$ positive Zahlen und $<1$ oder imaginäre Zahlen, deren reelle Bestandtheile positiv sind und $<1$, so leisten den Gleichungen

$$P=0$$

nicht nur Genüge die im früheren Memoire gefundenen particulären Integrale, sondern auch die, in diesem Memoire mit 58) bezeichneten, und man hat in diesem speciellen Falle die completen Integrale der Gleichungen

$$P=0$$

gefunden; ebenso, wenn $B$ zwischen $\frac{1}{2}$ und $\frac{3}{2}$ liegt, so leisten den Gleichungen

$$Q = 0$$

nicht nur Genüge die im frühern Memoire gefundenen Integrale, sondern auch die, in diesem Memoire mit 59) bezeichneten, und man hat also auch in diesem Falle das complete Integral der Gleichungen

$$Q = 0$$

gefunden.

§. 17. Ich schreite nun zum Beweise der ausgesprochenen Sätze und setze zu dem Behufe

$$60)\quad y = (m+x)^{1-A-B} \int_\alpha^\beta e^{u(m+x)} (u-\alpha)^{-B} (u-\beta)^{-A} \log^r [(m+x)(u-\alpha)(u-\beta)]\, du$$

und der Einfachheit halber

$$(m+x)(u-\alpha)(u-\beta) = U,$$

alsdann ist:

$$y' = (1-A-B)(m+x)^{-A-B} \int_\alpha^\beta e^{u(m+x)} (u-\alpha)^{-B} (u-\beta)^{-A} \log^r U\, du$$

$$+ (m+x)^{1-A-B} \int_\alpha^\beta u e^{u(m+x)} (u-\alpha)^{-B} (u-\beta)^{-A} \log^r U\, du$$

$$+ r(m+x)^{-A-B} \int_\alpha^\beta e^{u(m+x)} (u-\alpha)^{-B} (u-\beta)^{-A} \log^{r-1} U\, du,$$

ferner

$$y'' = (A+B-1)(A+B)(m+x)^{-A-B-1} \int_\alpha^\beta e^{u(m+x)} (u-\alpha)^{-B} (u-\beta)^{-A} \log^r U\, du$$

$$+ 2(1-A-B)(m+x)^{-A-B} \int_\alpha^\beta u e^{u(m+x)} (u-\alpha)^{-B} (u-\beta)^{-A} \log^r U\, du$$

$$+ (m+x)^{1-A-B} \int_\alpha^\beta u^2 e^{u(m+x)} (u-\alpha)^{-B} (u-\beta)^{-A} \log^r U\, du$$

$$+ r(1-2A-2B)(m+x)^{-A-B-1} \int_\alpha^\beta e^{u(m+x)} (u-\alpha)^{-B} (u-\beta)^{-A} \log^{r-1} U\, du$$

$$+ 2r(m+x)^{-A-B} \int_\alpha^\beta u e^{u(m+x)} (u-\alpha)^{-B} (u-\beta)^{-A} \log^{r-1} U\, du$$

$$+ r(r-1)(m+x)^{-A-B-1} \int_\alpha^\beta e^{u(m+x)} (u-\alpha)^{-B} (u-\beta)^{-A} \log^{r-2} U\, du,$$

somit hat man, wenn man wieder wie früher

$$(m+x)y''+[A+B-(\alpha+\beta)(m+x)]y'+[-A\beta-B\alpha+\alpha\beta(m+x)]y=P_1$$

setzt,

$$P_1(m+x)^{A+B}=(m+x)^2\int_\alpha^\beta e^{u(m+x)}(u-\alpha)^{1-B}(u-\beta)^{1-A}\log^r U\,du$$

$$+(m+x)\int_\alpha^\beta e^{u(m+x)}[(2-A-B)u-\alpha(1-A)-\beta(1-B)](u-\alpha)^{-B}(u-\beta)^{-A}\log^r U\,du$$

$$+r(m+x)\int_\alpha^\beta e^{u(m+x)}(2u-\alpha-\beta)(u-\alpha)^{-B}(u-\beta)^{-A}\log^{r-1} U\,du$$

$$+r(1-A-B)\int_\alpha^\beta e^{u(m+x)}(u-\alpha)^{-B}(u-\beta)^{-A}\log^{r-1} U\,du$$

$$+r(r-1)\int_\alpha^\beta e^{u(m+x)}(u-\alpha)^{-B}(u-\beta)^{-A}\log^{r-2} U\,du.$$

Das erste Glied dieses Ausdruckes, nämlich

$$(m+x)^2\int_\alpha^\beta e^{u(m+x)}(u-\alpha)^{1-B}(u-\beta)^{1-A}\log^r U\,du$$

gestattet folgende Schreibweise:

$$(m+x)\int_\alpha^\beta (u-\alpha)^{1-B}(u-\beta)^{1-A}\log^r U\,.\,\frac{d\,e^{u(m+x)}}{du}\,du$$

und giebt, unter der Voraussetzung $A<1$, $B<1$ nach der Methode des theilweisen Integrirens behandelt

$$-(m+x)\int_\alpha^\beta e^{u(m+x)}[(2-A-B)u-\alpha(1-A)-\beta(1-B)](u-\alpha)^{-B}(u-\beta)^{-A}\log^r U\,du$$

$$-r(m+x)\int_\alpha^\beta e^{u(m+x)}(2u-\alpha-\beta)(u-\alpha)^{-B}(u-\beta)^{-A}\log^{r-1} U\,du,$$

folglich ist:

$$61)\left\{\begin{aligned}P_1&=r(1-A-B)(m+x)^{-A-B}\int_\alpha^\beta e^{u(m+x)}(u-\alpha)^{-B}(u-\beta)^{-A}\log^{r-1} U\,du\\&+r(r-1)(m+x)^{-A-B}\int_\alpha^\beta e^{u(m+x)}(u-\alpha)^{-B}(u-\beta)^{-A}\log^{r-1} U\,du\end{aligned}\right.$$

und diese Gleichung hat die grösste Analogie mit jener Gleichung, welche ich im vorhergehenden Memoire mit 21) bezeichnete.

§. 18. Es lassen sich daher aus derselben all dieselben Schlüsse ziehen, wie sie §. 4 bis §. 8 von mir gemacht worden sind. Die Ergebnisse dieser Schlüsse sind:

Der Gleichung

$$P_1 = 0$$

genügt

$$y = C_1 (m+x)^{1-A-B} \int_\alpha^\beta e^{u(m+x)} (u-\alpha)^{-B} (u-\beta)^{-A} du$$

oder

$$y = C_1 (m+x)^{1-A-B} \int_\alpha^\beta e^{u(m+x)} (u-\alpha)^{-B} (u-\beta)^{-A} du$$

$$+ C_2 (m+x)^{1-A-B} \int_\alpha^\beta e^{u(m+x)} (u-\alpha)^{-B} (u-\beta)^{-A} \log[(m+x)(u-\alpha)(u-\beta)] du$$

jenachdem nämlich $A+B \gtrless 1$ oder $A+B=1$ ist. Ferner findet man für die Gleichung

$$P_2 = 0$$

das Integral

$$y = C_1 (m+x)^{1-A-B} \int_\alpha^\beta e^{u(m+x)} (u-\alpha)^{-B} (u-\beta)^{-A} du$$

$$+ C_2 (m+x)^{1-A-B} \int_\alpha^\beta e^{u(m+x)} (u-\alpha)^{-B} (u-\beta)^{-A} \log[(m+x)(u-\alpha)(u-\beta)] du$$

oder

$$y = C_1 (m+x)^{1-A-B} \int_\alpha^\beta e^{u(m+x)} (u-\alpha)^{-B} (u-\beta)^{-A} du$$

$$+ C_2 (m+x)^{1-A-B} \int_\alpha^\beta e^{u(m+x)} (u-\alpha)^{-B} (u-\beta)^{-A} \log[(m+x)(u-\alpha)(u-\beta)] du$$

$$+ C_3 (m+x)^{1-A-B} \int_\alpha^\beta e^{u(m+x)} (u-\alpha)^{-B} (u-\beta)^{-A} \log^2[(m+x)(u-\alpha)(u-\beta)] du$$

jenachdem nämlich wieder $A+B \gtrless 1$ oder $A+B=1$ ist etc. etc., und mithin ist der, zu Anfang des §. 16 ausgesprochenen Satzes bewiesen.

§. 19. Ich komme nun zu dem zweiten in §. 16 ausgesprochenen Satz und setze, um ihn zu beweisen

$$y = (m+x)^{1-B} e^{\alpha x} \int\limits_{-2\sqrt{-A}}^{+2\sqrt{-A}} e^{u\sqrt{m+x}} (u^2 + 4A)^{\frac{1}{2}-B} \log^r [(u^2+4A)\sqrt{m+x}]\, du$$

und der Einfachheit halber

$$(u^2 + 4A)\sqrt{m+x} = V,$$

alsdann ist:

$$y' = (1-B)(m+x)^{-B} e^{\alpha x} \int\limits_{-2\sqrt{-A}}^{+2\sqrt{-A}} e^{u\sqrt{m+x}} (u^2 + 4A)^{\frac{1}{2}-B} \log^r V\, du$$

$$+ \alpha (m+x)^{1-B} e^{\alpha x} \int\limits_{-2\sqrt{-A}}^{+2\sqrt{-A}} e^{u\sqrt{m+x}} (u^2 + 4A)^{\frac{1}{2}-B} \log^r V\, du$$

$$+ \tfrac{1}{2} (m+x)^{\frac{1}{2}-B} e^{\alpha x} \int\limits_{-2\sqrt{-A}}^{+2\sqrt{-A}} u\, e^{u\sqrt{m+x}} (u^2 + 4A)^{\frac{1}{2}-B} \log^r V\, du$$

$$+ \frac{r}{2} (m+x)^{-B} e^{\alpha x} \int\limits_{-2\sqrt{-A}}^{+2\sqrt{-A}} e^{u\sqrt{m+x}} (u^2 + 4A)^{\frac{1}{2}-B} \log^{r-1} V\, du$$

ferner

$$y'' = B(B-1)(m+x)^{-B-1} e^{\alpha x} \int\limits_{-2\sqrt{-A}}^{+2\sqrt{-A}} e^{u\sqrt{m+x}} (u^2 + 4A)^{\frac{1}{2}-B} \log^r V\, du$$

$$+ 2\alpha(1-B)(m+x)^{-B} e^{\alpha x} \int\limits_{-2\sqrt{-A}}^{+2\sqrt{-A}} e^{u\sqrt{m+x}} (u^2 + 4A)^{\frac{1}{2}-B} \log^r V\, du$$

$$+ \alpha^2 (m+x)^{1-B} e^{\alpha x} \int\limits_{-2\sqrt{-A}}^{+2\sqrt{-A}} e^{u\sqrt{m+x}} (u^2 + 4A)^{\frac{1}{2}-B} \log^r V\, du$$

$$+ (\tfrac{3}{4} - B)(m+x)^{-B-\frac{1}{2}} e^{\alpha x} \int\limits_{-2\sqrt{-A}}^{+2\sqrt{-A}} u\, e^{u\sqrt{m+x}} (u^2 + 4A)^{\frac{1}{2}-B} \log^r V\, du$$

$$+ \alpha (m+x)^{\frac{1}{2}-B} e^{\alpha x} \int\limits_{-2\sqrt{-A}}^{+2\sqrt{-A}} u\, e^{u\sqrt{m+x}} (u^2 + 4A)^{\frac{1}{2}-B} \log^r V\, du$$

$$+ \tfrac{1}{4} (m+x)^{-B} e^{\alpha x} \int\limits_{-2\sqrt{-A}}^{+2\sqrt{-A}} u^2 e^{u\sqrt{m+x}} (u^2 + 4A)^{\frac{1}{2}-B} \log^r V\, du$$

$$+ r\left(\tfrac{1}{2} - B\right)(m+x)^{-B-1} e^{\alpha x} \int_{-2\sqrt{-A}}^{+2\sqrt{-A}} e^{u\sqrt{m+x}} (u^2+4A)^{\frac{1}{2}-B} \log^{r-1} V\, du$$

$$+ \alpha r (m+x)^{-B} e^{\alpha x} \int_{-2\sqrt{-A}}^{+2\sqrt{-A}} e^{u\sqrt{m+x}} (u^2+4A)^{\frac{1}{2}-B} \log^{r-1} V\, du$$

$$+ \frac{r}{2} (m+x)^{-B-\frac{1}{2}} e^{\alpha x} \int_{-2\sqrt{-A}}^{+2\sqrt{-A}} u\, e^{u\sqrt{m+x}} (u^2+4A)^{\frac{1}{2}-B} \log^{r-1} V\, du$$

$$+ \frac{r(r-1)}{4} (m+x)^{-B-1} e^{\alpha x} \int_{-2\sqrt{-A}}^{+2\sqrt{-A}} e^{u\sqrt{m+x}} (u^2+4A)^{\frac{1}{2}-B} \log^{r-2} V\, du.$$

Setzt man nun

$$(m+x)y'' + [B - 2\alpha(m+x)]y' + [A - B\alpha + \alpha^2(m+x)]y = Q_1,$$

so hat man nach gehöriger Reduction

$$Q_1 = \left(\tfrac{3}{4} - \frac{B}{2}\right)(m+x)^{\frac{1}{2}-B} e^{\alpha x} \int_{-2\sqrt{-A}}^{+2\sqrt{-A}} u\, e^{u\sqrt{m+x}} (u^2+4A)^{\frac{1}{2}-B} \log^{r} V\, du$$

$$+ \tfrac{1}{4}(m+x)^{1-B} e^{\alpha x} \int_{-2\sqrt{-A}}^{+2\sqrt{-A}} e^{u\sqrt{m+x}} (u^2+4A)^{\frac{3}{2}-B} \log^{r} V\, du$$

$$+ \frac{r(1-B)}{2} (m+x)^{-B} e^{\alpha x} \int_{-2\sqrt{-A}}^{+2\sqrt{-A}} e^{u\sqrt{m+x}} (u^2+4A)^{\frac{1}{2}-B} \log^{r-1} V\, du$$

$$+ \frac{r}{2} (m+x)^{\frac{1}{2}-B} e^{\alpha x} \int_{-2\sqrt{-A}}^{+2\sqrt{-A}} u\, e^{u\sqrt{m+x}} (u^2+4A)^{\frac{1}{2}-B} \log^{r-1} V\, du$$

$$+ \frac{r(r-1)}{4} (m+x)^{-B} e^{\alpha x} \int_{-2\sqrt{-A}}^{+2\sqrt{-A}} e^{u\sqrt{m+x}} (u^2+4A)^{\frac{1}{2}-B} \log^{r-2} V\, du.$$

Nun gestattet aber der Ausdruck

$$\tfrac{1}{4}(m+x)^{1-B} e^{\alpha x} \int_{-2\sqrt{-A}}^{+2\sqrt{-A}} e^{u\sqrt{m+x}} (u^2+4A)^{\frac{3}{2}-B} \log^{r} V\, du$$

folgende Schreibweise:

$$\tfrac{1}{4}(m+x)^{\frac{1}{2}-B}e^{\alpha x}\int\limits_{-2\sqrt{-A}}^{+2\sqrt{-A}}(u^2+4A)^{\frac{3}{2}-B}\log^r V.\frac{de^{u\sqrt{m+x}}}{du}\,du$$

und dieses giebt unter der Voraussetzung, dass $B<\frac{3}{2}$ ist, nach der Methode des theilweisen Integrirens behandelt

$$\left(\frac{B}{2}-\frac{3}{4}\right)(m+x)^{\frac{1}{2}-B}\,e^{\alpha x}\int\limits_{-2\sqrt{-A}}^{+2\sqrt{-A}}u\,e^{u\sqrt{m+x}}(u^2+4A)^{\frac{1}{2}-B}\log^r V\,du$$

$$-\frac{r}{2}(m+x)^{\frac{1}{2}-B}\,e^{\alpha x}\int\limits_{-2\sqrt{-A}}^{+2\sqrt{-A}}u\,e^{u\sqrt{m+x}}(u^2+4A)^{\frac{1}{2}-B}\log^{r-1}V\,du,$$

demnach hat man, von dem eben gewonnenen Ausdruck Gebrauch machend

62)

$$Q_1=\frac{r(1-B)}{2}(m+x)^{-B}e^{\alpha x}\int\limits_{-2\sqrt{-A}}^{+2\sqrt{-A}}e^{u\sqrt{m+x}}(u^2+4A)^{\frac{1}{2}-B}\log^{r-1}[(u^2+4A)\sqrt{m+x}]\,du$$

$$+\frac{r(r-1)}{4}(m+x)^{-B}e^{\alpha x}\int\limits_{-2\sqrt{-A}}^{+2\sqrt{-A}}e^{u\sqrt{m+x}}(u^2+4A)^{\frac{1}{2}-B}\log^{r-2}[(u^2+4A)\sqrt{m+x}]\,du$$

welche Formel die grösste Analogie zeigt mit jener Formel, die im ersten Memoire mit 44) bezeichnet ist.

§. 20. Durch dieselbe Anwendung der nun schon wiederholt gemachten Schlüsse gelangt man unter der schon vorher gemachten Voraussetzung $B<\frac{3}{2}$ zu folgenden Resultaten:

Der Gleichung

$$Q_1=0$$

genügt entweder

$$y=C_1(m+x)^{1-B}e^{\alpha x}\int\limits_{-2\sqrt{-A}}^{+2\sqrt{-A}}e^{u\sqrt{m+x}}(u^2+4A)^{\frac{1}{2}-B}\,du$$

oder

$$y=C_1(m+x)^{1-B}e^{\alpha x}\int\limits_{-2\sqrt{-A}}^{+2\sqrt{-A}}e^{u\sqrt{m+x}}(u^2+4A)^{\frac{1}{2}-B}\,du$$

$$+\,C_2(m+x)^{1-B}e^{\alpha x}\int\limits_{-2\sqrt{-A}}^{+2\sqrt{-A}}e^{u\sqrt{m+x}}(u^2+4A)^{\frac{1}{2}-B}\log[(u^2+4A)\sqrt{m+x}]\,du$$

jenachdem nämlich $B\gtrless 1$ oder $B=1$ ist.

Der Gleichung

$$Q_2 = 0$$

genügt entweder

$$y = C_1 (m+x)^{1-B} e^{\alpha x} \int_{-2\sqrt{-A}}^{+2\sqrt{-A}} e^{u\sqrt{m+x}} (u^2 + 4A)^{\frac{1}{2}-B} du$$

$$+ C_2 (m+x)^{1-B} e^{\alpha x} \int_{-2\sqrt{-A}}^{+2\sqrt{-A}} e^{u\sqrt{m+x}} (u^2 + 4A)^{\frac{1}{2}-B} \log[(u^2+4A)\sqrt{m+x}]\, du$$

oder

$$y = C_1 (m+x)^{1-B} e^{\alpha x} \int_{-2\sqrt{-A}}^{+2\sqrt{-A}} e^{u\sqrt{m+x}} (u^2 + 4A)^{\frac{1}{2}-B} du$$

$$+ C_2 (m+x)^{1-B} e^{\alpha x} \int_{-2\sqrt{-A}}^{+2\sqrt{-A}} e^{u\sqrt{m+x}} (u^2 + 4A)^{\frac{1}{2}-B} \log[(u^2+4A)\sqrt{m+x}]\, du$$

$$+ C_3 (m+x)^{1-B} e^{\alpha x} \int_{-2\sqrt{-A}}^{+2\sqrt{-A}} e^{u\sqrt{m+x}} (u^2 + 4A)^{\frac{1}{2}-B} \log^2[(u^2+4A)\sqrt{m+x}]\, du$$

jenachdem wieder $B \gtrless 1$ oder $B = 1$ ist, u. s. f., u. s. f.

§. 21. Es liessen sich hier noch mehrere specielle Fälle betrachten, doch finde ich für den Augenblick zu wenig Interesse, um die Sache weiter zu führen. Zum Schlusse dieser Mittheilung stelle ich mir die Aufgabe, jene lineare Differentialgleichung zu bestimmen, welcher genügt wird durch das Integral

$$63)\quad y = \int_\alpha^\beta e^{u(m+x)} (u-\alpha)^{A-1} (u-\beta)^{B-1} (u - A\beta - B\alpha) \log[(m+x)(u-\alpha)(u-\beta)]\, du$$

in welchem $A$ und $B$ positive Zahlen bedeuten oder solche imaginäre, deren reelle Bestandtheile positiv sind, woselbst aber ferner noch die Bedingung

$$A + B = 1$$

stattfindet. Aus 63) folgt:

$$y' = \int_\alpha^\beta u\, e^{u(m+x)} (u-\alpha)^{A-1} (u-\beta)^{B-1} (u - A\beta - B\alpha) \log[(m+x)(u-\alpha)(u-\beta)]\, du$$

$$+ \frac{1}{m+x} \int_\alpha^\beta e^{u(m+x)} (u-\alpha)^{A-1} (u-\beta)^{B-1} (u - A\beta - B\alpha)\, du$$

$$y'' = \int_\alpha^\beta u^2 e^{u(m+x)} (u-\alpha)^{A-1} (u-\beta)^{B-1} (u-A\beta-B\alpha) \log[(m+x)(u-\alpha)(u-\beta)\, du$$

$$+ \frac{2}{m+x} \int_\alpha^\beta u e^{u(m+x)} (u-\alpha)^{A-1} (u-\beta)^{B-1} (u-A\beta-B\alpha)\, du$$

$$- \frac{1}{(m+x)^2} \int_\alpha^\beta e^{u(m+x)} (u-\alpha)^{A-1} (u-\beta)^{B-1} (u-A\beta-B\alpha)\, du.$$

Setzt man nun in den Ausdruck

64) $(m+x)y'' + [1-(\alpha+\beta)(m+x)]y' + [-A\beta - B\alpha + \alpha\beta(m+x)]y = L$

für $y$, $y'$, $y''$ die eben entwickelten Werthe, so hat man

$$L = (m+x) \int_\alpha^\beta e^{u(m+x)} (u-\alpha)^A (u-\beta)^B (u-A\beta-B\alpha) \log[(m+x)(u-\alpha)(u-\beta)]\, du$$

$$+ \int_\alpha^\beta e^{u(m+x)} (u-\alpha)^{A-1} (u-\beta)^{B-1} (u-A\beta-B\alpha)^2 \log[(m+x)(u-\alpha)(u-\beta)]\, du$$

$$+ \int_\alpha^\beta e^{u(m+x)} (u-\alpha)^{A-1} (u-\beta)^{B-1} (u-A\beta-B\alpha)(2u-\alpha-\beta)\, du.$$

Nun ist aber

$$(m+x) \int_\alpha^\beta e^{u(m+x)} (u-\alpha)^A (u-\beta)^B (u-A\beta-B\alpha) \log[(m+x)(u-\alpha)(u-\beta)]\, du =$$

$$\int_\alpha^\beta (u-\alpha)^A (u-\beta)^B (u-A\beta-B\alpha) \log[(m+x)(u-\alpha)(u-\beta)] \,.\, \frac{d e^{u(m+x)}}{du}\, du$$

und dies giebt, nach der Methode des theilweisen Integrirens behandelt, nach einigen Reductionen:

$$- \int_\alpha^\beta e^{u(m+x)} (u-\alpha)^{A-1} (u-\beta)^{B-1} (u-A\beta-B\alpha)^2 \log[(m+x)(u-\alpha)(u-\beta)]\, du$$

$$- \int_\alpha^\beta e^{u(m+x)} (u-\alpha)^A (u-\beta)^B \log[(m+x)(u-\alpha)(u-\beta)]\, du$$

$$- \int_\alpha^\beta e^{u(m+x)} (u-\alpha)^{A-1} (u-\beta)^{B-1} (u-A\beta-B\alpha)(2u-\alpha-\beta)\, du$$

somit ist

$$L = -\int_{\alpha}^{\beta} e^{u(m+x)} (u-\alpha)^A (u-\beta)^B \log[(m+x)(u-\alpha)(u-\beta)]\, du$$

und jetzt giebt §. 5 die Mittel an die Hand, die gesuchte Differentialgleichung aufzustellen. Setzt man nämlich

$$(m+x) L'' + [3-(\alpha+\beta)(m+x)] L' + [-(A+1)\beta - (B+1)\alpha + \alpha\beta(m+x)] L = M$$

unter $L$ den in 64) stehenden Ausdruck verstanden, so hat man folgende lineare Differentialgleichung:

$$(m+x) M'' + [3-(\alpha+\beta)(m+x)] M' + [-(A+1)\beta - (B+1)\alpha + \alpha\beta(m+x)] M = 0$$

welche von der sechsten Ordnung ist und der genügt wird durch

$$y = \int_{\alpha}^{\beta} e^{u(m+x)} (u-\alpha)^{A-1} (u-\beta)^{B-1} (u - A\beta - B\alpha) \log[(m+x)(u-\alpha)(u-\beta)]\, du$$

unter den vorher für $A$ und $B$ gemachten Voraussetzungen.

---

## III.

# Entwickelungen über ein Kapitel von Poisson's Mechanik.

Nach M. J. LIOUVILLE.

Von W. FIEDLER,

Lehrer an der Gewerbschule zu Chemnitz.

---

Der berühmte Herausgeber des „*Journal de Mathematiques*“ hat diese Abhandlung kurz nach dem Tode Poisson's (1840) bereits geschrieben; er glaubte als Poisson's Nachfolger am Längenbureau eine fromme Pflicht zu erfüllen, indem er eine Idee entwickelte, über welche Poisson oft mit ihm gesprochen und von deren Wichtigkeit er eingenommen war. Es handelte sich darum, auf ein beliebiges System von materiellen Punkten, für welches das Princip der Flächen statt hat, gewisse analytische Transformationen auszudehnen, welche die durch dieses Princip gelieferten Gleichungen stets annehmen, und welche Poisson in seiner Mechanik nur für den Fall eines Systems von unveränderlicher Form gegeben hat. Eben dies hat M. Liouville in der hier mitgetheilten Abhandlung ausgeführt und seinen Entwickelungen ein Beispiel von der Anwendbarkeit der erhaltenen Formeln hinzugefügt. Andere Anwendungen verspricht er später noch mitzutheilen. Bei der Redaction dieser Abhandlung hat er sich von dem

Texte Poisson's so wenig als möglich entfernt und deshalb einige Vereineinfachungen in den Details unterlassen, denn es schien ihm, als erreiche er durch jenen genauen Anschluss seinen Zweck am besten. Der Abhandlung geht eine historische Skizze voraus, welche wir dem deutschen Leser nicht vorenthalten wollen.

Man kennt die Methoden, welche die Geometer erdacht haben, um die Bewegung der Drehung eines Systems von unveränderlicher Form zu bestimmen. Durch sein Werk über die „Präcession der Aequinoctien" (1749) hat d'Alembert hier den Weg eröffnet und niemals ist eine grössere schöpferische Kraft entfaltet worden; unglücklicherweise fehlt überall in den Formeln und in den Details der Rechnung die Eleganz; ein wunderlicher Mangel oder eine Vernachlässigung, welche sich in den rein mathematischen Werken dieses ausgezeichneten Schriftstellers oft wiederfindet. Wenn man aber die Zeit bedenkt, in der er seine Arbeit schuf, so muss man seinen Geist bewundern. Man besass damals noch nicht einmal die sechs allgemeinen Gleichungen des Gleichgewichts freier Systeme, nur die drei ersten kannte man, welche ausdrücken, dass die Summe der nach einer beliebigen Richtung genommenen Componenten der Kräfte Null ist, nicht die drei anderen, die sogenannten Momentengleichungen, welche allein übrig bleiben, wenn man einen festen Punkt in das System einführt. Diese hat d'Alembert zum ersten Male in eben dem Werke gegeben, von welchem wir sprechen, sie bilden die wesentliche Grundlage desselben. Von denselben geht d'Alembert durch sein Princip (*Traité de Dynamique*, 1743) zu den Gleichungen der Bewegung über, so dass die ganze Uebersetzung des Problems in Gleichungen ihm eigenthümlich angehört. Durch alle Schwierigkeiten einer noch wenig entwickelten, in ihrem Gange noch unsicheren Analysis führt er uns endlich ans Ziel, und wir sehen uns Meister eines Problems, dessen Schwierigkeiten alle Anstrengungen Newton's selbst nicht bewältigt hatten; und gleichzeitig erhalten wir die Gesetze der Präcession der Aequinoctien und finden die Ursache und die mathematische Erklärung der nicht weniger merkwürdigen Erscheinung der Nutation, deren Existenz ein unsterblicher Astronom, Bradley, durch eine Reihe genauer Beobachtungen soeben bewiesen hatte. (Bradley machte seine Entdeckung öffentlich bekannt 1747, 1749 erschien d'Alembert's Werk.)

Nach d'Alembert folgte Euler und mit ihm kam die Eleganz. Euler hat zuerst die Gleichungen der Rotationsbewegung eines Systems von unveränderlicher Gestalt in ihrer endgiltigen Form aufgestelt, auch zuerst die strengen Integrale derselben für den Fall aufgefunden, in welchem die äusseren Kräfte Null sind. Hier wie überall ist seine Ueberlegenheit im Calcul offenbar. Euler selbst hat die Priorität von d'Alembert's Arbeit über die Präcession der Aequinoctien anerkannt; er war bis dahin durch Hindernisse aufgehalten worden, die ihm fast unüberwindlich er-

schienen waren, sobald aber d'Alembert die ersten Schwierigkeiten beseitigt hatte, nahm er seine Revanche durch ausgezeichnete Vervollkommnungen der Methode.

Nachher haben Lagrange, Laplace und andere Geometer, Poisson insbesondere diese Klasse von Fragen fortgesetzt behandelt und neue Probleme gelöst oder die alten Auflösungen vervollkommnet.

Sie hatten sich alle auf die analytische Methode beschränkt; aber nach ihnen hat M. Poinsot in lichtvoller Weise den Gegenstand durch eine synthetische Methode behandelt in seiner *Théorie nouvelle de la rotation des corps.* (*Journal de Math.* 1. *ser. t. XVI.*) Die analytischen Auflösungen, welche man vorher besass, verlieren damit nichts an ihrem Werthe, sie haben ihre eigenthümlichen Verdienste, und die Belehrung, die man aus ihrem Studium schöpfen kann, wird noch lange eine Quelle von Fortschritten für die Wissenschaft sein.

Poisson, welcher das Problem von der Rotationsbewegung eines Systems von unveränderlicher Form mehrfach behandelt hat, hielt mit Recht viel von der Methode, die er in seiner Mechanik zur Bildung der Differentialgleichungen des Systems gegeben hat; der von ihm angezeigte Weg ist wirklich sehr einfach, seine Formeln sind elegant und die darin vorhandene Symmetrie erleichtert die Rechnung und gruppirt die Resultate unter sich so, dass man in jedem Augenblick die einen aus den anderen durch ein geschlossenes System von Permutationen ableiten kann. Indem er sich dann in einem im 15. Hefte des *Journal de l'Ecole polytechnique* aufgenommenen Memoire mit derselben Aufgabe beschäftigte, hat Poisson die Gleichungen der auf unveränderliche Ebenen bezogenen Flächen angewendet und sie durch den Calcul in Gleichungen umgewandelt, welche sich auf bewegliche Achsen beziehen. In seiner Mechanik folgt er einem davon abweichenden Wege und wendet, wenn auch nicht die Gleichungen der Flächen, so doch wenigstens die Combination des Princips von d'Alembert und der Gesetze des Gleichgewichts, welche sie liefern, direct auf bewegliche Achsen an. Diese Verfahrungsweise fordert einige Vorsicht und analytische Transformationen, welche Poisson mit Sorgfalt entwickelt hat.

Aber das Princip der Flächen entspricht nicht allein den Systemen von unveränderlicher Form, es dehnt sich auf eine unbegrenzte Zahl anderer Systeme aus, für welche der Calcul von Poisson einigermaassen abgeändert werden müsste. Da wirklich die Hauptachsen der Trägheit in jedem Augenblick ihre Lage ändern können, nicht allein im absoluten Raume, sondern auch in Beziehung zu den verschiedenen Punkten des Systems, so müssen die Werthe der Trägheitsmomente ebenso veränderlich sein.

Eben dies nun hatte Poisson vor, zum letzten Male auf seine Analyse zurückzukommen, um sie auf den allgemeinen Fall auszudehnen, von

dem wir soeben gesprochen haben. Andere Arbeiten haben ihn daran gehindert, und er hat dies Vorhaben, von dem er mich oft unterhalten, nicht ausführen können. Ich will versuchen, hierin wenigstens das Stillschweigen des grossen Geometers zu ergänzen, welchen wir verloren haben. Meine Aufgabe wird übrigens leicht sein, denn ich werde, so zu sagen, nur ein Kapitel seiner Mechanik zu commentiren haben.

## I.

Wir betrachten ein System von Moleculen oder materiellen Punkten $m$, $m'$, $m''$..., welches der einzigen Bedingung unterworfen ist, dass darin das Princip der Flächen für einen gewissen Anfangspunkt $O$ Giltigkeit habe, so dass wir, indem wir das System auf drei rechtwinklige Achsen $Ox$, $Oy$, $Oz$ von festen Richtungen beziehen und durch $mX$. $mY$, $mZ$ die Componenten der äusseren bewegenden Kräfte nach diesen Achsen gemessen bezeichnen, welche auf jedes Molecul in der Masse wirken, die drei bekannten Gleichungen haben:

$$\Sigma m\left(y\frac{d^2z}{dt^2}-z\frac{d^2y}{dt^2}\right)=\Sigma m\,(yZ-zY),$$

$$\Sigma m\left(z\frac{d^2x}{dt^2}-x\frac{d^2z}{dt^2}\right)=\Sigma m\,(zX-xZ),$$

$$\Sigma m\left(x\frac{d^2y}{dt^2}-y\frac{d^2x}{dt^2}\right)=\Sigma m\,(xY-yX),$$

welche sich, wenn ihre zweiten Theile Null sind, integriren lassen und dann das speciellere Princip von der Erhaltung der Flächen ergeben. Diese Gleichungen drücken aus, dass immer die Summen der Momente der verlorenen Kräfte, im Verhältniss respective zur Achse $Ox$, $Oy$, $Oz$ genommen, gleich Null sind. Man vereinfacht sie, indem man die zweiten Theile durch einen einzigen Buchstaben $L$, $M$, $N$ bezeichnet; sie werden:

$$\Sigma m\left(y\frac{d^2z}{dt^2}-z\frac{d^2y}{dt^2}\right)=L,$$

$$\Sigma m\left(z\frac{d^2x}{dt^2}-x\frac{d^2z}{dt^2}\right)=M,$$

$$\Sigma m\left(x\frac{d^2y}{dt^2}-y\frac{d^2x}{dt^2}\right)=N.$$

Das Zeichen $\Sigma$ erstreckt sich auf alle Molecule $m$, $m'$, $m''$... Diese Molecule können frei oder unter sich verbunden sein und sie können in beliebiger Art auf einander wirken, wenn nur vorausgesetzt werden darf, dass Wirkung und Gegenwirkung einander gleich und direct entgegengesetzt seien, dass also diese inneren Kräfte in dem zweiten Theile unserer Gleichungen nicht in Rechnung zu ziehen sind, da die sie einführenden Glieder sich gegenseitig aufheben, weil sie paarweis einander gleich und von entgegengesetzten Zeichen sind. Der Punkt $O$ kann fest oder beweglich sein, muss aber in diesem letzteren Falle mit dem Schwerpunkt des Systems zu-

sammenfallen oder nur eine geradlinige gleichförmige Bewegung haben. Hiernach lege man durch den Punkt $O$ drei andere unter sich rechtwinklige Achsen $Ox_1$, $Oy_1$, $Oz_1$, welche aber nach irgend einem Gesetz beweglich sind, und verlange, das Princip der Flächen auf diese beweglichen Achsen zu beziehen. Man kann dies in verschiedener Weise ausführen, entweder indem man die oben für Achsen von fester Richtung geschriebenen Gleichungen analytisch transformirt, so wie es Poisson im XV. Hefte des *Journal de l'Ecole polytechnique* gethan hat, oder indem man die Bedingung der Gleichheit der Momentesummen der verlorenen Kräfte mit der erforderlichen Vorsicht direct auf bewegliche Achsen $Ox_1$, $Oy_1$, $Oz_1$ anwendet, welcher letzteren Methode Poisson in seiner Mechanik gefolgt ist. Wir werden demgemäss diese Methode hier zunächst entwickeln.

Wir nehmen natürlich die meisten der Poisson'schen Bezeichnungen an und nennen also mit ihm $a, b, c, a', b', c', a'', b'', c''$ die Cosinus der Winkel $xOx_1$, $xOy_1$, $xOz_1$, $yOx_1$, $yOy_1$, $yOz_1$, $zOx_1$, $zOy_1$, $zOz_1$, dann werden wir haben:

$$x = ax_1 + by_1 + cz_1,$$
$$y = a'x_1 + b'y_1 + c'z_1,$$
$$z = a''x_1 + b''y_1 + c''z_1.$$

Die Grössen $a, b, c, a' \ldots$ sind in jedem Augenblick für alle Punkte des Systems $m, m', m'' \ldots$ dieselben, aber sie verändern sich während der Bewegung und man muss sie als Functionen der Zeit $t$ betrachten. Und da es sich hier nicht mehr um ein System von unveränderlicher Form handelt, welchem die Achsen $Ox_1$, $Oy_1$, $Oz_1$ verbunden wären, so sind auch die Coordinaten $x_1$, $y_1$, $z_1$ mit der Zeit veränderlich. Indem man die Werthe von $x, y, z$ im Verhältniss zu $t$ differentiirt, ergiebt sich:

$$\frac{dx}{dt} = x_1 \frac{da}{dt} + y_1 \frac{db}{dt} + z_1 \frac{dc}{dt} + a \frac{dx_1}{dt} + b \frac{dy_1}{dt} + c \frac{dz_1}{dt},$$
$$\frac{dy}{dt} = x_1 \frac{da'}{dt} + y_1 \frac{db'}{dt} + z_1 \frac{dc'}{dt} + a' \frac{dx_1}{dt} + b' \frac{dy_1}{dt} + c' \frac{dz_1}{dt},$$
$$\frac{dz}{dt} = x_1 \frac{da''}{dt} + y_1 \frac{db''}{dt} + z_1 \frac{dc''}{dt} + a'' \frac{dx_1}{dt} + b'' \frac{dy_1}{dt} + c'' \frac{dz_1}{dt}.$$

Hier muss man an gewisse sehr bekannte Bedingungsgleichungen erinnern, welche zwischen den Grössen $a, b, c, a' \ldots$ stattfinden, und welche die einen von der Form

$$a^2 + b^2 + c^2 = 1, \quad a^2 + a'^2 + a''^2 = 1 \text{ u. s. w.},$$

die anderen von der Form

$$ab + a'b' + a''b'' = 0, \quad aa' + bb' + cc' = 0 \text{ u. s. w.}$$

sind; indem man sie differentiirt, schliesst man daraus

$$ada + bdb + cdc = 0, \quad ada + a'da' + a''da'' = 0 \text{ u. s. w.}$$

und auch

$$d(ab + a'b' + a'b'') = 0 \text{ u. s. w.};$$

man sieht hieraus, dass die beiden Grössen

$$b\,da + b'da' + b''da''$$

und

$$a\,db + a'db' + a''db''$$

gleich und von entgegengesetztem Zeichen sind. Setzen wir demnach mit Poisson

$$b\frac{da}{dt} + b'\frac{da'}{dt} + b''\frac{da''}{dt} = -a\frac{db}{dt} - a'\frac{db'}{dt} - a''\frac{db''}{dt} = r,$$

und ebenso

$$c\frac{db}{dt} + c'\frac{db'}{dt} + c''\frac{db''}{dt} = -b\frac{dc}{dt} - b'\frac{dc'}{dt} - b''\frac{dc''}{dt} = p,$$

$$a\frac{dc}{dt} + a'\frac{dc'}{dt} + a''\frac{dc''}{dt} = -c\frac{da}{dt} - c'\frac{da'}{dt} - c''\frac{da''}{dt} = q.$$

Man weiss, dass, indem man die neun Cosinus $a, b, c, a' \ldots$ mittelst der drei Winkel $\varphi$, $\vartheta$, $\psi$ wie folgt ausdrückt:

$$\begin{aligned}
a &= \cos\vartheta \,.\, \sin\psi \,.\, \sin\varphi + \cos\psi \,.\, \cos\varphi,\\
b &= \cos\vartheta \,.\, \sin\psi \,.\, \cos\varphi - \cos\psi \,.\, \sin\varphi,\\
c &= \sin\vartheta \,.\, \sin\psi,\\
a' &= \cos\vartheta \,.\, \cos\psi \,.\, \sin\varphi - \sin\psi \,.\, \cos\varphi,\\
b' &= \cos\vartheta \,.\, \cos\psi \,.\, \cos\varphi + \sin\psi \,.\, \sin\varphi,\\
c' &= \sin\vartheta \,.\, \cos\psi,\\
a'' &= -\sin\vartheta \,.\, \sin\varphi,\\
b'' &= -\sin\vartheta \,.\, \cos\varphi,\\
c'' &= \cos\vartheta,
\end{aligned}$$

man findet

$$\begin{aligned}
p\,dt &= \sin\varphi \,.\, \sin\vartheta \,.\, d\psi - \cos\varphi \,.\, d\vartheta,\\
q\,dt &= \cos\varphi \,.\, \sin\vartheta \,.\, d\psi + \sin\varphi \,.\, d\vartheta,\\
r\,dt &= d\varphi - \cos\vartheta \,.\, d\psi.
\end{aligned}$$

Mittelst der Ausdrücke von $a, b, c \ldots$ und $\vartheta, \varphi, \psi$ ist es auch leicht, sich zu versichern, dass

$$bc' - b'c = a'', \quad ca' - c'a = b'', \quad ab' - a'b = c'' \quad \text{u. s. w.}$$

Endlich hat man die Differentialformeln

$$\frac{da}{dt} = br - cq, \quad \frac{db}{dt} = cp - ar, \quad \frac{dc}{dt} = aq - bp \quad \text{u. s. w.}$$

Wir setzen voraus, dass alle diese Formeln dem Leser vollkommen bekannt sind. Indem wir nun zu den Gleichungen, welche

$$\frac{dx}{dt}, \quad \frac{dy}{dt}, \quad \frac{dz}{dt}$$

liefern, zurückkehren, multipliciren wir die erste derselben durch $a$, die zweite durch $a'$, die dritte durch $a''$ und bilden die Summe, und alsdann noch zwei analoge Summen, indem wir $b, b', b''$ und $c, c', c''$ zu Multiplicatoren wählen. So werden wir ohne Schwierigkeit finden

$$a\frac{dx}{dt}+a'\frac{dy}{dt}+a''\frac{dz}{dt}=qz_1-ry_1+\frac{dx_1}{dt},$$
$$b\frac{dx}{dt}+b'\frac{dy}{dt}+b''\frac{dz}{dt}=rx_1-pz_1+\frac{dy_1}{dt},$$
$$c\frac{dx}{dt}+c'\frac{dy}{dt}+c''\frac{dz}{dt}=py_1-qx_1+\frac{dz_1}{dt}.$$

Indem man ihrerseits die drei Gleichungen mit $a, b, c, a', b', c'$ oder $a'', b'', c''$ multiplicirt und die Summe in jedem Falle bildet, erhält man

$$\frac{dx}{dt}=a\ (qz_1-ry_1)+b\ (rx_1-pz_1)+c\ (py_1-qx_1)+a\ \frac{dx_1}{dt}+b\ \frac{dy_1}{dt}+c\ \frac{dz_1}{dt},$$
$$\frac{dy}{dt}=a'\ (qz_1-ry_1)+b'\ (rx_1-pz_1)+c'\ (py_1-qx_1)+a'\ \frac{dx_1}{dt}+b'\ \frac{dy_1}{dt}+c'\ \frac{dz_1}{dt},$$
$$\frac{dz}{dt}=a''(qz_1-ry_1)+b''(rx_1-pz_1)+c''(py_1-qx_1)+a''\frac{dx_1}{dt}+b''\frac{dy_1}{dt}+c''\frac{dz_1}{dt}.$$

Daraus zieht man durch Differentiation die Werthe der drei Componenten der beschleunigenden Kraft nach $Ox$, $Oy$, $Oz$, welche der Bewegung des Punktes $m$ entsprechen, d. h. die Werthe der drei Grössen

$$\frac{d^2x}{dt^2},\ \frac{d^2y}{dt^2},\ \frac{d^2z}{dt^2},$$

nämlich:

$$\begin{aligned}\frac{d^2x}{dt^2}=&\ a\left(z_1\frac{dq}{dt}-y_1\frac{dr}{dt}\right)+b\left(x_1\frac{dr}{dt}-z_1\frac{dp}{dt}\right)+c\left(y_1\frac{dp}{dt}-x_1\frac{dq}{dt}\right)\\&+(qz_1-ry_1)\frac{da}{dt}+(rx_1-pz_1)\frac{db}{dt}+(py_1-qx_1)\frac{dc}{dt}\\&+a\left(q\frac{dz_1}{dt}-r\frac{dy_1}{dt}\right)+b\left(r\frac{dx_1}{dt}-p\frac{dz_1}{dt}\right)+c\left(p\frac{dy_1}{dt}-q\frac{dx_1}{dt}\right)\\&+a\frac{d^2x_1}{dt^2}+b\frac{d^2y_1}{dt^2}+c\frac{d^2z_1}{dt^2}+\frac{dx_1}{dt}.\frac{da}{dt}+\frac{dy_1}{dt}.\frac{db}{dt}+\frac{dz_1}{dt}.\frac{dc}{dt};\end{aligned}$$

darin entspringen die die Differentiale von $x_1, y_1, z_1$ enthaltenden Glieder eben daraus, dass $x_1, y_1, z_1$ in Function der Zeit sich verändern, und man findet sie daher in den Formeln von Poisson nicht.

Man hat ebenso

$$\begin{aligned}\frac{d^2y}{dt^2}=&\ a'\left(z_1\frac{dq}{dt}-y_1\frac{dr}{dt}\right)+b'\left(x_1\frac{dr}{dt}-z_1\frac{dp}{dt}\right)+c'\left(y_1\frac{dp}{dt}-x_1\frac{dq}{dt}\right)\\&+(qz_1-ry_1)\frac{da'}{dt}+(rx_1-pz_1)\frac{db'}{dt}+(py_1-qx_1)\frac{dc'}{dt}\\&+a'\left(q\frac{dz_1}{dt}-r\frac{dy_1}{dt}\right)+b'\left(r\frac{dx_1}{dt}-p\frac{dz_1}{dt}\right)+c'\left(p\frac{dy_1}{dt}-q\frac{dx_1}{dt}\right)\\&+a'\frac{d^2x_1}{dt^2}+b'\frac{d^2y_1}{dt^2}+c'\frac{d^2z_1}{dt^2}+\frac{dx_1}{dt}.\frac{da'}{dt}+\frac{dy_1}{dt}.\frac{db'}{dt}+\frac{dz_1}{dt}.\frac{dc'}{dt},\end{aligned}$$

und

$$\frac{d^2 z}{dt^2} = a''\left(z_1 \frac{dq}{dt} - y_1 \frac{dr}{dt}\right) + b''\left(x_1 \frac{dr}{dt} - z_1 \frac{dp}{dt}\right) + c''\left(y_1 \frac{dp}{dt} - x_1 \frac{dq}{dt}\right)$$
$$+ (qz_1 - ry_1)\frac{da''}{dt} + (rx_1 - pz_1)\frac{db''}{dt} + (py_1 - qx_1)\frac{dc''}{dt}$$
$$+ a''\left(q\frac{dz_1}{dt} - r\frac{dy_1}{dt}\right) + b''\left(r\frac{dx_1}{dt} - p\frac{dz_1}{dt}\right) + c''\left(p\frac{dy_1}{dt} - q\frac{dx_1}{dt}\right)$$
$$+ a''\frac{d^2x_1}{dt^2} + b''\frac{d^2y_1}{dt^2} + c''\frac{d^2z_1}{dt^2} + \frac{dx_1}{dt}\cdot\frac{da''}{dt} + \frac{dy_1}{dt}\cdot\frac{db''}{dt} + \frac{dz_1}{dt}\cdot\frac{dc''}{dt},$$

Gleichungen, deren zweite Theile sich übrigens aus dem zweiten Theil der ersten Gleichungen ganz einfach durch ein- oder zweimaliges Accentuiren der Symbole $a$, $b$, $c$ ableiten lassen.

Aus den nach den Achsen $Ox$, $Oy$, $Oz$ geschätzten Componenten $\frac{d^2x}{dt^2}$, $\frac{d^2y}{dt^2}$, $\frac{d^2z}{dt^2}$ der beschleunigenden Kraft, welche dem Punkt $m$ entspricht, erhält man die Componenten $p_1$, $q_1$, $r_1$ derselben Kraft, nach den Achsen $Ox_1$, $Oy_1$, $Oz_1$ gemessen, in der Lage genommen, die sie in der gegenwärtigen Zeit $t$ einnehmen. Man hat

$$p_1 = a\frac{d^2x}{dt^2} + a'\frac{d^2y}{dt^2} + a''\frac{d^2z}{dt^2},$$
$$q_1 = b\frac{d^2x}{dt^2} + b'\frac{d^2y}{dt^2} + b''\frac{d^2z}{dt^2},$$
$$r_1 = c\frac{d^2x}{dt^2} + c'\frac{d^2y}{dt^2} + c''\frac{d^2z}{dt^2}.$$

Die Substitution der oben für

$$\frac{d^2x}{dt^2},\quad \frac{d^2y}{dt^2},\quad \frac{d^2z}{dt^2}$$

erhaltenen Werthe liefert uns nach der Reduction die Gleichungen

$$p_1 = z_1\frac{dq}{dt} - y_1\frac{dr}{dt} - (q^2 + r^2)x_1 + pqy_1 + prz_1 + 2q\frac{dz_1}{dt} - 2r\frac{dy_1}{dt} + \frac{d^2x_1}{dt^2},$$
$$q_1 = x_1\frac{dr}{dt} - z_1\frac{dp}{dt} - (r^2 + p^2)y_1 + qrz_1 + pqx_1 + 2r\frac{dx_1}{dt} - 2p\frac{dz_1}{dt} + \frac{d^2y_1}{dt^2},$$
$$r_1 = y_1\frac{dp}{dt} - x_1\frac{dq}{dt} - (p^2 + q^2)z_1 + prx_1 + qry_1 + 2p\frac{dy_1}{dt} - 2q\frac{dx_1}{dt} + \frac{d^2z_1}{dt^2}.$$

Nun können wir mit Poisson die Gleichungen aufstellen, welche die Gleichheit der Momentsummen der verlorenen Kräfte, im Verhältniss zu den Achsen $Ox_1$, $Oy_1$, $Oz_1$ in der Lage genommen, welche diese zur Zeit $t$ einnehmen, mit Null ausdrücken. Diese Gleichungen sind

$$\Sigma m(y_1 r_1 - z_1 q_1) = L_1,$$
$$\Sigma m(z_1 p_1 - x_1 r_1) = M_1,$$
$$\Sigma m(x_1 q_1 - y_1 p_1) = N_1,$$

und es sind in dieselben für $p_1$, $q_1$, $r_1$ ihre Werthe zu setzen, und man hat

um abzukürzen, die Momentesummen der äusseren Kräfte im Verhältniss zu den Achsen $Ox_1$, $Oy_1$, $Oz_1$ durch $L_1$, $M_1$, $N_1$ bezeichnet, so dass

$$\Sigma m (y_1 Z_1 - z_1 Y_1) = L_1,$$
$$\Sigma m (z_1 X_1 - x_1 Z_1) = M_1,$$
$$\Sigma m (x_1 Y_1 - y_1 X_1) = N_1,$$

wenn $mX_1$, $mY_1$, $mZ_1$ die Componenten der im Punkte $m$ wirkenden bewegenden Kraft bedeuten.

## II.

Es ist noch übrig, die ersten Theile der Gleichungen

$$\Sigma m (y_1 r_1 - z_1 q_1) = L_1,$$
$$\Sigma m (z_1 p_1 - x_1 r_1) = M_1,$$
$$\Sigma m (x_1 q_1 - y_1 p_1) = N_1$$

zu entwickeln, indem wir statt $p_1$, $q_1$, $r_1$ ihre Werthe einsetzen. Wir finden alsbald, dass die Differenz

$$y_1 r_1 - z_1 q_1$$

gleich ist mit

$$(y_1^2 + z_1^2)\frac{dp}{dt} - x_1 y_1 \frac{dq}{dt} - x_1 z_1 \frac{dr}{dt} + y_1 \frac{d^2 z_1}{dt^2} - z_1 \frac{d^2 y_1}{dt^2}$$
$$+ (r^2 - q^2) y_1 z_1 + pr x_1 y_1 - pq x_1 z_1 + qr (y_1^2 - z_1^2)$$
$$+ 2p\left(y_1 \frac{dy_1}{dt} + z_1 \frac{dz_1}{dt}\right) - 2 q y_1 \frac{dx_1}{dt} - 2 r z_1 \frac{dx_1}{dt}.$$

Man muss diese verschiedenen Glieder mit $m$ multipliciren, alsdann die Summe $\Sigma$ bezüglich aller Punkte $m$, $m'$, $m''$ ... bilden und endlich das Resultat mit $L_1$ vergleichen.

Wir setzen

$$A = \Sigma m (y_1^2 + z_1^2),\quad B = \Sigma m (z_1^2 + x_1^2),\quad C = \Sigma m (x_1^2 + y_1^2),$$
$$D = \Sigma m y_1 z_1,\quad E = \Sigma m z_1 x_1,\quad F = \Sigma m x_1 y_1.$$

Es ergiebt sich alsdann

$$\Sigma m \left(y_1 \frac{dz_1}{dt} + z_1 \frac{dy_1}{dt}\right) = \frac{dD}{dt}.$$

Wenn man also

$$\Sigma m \left(y_1 \frac{dz_1}{dt} - z_1 \frac{dy_1}{dt}\right) = \alpha$$

setzt, so schliesst man daraus

$$\Sigma m y_1 \frac{dz_1}{dt} = \tfrac{1}{2}\left(\frac{dD}{dt} + \alpha\right),$$
$$\Sigma m z_1 \frac{dy_1}{dt} = \tfrac{1}{2}\left(\frac{dD}{dt} - \alpha\right).$$

Indem man setzt

$$\Sigma m \left(z_1 \frac{dx_1}{dt} - x_1 \frac{dz_1}{dt}\right) = \beta,\quad \Sigma m \left(x_1 \frac{dy_1}{dt} - y_1 \frac{dx_1}{dt}\right) = \gamma$$

findet man ebenso

$$\Sigma m z_1 \frac{dx_1}{dt} = \frac{1}{2}\left(\frac{dE}{dt} + \beta\right),$$
$$\Sigma m x_1 \frac{dz_1}{dt} = \frac{1}{2}\left(\frac{dE}{dt} - \beta\right),$$
$$\Sigma m x_1 \frac{dy_1}{dt} = \frac{1}{2}\left(\frac{dF}{dt} + \gamma\right),$$
$$\Sigma m y_1 \frac{dx_1}{dt} = \frac{1}{2}\left(\frac{dF}{dt} - \gamma\right).$$

Das Resultat der oben angezeigten Summirung lässt sich damit einfach genug schreiben und man erhält ohne Schwierigkeit

$$L_1 = \frac{d}{dt}(Ap - Fq - Er + \alpha) + D(r^2 - q^2) + (C - B)qr + Fpr - Epq + q\gamma - rp.$$

Dies ist eine unserer drei Gleichungen in endlicher Form und die beiden anderen gehen daraus durch einfache Buchstabenvertauschung hervor, wie folgt:

$$M_1 = \frac{d}{dt}(Bq - Dr - Fp + \beta) + E(p^2 - r^2) + (A - C)pr + Dpq - Fqr + r\alpha - p\gamma,$$
$$N_1 = \frac{d}{dt}(Cr - Ep - Dq + \gamma) + F(q^2 - p^2) + (B - A)pq + Eqr - Dpr + p\beta - q\alpha.$$

Diese unsere Gleichungen vereinfachen sich sehr, wenn man die Achsen $Ox_1$, $Oy_1$, $Oz_1$ stets so wählt, dass man hat

$$D = 0, \quad E = 0, \quad F = 0,$$

d. h. so, dass dieselben in jedem Augenblick für den Punkt $O$ die drei Hauptachsen der Trägheit des veränderlichen Systems $m$, $m'$, $m''$ ... sind; dies ist stets möglich, weil die Bedingung der Rechtwinkligkeit, die den drei Achsen $Ox_1$, $Oy_1$, $Oz_1$ einzig und allein auferlegt ist, wie man weiss, durch die drei Hauptachsen der Trägheit eines Körpers bezüglich eines beliebigen Punktes immer erfüllt wird.

Man erhält alsdann

$$\frac{d(Ap + \alpha)}{dt} + (C - B)qr + q\gamma - r\beta = L_1,$$
$$\frac{d(Bq + \beta)}{dt} + (A - C)pr + r\alpha - p\gamma = M_1,$$
$$\frac{d(Cr + \gamma)}{dt} + (B - A)pq + p\beta - q\alpha = N_1;$$

diese so einfachen Gleichungen werden, wie ich glaube, zahlreiche Anwendungen finden.

Indem man sie respective mit $a$, $b$, $c$ multiplicirt, dann addirt und sich erinnert, dass nach einem Theorem von Euler über die Momente der Kräfte

$$aL_1 + bM_1 + cN_1 = L,$$

so leitet man daraus ab:

$$L = a\frac{d(Ap + \alpha)}{dt} + b\frac{d(Bq + \beta)}{dt} + c\frac{d(Cr + \gamma)}{dt}$$
$$+ (Ap + \alpha)(br - cq) + (Bq + \beta)(cp - ar) + (Cr + \gamma)(aq - bp).$$

Indem man alsdann bemerkt, dass

$$br - cq = \frac{da}{dt}, \quad cp - ar = \frac{db}{dt}, \quad aq - bp = \frac{dc}{dt},$$

schliesst man daraus:

$$L = \frac{d}{dt}[a(Ap + \alpha) + b(Bq + \beta) + c(Cr + \gamma)].$$

Ebenso

$$M = \frac{d}{dt}[a'(Ap + \alpha) + b'(Bq + \beta) + c'(Cr + \gamma)],$$

und

$$N = \frac{d}{dt}[a''(Ap + \alpha) + b''(Bq + \beta) + c''(Cr + \gamma)].$$

Wenn man, anstatt mit den vereinfachten Formeln zu operiren, die allgemeinen zu Grunde gelegt hätte, so wäre das Resultat, welches ich durch Vollziehung einer Integration in Bezug auf $t$, wovon $L$, $M$, $N$ implicite Functionen sind, vereinfacht habe, gewesen:

$$\int L\,dt = a(Ap - Fq - Er + \alpha) + b(Bq - Dr - Fp + \beta) + c(Cr - Ep - Dq + \gamma),$$
$$\int M\,dt = a'(Ap - Fq - Er + \alpha) + b'(bq - Dr - Fp + \beta) + c'(Cr - Ep - Dq + \gamma),$$
$$\int N\,dt = a''(Ap - Fq - Er + \alpha) + b''(Bq - Dr - Fp + \beta) + c''(Cr - Ep - Dq + \gamma).$$

Wenn man hier differentiirte und die Derivirten von $a$, $b \ldots$ durch ihre Werthe $\frac{da}{dt} = br - cq$, $\frac{db}{dt} = cp - ar$ u. s. w. ersetzte, die so erhaltenen Gleichungen mit $a$, $a'$, $a''$ multiplicirte und die Summe bildete, hernach dieselbe Rechnung mit den Multiplicatoren $b$, $b'$, $b''$ oder $c$, $c'$, $c''$ wiederholte, endlich sich erinnerte, dass

$$L_1 = aL + a'M + a''N,$$
$$M_1 = aL + b'M + b''N,$$
$$N_1 = cL + c'M + c''N,$$

so würde man die Werthe von $L_1$, $M_1$, $N_1$ wiederfinden, von denen wir ausgegangen sind, so dass, wenn die letzteren Gleichungen direct begründet wären, die anderen sich mit Leichtigkeit daraus ableiten würden. Diesen Weg hat Poisson für das Problem der Rotation der Körper im XV. Hefte des *Journal de l'Ecole polytechnique* eingeschlagen; ich komme sogleich darauf zurück und man wird sehen, dass er sehr einfach ist. Gegenwärtig beschränke ich mich darauf, bemerklich zu machen, dass, wenn die Momentesummen $L$, $M$, $N$ Null sind, ihre Integrale einfache Constante $l$, $l'$, $l''$ sein werden, woraus folgt, dass man diese drei Integrale haben wird

$$l = a(Ap - Fq - Er + \alpha) + b(Bq - Dr - Fp + \beta) + c(Cr - Ep - Dq + \gamma),$$
$$l' = a'(Ap - Fq - Er + \alpha) + b'(Bq - Dr - Fp + \beta) + c'(Cr - Ep - Dq + \gamma),$$
$$l'' = a''(Ap - Fq - Er + \alpha) + b''(Bq - Dr - Fp + \beta) + c''(Cr - Ep - Dq + \gamma).$$

Es sind diese Integrale, welche hier naturgemäss das Princip der Erhaltung der Flächen liefern werden. Man kann sie noch unter diese Form bringen:

$$Ap - Fq - Er + \alpha = al + a'l' + a''l'',$$
$$Bq - Dr - Fp + \beta = bl + b'l' + b''l'',$$
$$Cr - Ep - Dq + \gamma = cl + c'l' + c''l''.$$

Die drei Constanten $l$, $l'$, $l''$ beziehen sich auf Flächen, die respective in den Ebenen der $yz$, der $xz$ und der $xy$ beschrieben sind. Wenn man setzt

$$k = \sqrt{l^2 + l'^2 + l''^2},$$

so wird $k$ die Maximalfläche ausdrücken, welche, wie man weiss, einer gewissen festen und leicht zu bestimmenden Ebene entspricht, die Laplace die unveränderliche Ebene genannt hat. Nichts hindert, diese unveränderliche Ebene zur Ebene der $xy$ zu wählen; alsdann wird man haben

$$l = 0, \quad l' = 0, \quad l'' = k,$$

und unsere drei Integrale reduciren sich auf

$$Ap - Fq - Er + \alpha = a''k,$$
$$Bq - Dr - Fp + \beta = b''k,$$
$$Cr - Ep - Dq + \gamma = c''k.$$

Indem man die Cosinus $a''$, $b''$, $c''$ mittelst der drei Winkel $\vartheta$, $\varphi$, $\psi$ ausdrückt, deren sich Poisson nach Euler bedient hat, werden unsere Formeln:

$$\sin\vartheta \sin\varphi = -\frac{1}{k}(Ap - Fq - Er + \alpha),$$

$$\sin\vartheta \cos\varphi = -\frac{1}{k}(Bq - Dr - Fp + \beta),$$

$$\cos\vartheta = \frac{1}{k}(Cr - Ep - Dq + \gamma).$$

Sie vereinfachen sich wesentlich, wenn man hat

$$D = 0, \quad E = 0, \quad F = 0$$

und noch mehr, wenn auch

$$\alpha = 0, \quad \beta = 0, \quad \gamma = 0,$$

wie es in einem Problem, mit dem wir uns später beschäftigen werden, vorkommen wird. Sie reduciren sich dann auf

$$\sin\vartheta \sin\varphi = -\frac{Ap}{k}, \quad \sin\vartheta \cos\varphi = -\frac{Bq}{k}, \quad \cos\vartheta = \frac{Cr}{k},$$

und stimmen also mit denen überein, die man für ein System von unveränderlicher Form gefunden hätte, nur dass $A$, $B$, $C$ hier keine Constanten sind.

## III.

Wir kommen nun auf die von Poisson im *Journal de l'Ecole polytechnique* angewandte Methode zurück, um auch sie auf den Gegenstand unserer Untersuchungen anzuwenden. Diese Methode nimmt ihren Ausgangspunkt in den Gleichungen:

$$\Sigma m\left(y\frac{dz}{dt}-z\frac{dy}{dt}\right)=\int L\,dt,$$
$$\Sigma m\left(z\frac{dx}{dt}-x\frac{dz}{dt}\right)=\int M\,dt,$$
$$\Sigma m\left(x\frac{dy}{dt}-y\frac{dx}{dt}\right)=\int N\,dt,$$

welche von der ersten Ordnung sind und deren Transformation nur Rechnungen von geringer Ausdehnung erfordert, so dass dadurch die Inconvenienz aufgewogen wird, nach welcher sie zunächst nicht zu getrennten Gleichungen zwischen $p$, $q$, $r$ und $t$ leiten.

Mittelst der Formeln

$$x=ax_1+by_1+cz_1,$$
$$y=a'x_1+b'y_1+c'z_1,$$
$$z=a''x_1+b''y_1+c''z_1,$$

und der folgenden, die man, wie wir sahen, daraus herleitet,

$$\frac{dx}{dt}=a(qz_1-ry_1)+b(rx_1-pz_1)+c(py_1-qx_1)+a\frac{dx_1}{dt}+b\frac{dy_1}{dt}+c\frac{dz_1}{dt},$$
$$\frac{dy}{dt}=a'(qz_1-ry_1)+b'(rx_1-pz_1)+c'(py_1-qx_1)+a'\frac{dx_1}{dt}+b'\frac{dy_1}{dt}+c'\frac{dz_1}{dt},$$
$$\frac{dz}{dt}=a''(qz_1-ry_1)+b''(rx_1-pz_1)+c''(py_1-qx_1)+a''\frac{dx_1}{dt}+b''\frac{dy_1}{dt}+c''\frac{dz_1}{dt},$$

wird man die Werthe der drei Ausdrücke bilden:

$$y\frac{dz}{dt}-z\frac{dy}{dt},\quad z\frac{dx}{dt}-x\frac{dz}{dt},\quad x\frac{dy}{dt}-y\frac{dx}{dt};$$

der Werth von

$$x\frac{dy}{dt}-y\frac{dx}{dt}$$

z. B. wird sein

$$(bc'-b'c)\left(py_1^2-qx_1y_1-rx_1z_1+pz_1^2+y_1\frac{dz_1}{dt}-z_1\frac{dy_1}{dt}\right)$$
$$+(ca'-c'a)\left(qz_1^2-ry_1z_1-py_1x_1+qx_1^2+z_1\frac{dx_1}{dt}-x_1\frac{dz_1}{dt}\right)$$
$$+(ab'-a'b)\left(rx_1^2-pz_1x_1-qz_1y_1+ry_1^2+x_1\frac{dy_1}{dt}-y_1\frac{dx_1}{dt}\right).$$

Man hat aber

$$bc'-b'c=a'',\quad ca'-c'a=b'',\quad ab'-a'b=c''$$

und erhält somit für den vorigen Ausdruck

$$a''\left[p(y_1^2+z_1^2)-qx_1y_1-rx_1z_1+y_1\frac{dz_1}{dt}-z_1\frac{dy_1}{dt}\right]$$
$$+b''\left[q(z_1^2+x_1^2)-ry_1z_1-py_1x_1+z_1\frac{dx_1}{dt}-x_1\frac{dz_1}{dt}\right]$$
$$+c''\left[r(x_1^2+y_1^2)-pz_1x_1-qz_1y_1+x_1\frac{dy_1}{dt}-y_1\frac{dx_1}{dt}\right].$$

Indem man ihn mit $m$ multiplicirt und die entsprechenden Ausdrücke für alle Molecüle $m, m', m'' \ldots$, für welche die Cosinus $a'', b'', c''$ nicht wechseln, addirt, so erschliesst man daraus den Werth von

$$\Sigma m\left(x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt}\right),$$

welchen man mit $\int N\,dt$ vergleichen muss.

Wenn man setzt, wie oben

$$A = \Sigma m(y_1^2 + z_1^2), \quad B = \Sigma m(z_1^2 + x_1^2), \quad C = \Sigma m(x_1^2 + y_1^2),$$
$$D = \Sigma m y_1 z_1, \quad E = \Sigma m z_1 x_1, \quad F = \Sigma m x_1 y_1,$$

und

$$\alpha = \Sigma m\left(y_1\frac{dz_1}{dt} - z_1\frac{dy_1}{dt}\right),$$
$$\beta = \Sigma m\left(z_1\frac{dx_1}{dt} - x_1\frac{dz_1}{dt}\right),$$
$$\gamma = \Sigma m\left(x_1\frac{dy_1}{dt} - y_1\frac{dx_1}{dt}\right),$$

so wird der endliche Werth von

$$\Sigma m\left(x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt}\right)$$

sein

$$a''(Ap - Fq - Er + \alpha) + b''(Bq - Dr - Fp + \beta) + c''(Cr - Ep - Dq + \gamma).$$

Man hat also

$$\int N\,dt = a''(Ap - Fq - Er + \alpha) + b''(Bq - Dr - Fp + \beta) + c''(Cr - Ep - Dq + \gamma),$$

und ebenso

$$\int M\,dt = a'(Ap - Fq - Er + \alpha) + b'(Bq - Dr - Fp + \beta) + c'(Cr - Ep - Dq + \gamma),$$

$$\int L\,dt = a(Ap - Fq - Er + \alpha) + b(Bq - Dr - Fp + \beta) + c(Cr - Ep - Dq + \gamma).$$

Dies sind die Gleichungen, welche wir an letzter Stelle in dem Vorigen auch erhalten hatten, und sie können ihrerseits zu den von den Cosinus $a, b, c \ldots$ befreiten Differentialgleichungen zwischen $p, q, r$ und $t$ führen. Wir haben Dem, was wir eben über diesen Gegenstand gesagt haben, nichts hinzuzufügen.

## IV.

Um eine einfache Anwendung unserer Formeln zu geben, betrachten wir einen im Verhältniss zu drei rechtwinkligen Ebenen $y_1 O z_1$, $z_1 O x_1$ und $x_1 O y_1$ ganz symmetrisch gestalteten festen Körper, wie es z. B. ein Ellipsoid ist, aber eine unendliche Menge anderer Körperformen sein können. Wir setzen die ihn zusammensetzende Materie, die wir übrigens homogen oder nicht homogen denken können, nach denselben Ebenen symmetrisch vertheilt voraus, so dass für die acht Massenelemente, welche den näm-

lichen absoluten Werthen der Coordinaten entsprechen, die Dichtigkeit immer dieselbe sei, und wir nehmen endlich auch an, dass die Temperatur in gleicher Weise die nämliche sei, nicht in allen Punkten des Körpers, aber immer in den acht Punkten, die den Coordinaten $(\pm x_1, \pm y_1, \pm z_1)$ entsprechen; dabei kann offenbar die Temperatur sich mit der Zeit in einer solchen Weise ändern, dass dadurch die angezeigte Gleichheit nicht gestört wird. Hiernach wird der Punkt $O$ immer der Schwerpunkt des Körpers bleiben und die Achsen $Ox_1$, $Oy_1$, $Oz_1$ werden immer seine drei Hauptachsen der Trägheit sein, so dass wir, wenn wir sie für die unserer Formeln nehmen, haben werden

$$D = 0, \quad E = 0, \quad F = 0.$$

Die Trägheitsmomente $A$, $B$, $C$ variiren offenbar mit der Zeit, weil die Form des Körpers in Folge der Temperaturveränderungen wechselt. Wenn man also diesen Körper auf eine beliebige Art in Bewegung setzt und alsdann sich selbst überlässt, so kann seine Rotationsbewegung nicht durch die gewöhnlichen Formeln bestimmt werden, welche $A$, $B$, $C$ als constant voraussetzen; aber sie kann ausgedrückt werden durch unsere Formeln, indem man darin

$$D = 0, \quad E = 0, \quad F = 0$$

und überdies

$$\alpha = 0, \quad \beta = 0, \quad \gamma = 0$$

voraussetzt; das letztere, weil nach den oben angenommenen Symetriebedingungen die für die in den acht Punkten der Gruppe $(\pm x_1, \pm y_1, \pm z_1)$ gedachten gleichen Massenelemente $m$ gebildeten Summen der Grössen

$$m x_1 \frac{dy_1}{dt}, \quad m y_1 \frac{dx_1}{dt} \text{ u. s. w.}$$

nicht anders als Null sein können, ganz ebenso wie die Summen der Producte $m x_1 y_1$, $m y_1 z_1$ u. s. w.

Dies reducirt unsere Differentialgleichungen zwischen $p$, $q$, $r$ und $t$ auf diese

$$\frac{d(Ap)}{dt} + (C - B)\, qr = 0,$$

$$\frac{d(Bq)}{dt} + (A - C)\, pr = 0,$$

$$\frac{d(Cr)}{dt} + (B - A)\, pq = 0,$$

und erlaubt, indem wir die Ebene der Maximalfläche zur Ebene der $xy$ wählen, sich der früher geschriebenen Integrale zu bedienen, nämlich

$$\sin\vartheta \,.\, \sin\varphi = -\frac{Ap}{k}, \quad \sin\vartheta \,.\, \cos\varphi = -\frac{Bq}{k}, \quad \cos\vartheta = \frac{Cr}{k};$$

die Quadratsumme derselben liefert

$$A^2 p^2 + B^2 q^2 + C^2 r^2 = k^2,$$

ein erstes Integral der Differentialgleichungen zwischen $p$, $q$, $r$ und $t$.

Wenn man zwei weitere Integrale derselben fände, so wären $p$, $q$, $r$ in Function der Zeit $t$ ausgedrückt, also auch $\vartheta$ und $\varphi$, und endlich $\psi$ mittelst des Ausdrucks

$$r\,dt = d\varphi - \cos\vartheta\,d\psi.$$

Die Winkel $\vartheta$, $\varphi$, $\psi$ bestimmen in jedem Augenblick die Lage der Achsen $Ox_1$, $Oy_1$, $Oz_1$, im Verhältniss zu welchen man sich die Lage der verschiedenen Theile des Körpers selbst immer leicht vorstellen kann, da auch ihre Bewegung bezüglich dieser Achsen durch das bekannt gedachte Gesetz der Temperaturveränderungen bestimmt ist. Bei den von uns gemachten Voraussetzungen können die auf den Achsen $Ox_1$, $Oy_1$, $Oz_1$ selbst gelegenen Punkte des Körpers nur längs dieser Achsen gleiten; die anderen Punkte können complicirtere relative Bewegungen haben, aber dieselben üben, da sie nur von dem Gesetz der Temperaturveränderung und der Natur des Körpers abhängen, auf unsere Formeln keinen anderen Einfluss, als indem sie nach einem Gesetz, welches wir als gegeben voraussetzen, die Trägheitsmomente $A$, $B$, $C$ veränderlich machen. Es bezeichnen also in unseren Formeln

$$\frac{d(Ap)}{dt} + (C-B)\,qr = 0,$$

$$\frac{d(Bq)}{dt} + (A-C)\,rp = 0,$$

$$\frac{d(Cr)}{dt} + (B-A)\,pq = 0,$$

$A$, $B$, $C$ bekannte Functionen der Zeit.

Das Integral

$$A^2p^2 + B^2q^2 + C^2r^2 = k^2,$$

welches oben durch ein weniger directes Mittel erhalten worden ist, leitet sich leicht aus diesen Differentialgleichungen ab, indem man sie respective mit den Factoren $Ap$, $Bq$, $Cr$ multiplicirt und die Summe bildet, welche sich dann als ein vollständiges Differential erweist.

Man würde auf der Stelle ein zweites Integral haben, wenn zwei der Trägheitsmomente immer unter sich gleich wären, wenn man z. B. $B = A$ hätte, welches für einen rings um die $z$-Achse sich vollkommen gleichen Körper der Fall wäre. Alsdann ist

$$\frac{d(Cr)}{dt} = 0,$$

folglich

$$Cr = const. = C_0 r_0,$$

wenn der Index 0 den Werth für $t = 0$ bedeutet. Also ist

$$r = \frac{C_0 r_0}{C} \text{ und } \cos\vartheta = \frac{Cr}{k} = \frac{C_0 r_0}{k} = const.$$

Der Winkel $\vartheta$ ist also unveränderlich. Indem man ihn als solchen in der Formel

$$Ap = -k \sin\vartheta . \sin\varphi$$

behandelt, schliesst man daraus

$$\frac{d(Ap)}{dt} = -k \sin\vartheta . \cos\varphi \frac{d\varphi}{dt}$$

und dieser Werth, sowie die von $q$ und $r$, nämlich

$$q = -\frac{k \sin\vartheta \cos\varphi}{B} \text{ und } r = \frac{k \cos\vartheta}{C}$$

in die Formel

$$\frac{d(Ap)}{dt} + (C-B)\,qr = 0$$

eingesetzt, liefert, da überdies $B = A$

$$\frac{d\varphi}{dt} = -k \cos\vartheta \frac{C-A}{AC};$$

woher

$$\varphi = \varphi_0 - k \cos\vartheta \int_0^t \frac{C-A}{AC}\,dt.$$

Endlich giebt die Formel

$$r\,dt = d\varphi - \cos\vartheta . d\psi$$

$$\psi = \psi_0 - k\int_0^t \frac{dt}{A},$$

und vollendet die Auflösung des Problems.

Die Gleichungen

$$\frac{d(Ap)}{dt} + (C-B)\,qr = 0,$$

$$\frac{d(Bq)}{dt} + (A-C)\,rp = 0,$$

$$\frac{d(Cr)}{dt} + (B-A)\,pq = 0,$$

können auch dann streng integrirt werden, wenn die Grössen $A$, $B$, $C$, obwohl einander ungleich, doch sich von einer Zeit zur andern nach dem nämlichen Gesetze ändern, d. h. wenn die anfänglichen Werthe $A_0$, $B_0$, $C_0$ sich am Ende der willkürlichen Zeit $t$ gleichmässig geändert finden, so dass

$$A = A_0 f(t), \quad B = B_0 f(t), \quad C = C_0 f(t),$$

wo die Function $f(t)$ überall dieselbe wäre. Wenn man nämlich dann setzt

$$p f(t) = u, \quad q f(t) = v, \quad r f(t) = w$$

und

$$\int_0^t \frac{dt}{f(t)} = \tau,$$

so werden unsere Gleichungen

$$A_0 \frac{du}{d\tau} + (C_0 - B_0) v w = 0,$$

$$B_0 \frac{dv}{d\tau} + (A_0 - C_0) w u = 0,$$

$$C_0 \frac{dw}{d\tau} + (B_0 - A_0) u v = 0;$$

sie sind also denen der Rotationsbewegung eines Systems von unveränderlicher Form gleich und lassen sich wie diese integriren. Man hat zunächst die beiden Integrale

$$A_0 u^2 + B_0 v^2 + C_0 w^2 = const.,$$

$$A_0^2 u^2 + B_0^2 v^2 + C_0^2 w^2 = const.,$$

welche $u$ und $v$ in Function von $w$ geben, worauf sich dann $\tau$ durch eine Quadratur auch als eine Function von $w$ ausdrücken lässt.

---

# Kleinere Mittheilungen.

---

I. **Einfachere Ableitung der früher mitgetheilten Sätze über die reellen Wurzeln der dreigliedrigen algebraischen Gleichungen.** Von M. W. DROBISCH. (Aus den Sitzungsberichten der K. S. Gesellschaft der Wissenschaften, 5. Juni 1858.) Professor R. Lobatto in Delft hat in den „*Verslagen en Mededeelingen der Koninklije Akademie van Wetenschappen, Afdeeling Natuurkunde*" Th. VII S. 335 eine kürzere Ableitung der von mir in den Berichten vom Jahre 1856, S. 21 vorgelegten Sätze, die reellen Wurzeln der dreigliedrigen algebraischen Gleichungen betreffend, gegeben. Er bedient sich dabei der Cartesischen Regel, wonach eine algebraische Gleichung nicht mehr positive oder negative Wurzeln haben kann, als in ihr beziehungsweise Zeichenwechsel oder Zeichenfolgen vorkommen, und weist die reellen Wurzeln, welche die dreigliedrige Gleichung haben muss, durch Substitution der reellen Wurzeln ihrer derivirten Gleichung in dem linken Theil der gegebenen und Vergleichung der Vorzeichen der dabei sich ergebenden Werthe nach. Den Vorzug der grösseren Kürze dieser Ableitungsweise anerkennend, räume ich Herrn Lobatto auch ein, dass die Zuziehung der Curven, durch deren Betrachtung sich mir jene Sätze ergeben haben, insofern dem Gegenstande etwas fremdartig erscheinen möge, als diese Curven nicht unmittelbar die Function, welche den linken Theil der Gleichung bildet, darstellen. Man kann jedoch, wie das Nachfolgende zei-

gen wird, sowohl den Gebrauch von Curven vermeiden, als auch die Cartesische Regel entbehren, wenn man einzig und allein untersucht, nach welchen Gesetzen die Function, die für die Wurzelwerthe Null wird, sich ändert, wenn ihre Variable alle Werthe von $-\infty$ bis $+\infty$ stetig durchläuft. Diese Untersuchungsweise, die überdies kaum weniger kurz ist als die des Herrn Lobatto, scheint mir die natürlichste und directeste. Sie führt zugleich zu einem vollständigen Ueberblick über die Gesammtheit der Werthe der Function, die den linken Theil der Gleichung bildet, und giebt, als eine zwar nicht nothwendige, aber immerhin willkommene Zugabe, die Gestalt der Curven an, welche die Werthe der Function in ihrem stetigen Zusammenhange veranschaulichen.

## §. 1.

Wir stellen die vier Formen, welche eine dreigliedrige algebraische Gleichung hinsichtlich der Vorzeichen ihrer beiden Constanten haben kann, in folgender Ordnung auf:

$$\text{I.} \quad F(x) = x^{m+n} - a x^m + b = 0,$$
$$\text{II.} \quad F(x) = x^{m+n} - a x^m - b = 0,$$
$$\text{III.} \quad F(x) = x^{m+n} + a x^m + b = 0,$$
$$\text{IV.} \quad F(x) = x^{m+n} + a x^m - b = 0,$$

und untersuchen zuerst, unter welchen Bedingungen diese Gleichungen positive reelle Wurzeln haben.

Durch Differentiation erhält man aus I. und II.:

$$A) \qquad F'(x) = (m+n)\, x^{m-1}\left(x^n - \frac{ma}{m+n}\right);$$

aus III. und IV.:

$$B) \qquad F'(x) = (m+n)\, x^{m-1}\left(x^n + \frac{ma}{m+n}\right).$$

Aus $A$) ersieht man, dass, sowohl für $x=0$ als für $x=\sqrt[n]{\frac{ma}{m+n}}$, $F'(x)=0$ wird, dass aber, wenn $x \gtrless \sqrt[n]{\frac{ma}{m+n}}$, $F'(x) \gtrless 0$ ist. Da nun zugleich $F(x)=b$, also positiv ist, so nimmt $F(x)$ von $x=0$ bis $x=\sqrt[n]{\frac{ma}{m+n}}$ ununterbrochen ab, von da an aber bis $x=+\infty$ ununterbrochen zu. Setzt man zur Abkürzung $\sqrt[n]{\frac{ma}{m+n}} = \alpha$, so erhält man

$$F(\alpha) = b - (mn)^{\frac{m}{n}}\left(\frac{a}{m+n}\right)^{\frac{m+n}{n}}.$$

Es ist daher

$$F(\alpha) \lesseqgtr 0, \quad \text{jenachdem} \quad \frac{b^n}{m^m n^n} \lesseqgtr \left(\frac{a}{m+n}\right)^{m+n},$$

oder, wenn wir zur Abkürzung

$$\frac{b^n}{m^m n^n} - \left(\frac{a}{m+n}\right)^{m+n} = \Delta$$

setzen: es ist $F(\alpha) \lesseqgtr 0$, jenachdem $\Delta \lesseqgtr 0$.

Ist nun in I. $F(\alpha) < 0$, so muss, da $F(x)$ von $x = 0$ bis $x = \alpha$ ununterbrochen abnimmt, es zwischen diesen beiden Werthen einen, aber auch nicht mehr als einen Werth von $x$ geben, der $F(x)$ Null macht; aber auch, da $F(x)$ von $x = \alpha$ bis $x = +\infty$ ununterbrochen wächst, und $F(+\infty)$ positiv ist, einen zweiten Werth, grösser als $\alpha$, der ebenfalls $F(x)$ Null macht.

Ist zweitens in I. $F(\alpha) = 0$, so fallen die beiden vorigen Werthe, von denen der eine grösser, der andere kleiner als $\alpha$ ist, mit $\alpha$ zusammen.

Ist drittens in I. $F(\alpha) > 0$, so hat $F(x)$ zwischen $x = 0$ und $x = +\infty$ nur positive Werthe, kann also in diesem Intervall nicht Null werden.

Alles zusammengefasst giebt das Resultat:

„die Gleichung I.

$$x^{m+n} - a x^m + b = 0$$

hat, jenachdem $\Delta < 0$, oder $\Delta = 0$, oder $\Delta > 0$, respective zwei ungleiche positive reelle Wurzeln, von denen die eine $< \alpha$, die andere $> \alpha$, oder zwei gleiche positive reelle Wurzeln, die $= \alpha$, oder keine positiven reellen Wurzeln".

Was ferner die Gleichung II. betrifft, so ist, da, vermöge $A$), $F'(x)$ auf dieselbe Weise wie in I. ab- und zunimmt, hier aber $F(0) = -b$, also negativ, $F(x)$ zwischen $x = 0$ und $x = \alpha$ immer negativ. Da es aber von da an ununterbrochen wächst und $F(+\infty)$ positiv ist, so muss es einen, aber auch nur einen Werth von $x$, der $> \alpha$, geben, für den $F(x)$ Null wird. Hieraus folgt:

„die Gleichung II.

$$x^{m+n} - a x^m - b = 0$$

hat immer nur eine positive reelle Wurzel, die stets grösser als $\alpha$ ist".

Weiter erhellt aus $B$), dass in III. und IV. $F'(x)$ zwar für $x = 0$ verschwindet, aber für $x > 0$ immer positiv ist. Es nimmt daher in III. und IV. $F(x)$ von $x = 0$ bis $x = +\infty$ ununterbrochen zu. Da nun in III. $F(0) = b$, also positiv ist, so bleibt auch $F(+x)$ immer positiv. Hieraus folgt:

„die Gleichung III.

$$x^{m+n} + a x^m + b = 0$$

hat keine positiven reellen Wurzeln".

In IV. endlich ist $F(0) = -b$ und $F(+\infty)$ positiv; woraus, da auch hier $F(x)$ im Intervall $x = 0$, $x = +\infty$ ununterbrochen wächst, folgt,

„dass die Gleichung IV.

$$x^{m+n} + a x^m - b = 0$$

immer nur eine positive reelle Wurzel hat".

§. 2.

Erst bei der Untersuchung über das Vorhandensein **negativer** Wurzeln der dreigliedrigen Gleichung, zu der wir jetzt übergehen, tritt die Nothwendigkeit ein, zu unterscheiden, ob die Exponenten von $x$ gerade oder ungerade Zahlen sind. Es sind dann folgende vier Fälle möglich:

1. $m+n=2i$ und $m=2k$,
2. $m+n=2i$ und $m=2k+1$,
3. $m+n=2i+1$ und $m=2k$,
4. $m+n=2i+1$ und $m=2k+1$.

Im **ersten Falle** ist nun offenbar in allen vier Formen I. bis IV. der gegebenen Gleichung $F(-x)=F(+x)$. Hieraus folgt ohne Weiteres,

„dass in den Gleichungen

$$1)\qquad x^{2i}-ax^{2k}+b=0,$$

$$2)\qquad x^{2i}-ax^{2k}-b=0,$$

$$3)\qquad x^{2i}+ax^{2k}+b=0,$$

$$4)\qquad x^{2i}+ax^{2k}-b=0,$$

jeder positiven reellen Wurzel eine gleich grosse negative entspricht, diese Gleichungen also unter denselben Bedingungen negative reelle Wurzeln haben wie positive".

Für die übrigen drei Fälle wollen wir, um des kürzeren Ausdrucks willen, die vier Formen der Gleichung unter I. bis IV. durch

$$F_1(x)=0,\quad F_2(x)=0,\quad F_3(x)=0,\quad F_4(x)=0$$

bezeichnen.

Dann ist im **zweiten Falle**

$$F_1(-x)=x^{2i}+ax^{2k+1}+b=F_3(+x),$$

woraus sofort folgt, dass jeder positiven reellen Wurzel der Gleichung $F_3(x)=0$ eine gleich grosse negative der Gleichung $F_1(x)=0$ entspricht, und daher vermöge des dritten Satzes in §. 1 sich ergiebt,

„dass die Gleichung

$$5)\qquad x^{2i}-ax^{2k+1}+b=0$$

**keine** negativen reellen Wurzeln hat".

Ferner ist in diesem Falle

$$F_2(-x)=x^{2i}+ax^{2k+1}-b=F_4(+x).$$

Es entspricht also jeder positiven Wurzel von $F_4(x)=0$ eine gleich grosse negative von $F_2(x)=0$, und folgt demnach vermöge des vierten Satzes in §. 1,

„dass die Gleichung

$$6)\qquad x^{2i}-ax^{2k+1}-b=0$$

eine **einzige** negative reelle Wurzel hat".

Es ist drittens

$$F_3(-x)=x^{2i}-ax^{2k+1}+b=F_1(+x),$$

und hat also $F_3(x)=0$ die gleichen aber entgegengesetzten Wurzeln wie $F_1(x)=0$; woraus, nach dem ersten Satz in §. 1 folgt,

„dass die Gleichung

7) $$x^{2i} + ax^{2k+1} + b = 0,$$

jenachdem $\varDelta < 0$, oder $\varDelta = 0$, oder $\varDelta > 0$, resp. zwei ungleiche, oder zwei gleiche, oder keine negativen reellen Wurzeln hat, wo von den ungleichen die eine grösser, die andere kleiner als $-\alpha$ ist, und die gleichen $= -\alpha$ sind".

Viertens endlich ist

$$F_4(-x) = x^{2i} - ax^{2k+1} - b = F_2(+x),$$

und hat also $F_4(x) = 0$ die gleichen aber entgegengesetzten Wurzeln als $F_2(x) = 0$, woraus nach dem zweiten Satze in §. 1 folgt,

„dass die Gleichung

8) $$x^{2i} + ax^{2k+1} - b = 0$$

eine einzige negative reelle Wurzel hat, deren absoluter Werth grösser als $\alpha$ ist".

Im dritten Falle ist zuerst

$$F_1(-x) = -x^{2i+1} - ax^{2k} + b = -F_4(+x);$$

daher haben die Gleichungen $F_1(x) = 0$ und $F_4(x) = 0$ gleiche, aber entgegengesetzte Wurzeln. Hieraus folgt nach dem vierten Satze des §. 1,

„dass die Gleichung

9) $$x^{2i+1} - ax^{2k} + b = 0$$

eine einzige negative reelle Wurzel hat".

Es ist zweitens

$$F_2(-x) = -x^{2i+1} - ax^{2k} - b = -F_3(+x),$$

woraus auf ganz ähnliche Weise wie zuvor nach §. 1, dritter Satz, folgt

„dass die Gleichung

10) $$x^{2i+1} - ax^{2k} - b = 0$$

keine negativen reellen Wurzeln hat".

Ebenso ist umgekehrt drittens

$$F_3(-x) = -x^{2i+1} + ax^{2k} + b = -F_2(+x),$$

daher, vermöge §. 1, zweiter Satz,

„hat die Gleichung

11) $$x^{2i+1} + ax^{2k} + b = 0$$

eine einzige negative reelle Wurzel, deren absoluter Werth grösser als $\alpha$ ist".

Endlich ist viertens

$$F_4(-x) = -x^{2i+1} + ax^{2k} - b = -F_1(+x),$$

daher, vermöge §. 1, erster Satz,

„hat die Gleichung

12) $$x^{2i+1} + ax^{2k} - b = 0$$

jenachdem $\varDelta < 0$, oder $\varDelta = 0$, oder $\varDelta > 0$, resp. zwei ungleiche, oder zwei gleiche, oder keine negativen reellen Wurzeln".

Im vierten Falle ist zuerst

$$F_1(-x) = -x^{2i+1} + ax^{2k+1} + b = -F_3(+x),$$

„daher hat die Gleichung

13) $$x^{2i+1} - ax^{2k+1} + b = 0$$

eine einzige negative reelle Wurzel, deren absoluter Werth grösser als $\alpha$ ist".

Es ist zweitens umgekehrt

$$F_2(-x) = -x^{2i+1} + ax^{2k+1} - b = -F_1(+x),$$

„daher hat die Gleichung

14) $$x^{2i+1} - ax^{2k+1} - b = 0,$$

jenachdem $\Delta < 0$, oder $\Delta = 0$, oder $\Delta > 0$, resp. zwei ungleiche, oder zwei gleiche, oder keine negativen reellen Wurzeln".

Drittens ist

$$F_3(-x) = -x^{2i+1} - ax^{2k+1} + b = -F_4(+x),$$

„daher hat die Gleichung

15) $$x^{2i+1} + ax^{2k+1} + b = 0$$

eine einzige negative reelle Wurzel".

Viertens endlich ist umgekehrt

$$F_4(-x) = -x^{2i+1} - ax^{2k+1} - b = -F_3(+x),$$

„daher hat die Gleichung

16) $$x^{2i+1} + ax^{2k+1} - b = 0$$

keine negativen reellen Wurzeln".

Hiermit ist die Untersuchung erschöpft und gezeigt, dass durch die positiven reellen Wurzeln der vier Formen I. bis IV. der dreigliedrigen Gleichungen in allen Fällen auch ihre negativen reellen Wurzeln bestimmt sind.

## §. 3.

Ebenso einfach lassen sich die Gestalten der Curven bestimmen, welche die Function $F(x)$, je nach ihren verschiedenen Formen, darstellen und deren Durchschnitte mit der Abscissenachse den reellen Wurzeln der Gleichung entsprechen. Wir folgen hierbei dem Gange der beiden vorigen Paragraphen und fügen den Formeln $A$) und $B$) noch die durch Differentiation derselben sich ergebende Formel

C) $$F''(x) = (m+n)(m+n-1)\,x^{m-2}(x^n \mp \beta)$$

hinzu, wo zur Abkürzung $\frac{m(m-1)a}{(m+n)(m+n-1)} = \beta$ gesetzt ist, und sich das Zeichen — auf die Formen von $F(x)$ in I. und II., dagegen das Zeichen + auf die in III. und IV. bezieht.

Wir erörtern zuerst nach §. 1 die Gestalten der Curve für positive $x$.

1) Da in I. $F_1(0) = b$, $F_1'(0) = 0$, $F_1'(<\alpha) < 0$, $F_1'(\alpha) = 0$, $F_1'(>\alpha) > 0$, so ist die Curve bei $x = 0$ der Abscissenachse parallel und liegt hier oberhalb derselben; sie sinkt sodann bis zu $x = \alpha$, wo sie abermals der $x$-Achse parallel ist, und steigt von da ohne Ende.

Ist nun $F_1(\alpha) < 0$, so schneidet die Curve die $x$-Achse sowohl zwischen 0 und $\alpha$, als zwischen $\alpha$ und $+\infty$.

Ist $)F_1 \alpha) = 0$, so berührt sie die Abscissenachse bei $x = \alpha$.

Ist $F_1(\alpha) > 0$, so bleibt die Curve ganz auf der oberen Seite der $x$-Achse und erreicht bei $x = \alpha$ ihren kleinsten Abstand von derselben.

Da aus $C$) erhellt, dass $F_1''(<\beta) < 0$, $F_1''(\beta) = 0$, $F_1''(>\beta) > 0$, so kehrt in allen drei Fällen die Curve zwischen $x = 0$ und $x = \beta$ ihre concave Seite, zwischen $x = \beta$ und $x = +\infty$ ihre convexe Seite nach Unten und hat bei $x = \beta$ einen Wendepunkt.

2) Da in II. $F_2(x) = F_1(x) - 2b$, so ist die Gestalt der Curve für $F_2(x)$ vollkommen dieselbe wie für $F_1(x)$, nur dass bei der ersteren die Abscissenachse derjenigen der Curve für $F_1(x)$ in dem Abstande $2b$ parallel ist. Die Curve für $F_2(x)$ liegt daher zwischen $x = 0$ und $x = \alpha$ immer unter der $x$-Achse, schneidet dieselbe aber einmal zwischen $x = \alpha$ und $x = +\infty$.

3) Da in III. $F_3(0) = b$, $F_3'(0) = 0$, aber $F_3'(>0) > 0$, so ist die Curve von $F_3(x)$ bei $x = 0$ der $x$-Achse parallel, steigt dann aber ohne Ende und liegt daher ganz oberhalb der $x$-Achse. Aus $C$) erhellt, dass immer $F_3''(>0) > 0$ ist; daher kehrt die Curve von $x = 0$ bis $x = +\infty$ ihre convexe Seite nach Unten.

4) Da in IV. $F_4(x) = F_3(x) - 2b$, so hat die Curve für $F_4(x)$ vollkommen dieselbe Gestalt wie für $F_3(x)$, nur liegt ihre Abscissenachse, der vorigen parallel, um den Abstand $2b$ höher. Sie wird daher zwischen $x = 0$ und $x = +\infty$ von der Curve einmal geschnitten.

Für die negativen Werthe von $x$ sind die in §. 2 bemerkten vier Fälle zu unterscheiden.

5) Ist nämlich zuerst $m + n = 2i$ und $m = 2k$, so ist in allen vier Formen I. bis IV. $F(-x) = F(+x)$. Die Curve hat also dann für die negativen $x$ dieselbe Gestalt wie für die positiven, und ihr linker Theil wird demnach erhalten, wenn man die Ebene ihres rechten Theils durch 180° um die Ordinatenachse dreht. Die absoluten Werthe von $F_1(0)$ und $F_4(0)$ sind in diesem Falle Maxima, die von $F_2(0)$ und $F_3(0)$ Minima.

6) Wenn $m + n = 2i$ und $m = 2k + 1$, so ist nach §. 2

*a*) $F_1(-x) = F_3(+x)$. Der linke Theil der Curve von $F_1(x)$ wird daher erhalten, wenn man die Ebene des rechten Theils von $F_3(x)$ durch 180° um die Ordinatenachse dreht.

*b*) Ferner ist $F_2(-x) = F_4(+x)$. Man erhält also durch dieselbe Drehung des rechten Theils der Curve von $F_4(x)$ den linken Theil der Curve von $F_2(x)$.

*c*) Es ist $F_3(-x) = F_1(+x)$. Dieselbe Drehung des rechten Curventheils von $F_1(x)$ giebt daher den linken von $F_3(x)$.

*d*) Ebenso giebt, da $F_4(x) = F_2(+x)$, dieselbe Drehung des rechten Curventheils von $F_2(x)$ den linken von $F_4(x)$.

In allen vier Formen von $F(x)$ hat hier die Curve bei $x = 0$ einen Wendepunkt.

7) Wenn $m+n=2i+1$ und $m=2k$, so ist nach §. 2

*a*) $-F_1(-x)=F_4(+x)$. Dreht man also den rechten Curventheil von $F_4(x)$ durch 180° um die Ordinatenachse, so erhält man den linken Curventheil von $-F_1(-x)$, folglich, wenn man diesen abermals durch 180° um die Abscissenachse dreht, den linken Curventheil von $F_1(-x)$.

*b*) Da $-F_2(-x)=F_3(+x)$, so erhält man durch dieselbe doppelte Drehung des rechten Curventheils von $F_3(x)$ den linken Theil von $F_2(x)$;

*c*) ebenso, da $-F_3(-x)=F_2(+x)$, durch die doppelte Drehung des rechten Curventheils von $F_2(x)$ den linken von $F_3(x)$; und endlich

*d*) da $-F_4(-x)=F_1(+x)$, aus der doppelten Drehung des rechten Curventheils von $F_1(x)$ den linken von $F_4(x)$.

In *a*) und *d*) hat die Curve bei $x=0$ ein Maximum, in *b*) und *c*) ein Minimum.

8) Wenn endlich $m+n=2i+1$ und $m=2k+1$, so ist nach §. 1

*a*) $$-F_1(-x)=F_2(+x),$$
*b*) $$-F_2(-x)=F_1(+x),$$
*c*) $$-F_3(-x)=F_4(+x),$$
*d*) $$-F_4(-x)=F_3(+x).$$

Es ergeben sich daher durch dieselben doppelten Drehungen der rechten Curventheile von $F_2(x)$, $F_1(x)$, $F_4(x)$, $F_3(x)$ der Reihe nach die linken Curventheile von $F_1(x)$, $F_2(x)$, $F_3(x)$, $F_4(x)$. In allen vier Formen hat hier die Curve bei $x=0$ einen Wendepunkt.

---

## II. Aufsuchung derjenigen Differentialgleichung, welcher genügt wird durch die Quadrate der Gleichung

1) $$X_2y''+X_1y'+X_0y=0.$$

Von Professor Simon Spitzer. Wenn die abhängige Veränderliche der Gleichung, welche wir suchen, $z$ heisst, so ist offenbar

$$z=y^2, \text{ mithin } y=\sqrt{z}$$

und folglich ist die Gleichung, welche wir gesucht,

2) $$X_2(\sqrt{z})''+X_1(\sqrt{z})'+X_0\sqrt{z}=0.$$

Es ist also diese Gleichung ebenfalls linear, aber nicht bezüglich $z$, sondern bezüglich $\sqrt{z}$, und hat genau die Gestalt, wie die Gleichung 1).

Man hat nun

$$(\sqrt{z})'=\frac{z'}{2\sqrt{z}},$$

$$(\sqrt{z})''=\frac{z''}{2\sqrt{z}}-\frac{(z')^2}{4z\sqrt{z}},$$

und wenn man diese Werthe in die Gleichung 2) einführt, so erhält man nach einfacher Reduction:

3) $$2z(X_2z''+X_1z'+2X_0z)-X_2(z')^2=0$$
und diese Gleichung hat zum Integrale

4) $$z=[C_1\varphi(x)+C_2\psi(x)]^2,$$
wenn

5) $$y=C_1\varphi(x)+C_2\psi(x)$$
das Integral der Gleichung 1) ist.

Die Gleichung 3) giebt differenzirt:

6) $$2z[X_2z'''+(X_2'+X_1)z''+(X_1'+4X_0)z'+2X_0'z]-(X_2'-2X_1)(z')^2=0$$
und diese Gleichung wird offenbar auch erfüllt für

4) $$z=[C_1\varphi(x)+C_2\psi(x)]^2,$$
ist aber nicht das vollständige Integral der Gleichung 6); denn die Gleichung 6) ist von der dritten Ordnung und muss somit zum vollständigen Integral einen, mit drei willkürlichen Constanten versehenen Ausdruck haben.

Da nun die beiden Gleichungen 3) und 6) durch den in 4) hingestellten Werth befriedigt werden, so wird auch jede legitime Verbindung der Gleichungen 3) und 6) durch den Ausdruck in 4) befriedigt. Eine solche legitime Verbindung der Gleichungen 3) und 6) erhält man aber, wenn man aus beiden Gleichungen $(z')^2$ eliminirt, und wird diese Elimination wirklich verrichtet, so kommt man zu der Differentialgleichung

7) $$\begin{cases}X_2^2z'''+3X_1X_2z''+(X_2X_1'+4X_0X_2-X_1X_2'+2X_1^2)z'\\ \qquad +2(X_0'X_2-X_0X_2'+2X_0X_1)z=0,\end{cases}$$
welche bezüglich $z$ linear und von der dritten Ordnung ist.

Man kann somit folgenden Satz aussprechen: Wenn der linearen Differentialgleichung

1) $$X_2y''+X_1y'+X_0y=0$$
genügt wird durch

5) $$y=C_1\varphi(x)+C_2\psi(x),$$
so wird der Differentialgleichung:

7) $$\begin{cases}X_2^2z'''+3X_1X_2z''+(X_2X_1'+4X_0X_2-X_1X_2'+2X_1^2)z'\\ \qquad +2(X_0'Y_2-X_0X_2'+2X_0X_1)z=0,\end{cases}$$
welche ebenfalls linear ist, genügt durch

4) $$z=[C_1\varphi(x)+C_2\psi(x)]^2,$$
unter $C_1$ und $C_2$ willkürliche Constante verstanden. Aber die Gleichung 7) ist eine lineare Differentialgleichung dritter Ordnung, ihr vollständiges Integrale muss somit drei willkürliche Constante enthalten; ich behaupte nun, dass das vollständige Integral dieser Gleichung 7) folgendes ist:

8) $$z=A[\varphi(x)]^2+B\varphi(x).\psi(x)+C[\psi(x)]^2,$$
unter $A$, $B$, $C$ willkürliche Constante verstanden.

Der Beweis dieses Satzes ist einfach. Denn offenbar genügt der Gleichung 7) der in 4) hingestellte Ausdruck für willkürliche $C_1$ und $C_2$, folglich auch für $C_2=0$, somit ist

$$z=C_1^2[\varphi(x)]^2$$
ein Integral der Gleichung 7); eben so ist:

$$z = C_2^2 [\psi(x)]^2$$

ein Integral derselben Gleichung. Da aber der Gleichung 7) der Ausdruck

$$y = C_1^2 [\varphi(x)]^2 + 2 C_1 C_2 \varphi(x) \psi(x) + C_2^2 [\psi(x)]^2$$

genügt und das erste und letzte Glied dieses Ausdruckes für sich genügen, so muss auch

$$z = 2 C_1 C_2 \varphi(x) \psi(x)$$

für sich der Gleichung 7) genügen, somit ist der in 8) hingestellte Ausdruck wirklich das vollständige Integral der Gleichung 7).

Nehmen wir als Beispiel die Gleichung

$$9) \qquad (a_2 + b_2 x) y'' + (a_1 + b_1 x) y' + (a_0 + b_0 x) y = 0,$$

woselbst

$$X_2 = a_2 + b_2 x, \quad X_1 = a_1 + b_1 x, \quad X_0 = a_0 + b_0 x$$

ist. Die Gleichung dritter Ordnung in $z$ lautet:

$$10) \left\{ \begin{aligned} & (a_2 + b_2 x)^2 z''' + 3 (a_1 + b_1 x)(a_2 + b_2 x) z'' \\ & + [b_1 (a_2 + b_2 x) + 4 (a_0 + b_0 x)(a_2 + b_2 x) - b_2 (a_1 + b_1 x) + 2 (a_1 + b_1 x)^2] z' \\ & + 2 [b_0 (a_2 + b_2 x) - b_2 (a_0 + b_0 x) + 2 (a_0 + b_0 x)(a_1 + b_1 x)] z = 0. \end{aligned} \right.$$

In dem speciellen Falle, wo

$$2 (a_1 + b_1 x) - b_2$$

durch $a_2 + b_2 x$ theilbar ist, d. h. in dem Falle, als

$$11) \qquad 2 (a_1 b_2 - a_2 b_1) = b_2^2$$

ist, lässt sich mit der Gleichung 10) eine Division durch $a_2 + b_2 x$ vollführen, und man erhält alsdann die einfachere Gleichung:

$$(a_2 + b_2 x) z''' + 3 (a_1 + b_1 x) z'' + \left[ b_1 + 4 (a_0 + b_0 x) + \frac{2 b_1}{b_2} (a_1 + b_1 x) \right] z'$$

$$+ 2 \left[ b_0 + \frac{2 b_1}{b_2} (a_0 + b_0 x) \right] z = 0$$

deren Coefficienten von eben so hohem Grade sind, als die Coefficienten der Gleichung 9).

---

**III. Bemerkung über ein vielfaches Integral.** Wenn in dem Ausdrucke

$$\int\int\int \ldots f(x, y, z, \ldots)\, dx\, dy\, dz \ldots$$

die Integrationen auf alle diejenigen positiven Werthe der $n$ Variabelen $x, y, z, \ldots$ bezogen werden, welche der Bedingung $h \geqq x + y + z + \ldots \geqq 0$ genügen, so ist der Betrag des Integrales u. A. von $h$ abhängig, etwa $= F(h)$; diesen Betrag als bekannt vorausgesetzt, kann man das allgemeinere Integral

$$\int\int\int \ldots f(x, y, z, \ldots)\, \varphi(x + y + z + \ldots)\, dx\, dy\, dz \ldots$$

auf folgende Weise aus dem vorigen ableiten.

Man setze $\varphi(u) - \varphi(h) = \psi(u)$ also $\psi'(u) = \varphi'(u)$ und betrachte das $(n+1)$fache Integral

$$S = \int\int\int .. f(x, y, z, ..) \psi'(h-t)\, dt\, dx\, dy \ldots$$
$$h \gtreqless t + x + y + z + \ldots \gtreqless 0,$$

welches die Variabele $t$ mehr enthält. Fängt man die Integrationen mit $t$ an, so sind die auf $t$ bezüglichen Grenzen $t = 0$, $t = h - x - y - z - \ldots$, und es ergiebt sich wegen $\psi(h) = 0$

$$S = -\int\int \ldots f(x, y, z, \ldots)\, \psi(x + y + z + \ldots)\, dx\, dy\, dz \ldots.$$

Verspart man dagegen die Integration nach $t$ bis zuletzt, so hat man

$$S = \int_0^h \psi'(h-t)\, dt \int\int f(x, y, z, \ldots)\, dx\, dy\, dz \ldots.$$
$$h - t \gtreqless x + y + z + \ldots \gtreqless 0$$

d. i. zufolge der anfänglichen Voraussetzung

$$S = \int_0^h \psi'(h-t)\, dt\, F(h-t) = \int_0^h F(u)\, \psi'(u)\, du$$

und durch theilweise Integration

$$S = -\int_0^h F'(u)\, \psi(u)\, du.$$

Die Vergleichung der beiden Formen von $S$, worin $\psi$ wieder durch $\varphi$ ausgedrückt werden kann, führt zu folgendem Resultate

$$\int\int .. f(x, y, \ldots)\, \varphi(x + y + \ldots)\, dx\, dy \ldots = \int_0^h F'(u)\, \varphi(u)\, du$$
$$h \gtreqless x + y + z + \ldots \gtreqless 0.$$

Sind in dem ursprünglichen Integrale $F(h)$ die Integrationen auf positive und negative $x, y, z, \ldots$ bezogen, so lässt sich der vorstehende Satz immer noch anwenden, wenn man die negativen Grenzen auf positive reducirt, wodurch $\Sigma f(\pm x, \pm y, \ldots)$ an die Stelle von $f(x, y, \ldots)$ zu stehen kommt.

(Briefliche Notiz des Herrn A. Genocchi in Turin.)

IV.

# Die Transformation und Auflösung der Gleichungen fünften Grades.

## Nach Jerrard und Hermite.

---

Unter die bemerkenswerthesten mathematischen Erscheinungen der neuesten Zeit gehört ohne Zweifel die Entdeckung, dass erstens die allgemeine Gleichung fünften Grades

$$x^5 + A_1 x^4 + A_2 x^3 + A_3 x^2 + A_4 x + A_5 = 0$$

auf die einfache Form

$$y^5 + By + C = 0$$

gebracht werden kann, und dass zweitens diese reducirte Gleichung durch elliptische Transcendenten auflösbar ist. Das nicht geringe Interesse, welches dieses Seitenstück zur Cartesianischen Auflösung der cubischen Gleichungen in Anspruch nimmt, legt uns die Verpflichtung auf, unseren Lesern eine Darstellung des Gegenstandes zu geben; ihrer Natur nach zerfällt dieselbe in zwei Haupttheile.

### I. Die Reduction der Gleichungen fünften Grades.

Bereits anno 1683 zeigte Tschirnhausen in den Actis eruditorum ein Verfahren, um aus der allgemeinen Gleichung

$$1)\qquad x^m + A_1 x^{m-1} + A_2 x^{m-2} + \ldots + A_{m-1} x + A_m = 0$$

beliebig viele Glieder wegzuschaffen. Diese Methode kommt darauf hinaus, statt $x$ eine Wurzel der Gleichung

$$2)\qquad a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n = y$$

zu substituiren oder, was Dasselbe ist, durch Elimination von $x$ aus den beiden Gleichungen 1) und 2) eine neue, nur die Unbekannte $y$ enthaltende Gleichung zu bilden, und nachher über die vorläufig unbestimmt gebliebenen Grössen $a_0, a_1, a_2, \ldots a_n$ so zu disponiren, dass in der neuen Gleichung $n$ Coefficienten wegfallen. Unter der Voraussetzung $n < m$ kommen nämlich dem $y$ in No. 2) ebensoviel verschiedene Werthe zu wie dem $x$ in No. 1); die für $y$ resultirende Gleichung muss daher vom $m^{\text{ten}}$ Grade sein, etwa

$$3)\qquad y^m + B_1 y^{m-1} + B_2 y^{m-2} + \ldots + B_{m-1} y + B_m = 0.$$

Die Coefficienten derselben sind aus $A_1, A_2, \ldots A_m, a_0, a_1, a_2, \ldots a_n$ zusammengesetzt; will man also $n$ Coefficienten, etwa $B_1, B_2 \ldots . B_n$, zum Verschwinden bringen, so hat man die $n$ Gleichungen $B_1 = 0$, $B_2 = 0$, $\ldots B_n = 0$ zwischen den $n+1$ Unbekannten $a_0, a_1, \ldots a_n$ aufzulösen, wobei eine der Unbekannten willkürlich bleibt.

Das erste Geschäft, nämlich die Elimination von $x$ aus den Gleichungen 1) und 2), kann auf verschiedene Weise erledigt werden, wie wir zunächst darthun wollen.

Wenn man die Gleichung

$$4)\qquad y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n$$

der Reihe nach auf die $2^{\text{te}}, 3^{\text{te}} \ldots m^{\text{te}}$ Potenz erhebt, so kommen successiv alle die Potenzen $x, x^2, x^3, \ldots x^{mn}$ zum Vorschein, jedoch können $x^m, x^{m+1}, \ldots x^{mn}$ mit Hülfe der Gleichung 1) entfernt werden, weil

$$\begin{aligned} x^m &= -A_1 x^{m-1} - A_2 x^{m-2} - \ldots - A_{m-1} x - A_m, \\ x^{m+1} &= -A_1 x^m - A_2 x^{m-1} - A_3 x^{m-2} - \ldots . \\ &= (A_1^2 - A_2) x^{m-1} + (A_1 A_2 - A_3) x^{m-2} + (A_1 A_3 - A_4) x^{m-3} + \ldots \end{aligned}$$

u. s. w.

es bleiben daher Gleichungen von folgender Form übrig:

$$5)\qquad \begin{cases} y^2 = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \ldots . + b_{m-1} x^{m-1}, \\ y^3 = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \ldots . + c_{m-1} x^{m-1}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y^m = k_0 + k_1 x + k_2 x^2 + \ldots . + k_{m-1} x^{m-1}. \end{cases}$$

Darin sind $b_0, b_1, b_2, \ldots b_{m-1}$ ganze und homogene quadratische Functionen der vorläufig unbestimmten Grössen $a_0, a_1, \ldots a_n$; ebenso $c_0, c_1, \ldots c_{m-1}$ ganze und homogene cubische Functionen derselben Elemente u. s. w. Bezeichnet man für den Augenblick die Wurzeln der Gleichung 1) mit $\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_m$ und die correspondirenden Wurzeln der Gleichung 3) mit $\eta_1, \eta_2, \ldots \eta_m$, so kann man aus den Gleichungen 4) und 5) leicht Beziehungen zwischen den Summen

$$\begin{aligned} S_1 &= \xi_1 + \xi_2 + \ldots + \xi_m, & T_1 &= \eta_1 + \eta_2 + \ldots + \eta_m, \\ S_2 &= \xi_1^2 + \xi_2^2 + \ldots + \xi_m^2, & T_2 &= \eta_1^2 + \eta_2^2 + \ldots + \eta_m^2, \\ S_3 &= \xi_1^3 + \xi_2^3 + \ldots + \xi_m^3, & T_3 &= \eta_1^3 + \eta_2^3 + \ldots + \eta_m^3, \end{aligned}$$

u. s. w.      u. s. w.

herleiten, indem man für $x$ und $y$ der Reihe nach die verschiedenen $\xi$ und $\eta$ setzt; es ist nämlich nach No. 4)

$$6)\qquad T_1 = m a_0 + a_1 S_1 + a_2 S_2 + \ldots + a_n S_n$$

und vermöge der Gleichungen 5)

$$7)\qquad \begin{cases} T_2 = m b_0 + b_1 S_1 + b_2 S_2 + \ldots + b_{m-1} S_{m-1}, \\ T_3 = m c_0 + c_1 S_1 + c_2 S_2 + \ldots + c_{m-1} S_{m-1}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ T_m = m k_0 + k_1 S_1 + k_2 S_2 + \ldots + k_{m-1} S_{m-1}. \end{cases}$$

Wie man weiss, ist zur Berechnung der Summen $S_1, S_2, S_3$ etc. die Kennt-

niss der Wurzeln $\xi_1$, $\xi_2$, $\xi_3$ etc. nicht erforderlich, vielmehr können mittelst der Newton'schen Formeln

$$\begin{aligned} 0 &= S_1 + 1A_1, \\ 0 &= S_2 + A_1 S_1 + 2A_2, \\ 0 &= S_3 + A_1 S_2 + A_2 S_1 + 3A_3, \\ &\dots\dots\dots\dots \end{aligned}$$

$S_1$, $S_2$, $S_3$, ... direct aus den gegebenen Coefficienten $A_1$, $A_2$, $A_3$, .. hergeleitet werden; setzt man die gefundenen Werthe in die Gleichungen 6) und 7) ein, so hat man $T_1$, $T_2$, .. $T_{m-1}$ ausgedrückt durch $A_1$, $A_2$, ... $A_m$, $a_0$, $a_1$, ... $a_n$, und schliesslich dienen die entsprechenden Relationen

$$8) \qquad \begin{cases} 0 = T_1 + 1B_1, \\ 0 = T_2 + B_1 T_1 + 2B_2, \\ 0 = T_3 + B_1 T_2 + B_2 T_1 + 3B_3, \\ \dots\dots\dots\dots \end{cases}$$

zur successiven Berechnung der neuen Coefficienten $B_1$, $B_2$, ... $B_m$.

Ein etwas kürzerer Weg, auf welchem die Newton'schen Formeln nicht berührt werden, ist folgender. In den Gleichungen 5) betrachte man die $m-1$ Grössen

$$x, x^2, \dots x^n, x^{n+1}, \dots . x^{m-1}$$

als ebensoviel Unbekannte $x_1$, $x_2$ ... $x_{m-1}$ und entwickele letztere daraus, was keine Schwierigkeiten hat, weil jene Gleichungen in Beziehung auf $x_1$, $x_2$, ... $x_{m-1}$ vom ersten Grade sind; die für $x$, $x^2$, ... $x^n$ gefundenen Werthe braucht man nur in No. 2) zu substituiren, um sogleich die neue Gleichung 3) zu erhalten. Diese Methode hat noch den Vortheil, dass sie $x_1 = x$ rational durch $y$ ausgedrückt liefert, also zeigt, wie die Werthe von $x$ (nämlich $\xi_1$, $\xi_2$, ... $\xi_m$) gefunden werden, nachdem durch Auflösung der Gleichung 3) die Werthe von $y$ bekannt geworden sind.

Bei weitem das eleganteste und übersichtlichste Verfahren zur Elimination von $x$ aus den Gleichungen 1) und 2) ist das folgende, welches ursprünglich von Euler und Bézout herrührt und in neuerer Zeit von Hesse wieder in Anregung gebracht worden ist (Crelle's Journal, Bd. 27, pag. 1); es beruht auf einem bekannten Satze von den linearen Gleichungen. Wenn nämlich zwischen den $i$ Unbekannten $x_1$, $x_2$, .. $x_i$ die $i$ Gleichungen ersten Grades

$$\begin{aligned} \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_i x_i &= u_1, \\ \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \dots + \beta_i x_i &= u_2, \\ \dots\dots\dots\dots \\ \varkappa_1 x_1 + \varkappa_2 x_2 + \dots + \varkappa_i x_i &= u_i \end{aligned}$$

bestehen, so giebt die Auflösung der letzteren die Werthe von $x_1$, $x_2$, ... $x_i$ in Form von Brüchen, welche einen gemeinschaftlichen Nenner besitzen, also etwa

$$x_1 = \frac{Q_1}{R}, \; x_2 = \frac{Q_2}{R}, \dots . x_i = \frac{Q_i}{R}.$$

Hier ist $R$ unabhängig von $u_1$, $u_2$, ... $u_i$ und bekanntlich die Determinante aus den Coefficienten der Gleichung nämlich:

$$R = \begin{vmatrix} \alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_i \\ \beta_1, \beta_2, \ldots \beta_i \\ \cdots\cdots\cdots \\ \varkappa_1, \varkappa_2, \ldots \varkappa_i \end{vmatrix}.$$

Multiplicirt man andererseits die gegebenen Gleichungen mit Factoren $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_i$, addirt nachher und denkt sich $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_i$ so gewählt, dass linker Hand die Coefficienten von $x_2, x_3, \ldots x_i$ verschwinden, so bleibt

$$(\lambda_1 \alpha_1 + \lambda_2 \beta_1 + \ldots + \lambda_i \varkappa_1) x_1 = \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \ldots + \lambda_i u_i;$$

der Coefficient von $x_1$ ist $R$, rechter Hand steht $Q_1$. Wenn nun alle $u$ der Null gleich sind, so verschwindet $Q_1$ und es muss daher entweder $x_1$ und ebenso auch $x_2, \ldots x_i$ den Werth Null haben, oder es muss $R = 0$ sein; in allen den Fällen, wo man voraus weiss, dass $x_1, x_2 \ldots x_i$ nicht Null sind, bleibt nur die Möglichkeit $R = 0$ d. h. wenn die Gleichungen

$$\begin{aligned} \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \ldots + \alpha_i x_i &= 0, \\ \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \ldots + \beta_i x_i &= 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \varkappa_1 x_1 + \varkappa_2 x_2 + \ldots + \varkappa_i x_i &= 0 \end{aligned}$$

durch andere Werthe als $x_1 = x_2 \ldots = x_i = 0$ erfüllbar sein sollen, so muss die Determinante dieses Systems von selber verschwinden*).

Hierauf gründet sich folgendes Verfahren zur Elimination von $x$ aus den beiden Gleichungen

$$\begin{aligned} A_m + A_{m-1} x + A_{m-2} x^2 + \ldots + A_1 x^{m-1} + x^m &= 0, \\ (a_0 - y) + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n &= 0. \end{aligned}$$

Man multiplicire die erste Gleichung der Reihe nach mit $x, x^2, \ldots x^n$, die zweite mit $x, x^2, \ldots x^m$ und stelle alle erhaltenen Gleichungen unter einander:

---

*) So sind z. B. die Gleichungen

$$\begin{aligned} ax + by + cz &= 0, \\ a'x + b'y + c'z &= 0, \\ a''x + b''y + c''z &= 0, \end{aligned}$$

nur dann mit einander verträglich, wenn

$$\begin{vmatrix} a, & b, & c \\ a', & b', & c' \\ a'', & b'', & c'' \end{vmatrix} = 0$$

d. h.

$$a(b'c'' - b''c') + b(c'a'' - c''a') + c(a'b'' - a''b') = 0.$$

Dasselbe erhält man natürlicherweise auch, wenn man $\frac{x}{z} = \xi$, $\frac{y}{z} = \eta$ setzt, von den nunmehrigen Gleichungen

$$\begin{aligned} a\xi + b\eta + c &= 0, \\ a'\xi + b'\eta + c' &= 0, \\ a''\xi + b''\eta + c'' &= 0, \end{aligned}$$

die ersten zwei auflöst und die für $\xi$ und $\eta$ gefundenen Werthe in die letzte substituirt. Vergl. Baltzer, Theorie der Determinanten, wo selbstverständlich der Gegenstand genauer behandelt ist.

$$
\begin{array}{ll}
A_m x + A_{m-1} x^2 + A_{m-2} x^3 + \ldots + x^{m+1} & = 0, \\
\quad A_m x^2 + A_{m-1} x^3 + \ldots \ldots + x^{m+2} & = 0, \\
\qquad A_m x^3 + \ldots \ldots \ldots + x^{m+3} & = 0, \\
\ldots \ldots \ldots \ldots \ldots & \\
\qquad + A_m x^n + \ldots + x^{m+n} & = 0, \\
(a_0 - y) x + a_1 x^2 + a_2 x^3 + \ldots + a_n x^{n+1} & = 0, \\
\quad (a_0 - y) x^2 + a_1 x^3 + \ldots \ldots + a_n x^{n+2} & = 0, \\
\qquad (a_0 - y) x^3 + \ldots \ldots \ldots + a_n x^{n+2} & = 0, \\
\ldots \ldots \ldots \ldots \ldots & \\
\qquad (a_0 - y) x^m + \ldots + a_n x^{m+n} & = 0;
\end{array}
$$

betrachtet man jetzt $x, x^2, \ldots x^{m+n}$ als eben so viel Unbekannte $x_1, x_2, \ldots x_{m+n}$ und berücksichtigt, dass keine derselben verschwindet, so können die obigen Gleichungen nur unter der Bedingung

$$
\begin{vmatrix}
A_m, & A_{m-1}, & A_{m-2}, & \ldots & 1, & 0, & 0, & \ldots \\
0, & A_m, & A_{m-1}, & \ldots & \ldots & 1, & 0, & \ldots \\
0, & 0, & A_m, & \ldots & \ldots & \ldots & 1, & \ldots \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
0, & 0, & \ldots & A_m, & \ldots & \ldots & \ldots & 1 \\
a_0 - y, & a_1, & a_2, & \ldots & a_n, & 0, & 0, & \ldots \\
0, & a_0 - y, & a_1, & \ldots & \ldots & a_n, & 0, & \ldots \\
0, & 0, & a_0 - y, & \ldots & \ldots & \ldots & a_n, & \ldots \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
0, & 0, & \ldots & a_0 - y, & \ldots & \ldots & \ldots & a_n
\end{vmatrix} = 0
$$

zusammenbestehen; diese Bedingungsgleichung ist bereits die für $y$ gesuchte Gleichung und es bedarf nur der Entwickelung der vorstehenden Determinante durch die gewöhnlichen combinatorischen Mittel*).

Hat man nach irgend einer der drei angegebenen Methoden die resultirende Gleichung

$$y^m + B_1 y^{m-1} + B_2 y^{m-2} + \ldots + B_{m-1} y + B_m = 0$$

gefunden, so wird man die Gleichungen

$$B_1 = 0, B_2 = 0, \ldots B_n = 0$$

zur Bestimmung von $a_0, a_1, \ldots a_n$ benutzen, wobei eine dieser Grössen willkührlich bleibt und etwa $a_n = 1$ gesetzt werden kann. Die vorstehenden $n$ Bedingungen reduciren sich, wie man aus den Newton'schen Formeln (8) erkennt, auf die folgenden

$$T_1 = 0, T_2 = 0, \ldots T_n = 0,$$

in denen die Werthe von $T_1, T_2, \ldots T_n$ (s. No. 6 und 7) zu substituiren sind. Der blosse Anblick der Formel 6) zeigt, dass die Gleichung $T_1 = 0$ in Beziehung auf die Unbekannten $a_0, a_1, a_2$ etc. vom ersten Grade ist; dagegen ist die Gleichung $T_2 = 0$ vom zweiten Grade, weil sie die quadrati-

*) Da viele Elemente der fraglichen Determinante Nullen sind, so verschwinden auch viele ihrer Glieder und daher lässt sie sich in einer kürzeren Form darstellen, hinsichtlich deren wir auf Baltzer's Werk, pag. 45, verweisen müssen.

schen Functionen $b_0$, $b_1$, $b_2$ etc. enthält, ebenso $T_3 = 0$ vom dritten Grade u. s. w. Eliminirt man also $a_{n-1}, a_{n-2}, \ldots a_1$ aus den obigen Gleichungen, so erhält man für $a_0$ eine Gleichung, die im Allgemeinen vom Grade 1. 2. 3 ... $n$ ist; doch kann sich dieselbe in speciellen Fällen noch reduciren.

Um nach diesem Verfahren die vollständige cubische Gleichung

$$x^3 + A_1 x^2 + A_2 x + A_3 = 0$$

auf eine rein cubische zurückzuführen, hat man

$$a_2 x^2 + a_1 x + a_0 - y = 0$$

zu setzen und von den fünf linearen Gleichungen

$$\begin{aligned}
A_3 x_1 + A_2 x_2 + A_1 x_3 + x_4 &= 0,\\
A_3 x_2 + A_2 x_3 + A_1 x_4 + x_5 &= 0,\\
(a_0 - y) x_1 + a_1 x_2 + a_2 x_3 &= 0,\\
(a_0 - y) x_2 + a_1 x_3 + a_2 x_4 &= 0,\\
(a_0 - y) x_3 + a_1 x_4 + a_2 x_5 &= 0,
\end{aligned}$$

die Determinante zu bilden. Eliminirt man erst $x_5$ aus der zweiten und fünften Gleichung, schreibt darunter die vierte und eliminirt $x_1$ aus der ersten und dritten, so hat man nur noch die drei Gleichungen

$$\begin{aligned}
A_3 a_2 x_2 + (A_2 a_2 - a_0 + y) x_3 + (A_1 a_2 - a_1) x_4 &= 0,\\
(a_0 - y) x_2 + a_1 x_3 + a_2 x_4 &= 0,\\
(A_3 a_1 - A_2 a_0 + A_2 y) x_2 + (A_3 a_2 - A_1 a_0 + A_1 y) x_3 + (-a_0 + y) x_4 &= 0,
\end{aligned}$$

deren Determinante leicht auszurechnen ist. Als Schlussgleichung $R = 0$ ergiebt sich

$$y^3 + B_1 y^2 + B_2 y + B_3 = 0,$$

und zwar sind die Werthe der beiden ersten Coefficienten:

$$\begin{aligned}
B_1 &= -3a_0 + A_1 a_1 - (A_1^2 - 2A_2) a_2,\\
B_2 &= 3a_0^2 + A_2 a_1^2 + (A_2^2 - 2A_1 A_3) a_2^2,\\
&\quad - 2A_1 a_0 a_1 + 2 (A_1^2 - 2A_2) a_0 a_2 + (3 A_3 - A_1 A_2) a_1 a_2.
\end{aligned}$$

Nimmt man willkührlich $a_2 = 1$ und bestimmt $a_0$, $a_1$ so, dass $B_1 = B_2 = 0$ wird, wozu nur die Auflösung einer quadratischen Gleichung gehört, so hat man als reducirte Gleichung

$$y^3 + B_3 = 0;$$

diess ist die Tschirnhausen-Euler'sche Transformation und Auflösung cubischer Gleichungen.

Bevor wir die allgemeine Theorie weiter verfolgen und speciell auf die Gleichungen fünften Grades anwenden, wollen wir erst eine Bemerkung einschalten, welche die homogenen quadratischen Functionen betrifft. Eine solche Function der $k$ Variabelen $z_1, z_2, \ldots z_k$, etwa

$$V_k = F(z_1, z_2, \ldots z_k),$$

kann immer auf die Form

$$V_k = P z_k^2 + 2 Q z_k + R$$

gebracht werden und zwar ist hier $P$ eine Constante, $Q$ eine homogene lineare Function der übrigen Variabelen $z_1, z_2 \ldots z_{k-1}$, und $R$ eine homogene

quadratische Function der letztgenannten $k-1$ Variabelen. Giebt man der vorigen Gleichung die Form

$$V_k = \left(\sqrt{P}.\, z_k + \frac{Q}{\sqrt{P}}\right)^2 + R - \frac{Q^2}{P} = L_k^2 + V_{k-1},$$

so erkennt man, dass $V_k$ aus dem Quadrate einer linearen Function $L_k$ der $k$ Variabelen $z_1, z_2, \ldots z_k$ und aus einem Reste besteht, der eine homogene quadratische Function der $k-1$ Variabelen $z_1, z_2, \ldots z_{k-1}$ bildet und desshalb passend mit $V_{k-1}$ bezeichnet wurde. Von $V_{k-1}$ gilt wieder Dasselbe, es ist nämlich analog

$$V_{k-1} = L^2_{k-1} + V_{k-2},$$

wo $L_{k-1}$ eine lineare Function der Variabelen $z_1, z_2, \ldots z_{k-1}$, $V_{k-2}$ eine homogene quadratische Function von $z_1, z_2, \ldots z_{k-2}$ bezeichnet. Durch Fortsetzung dieser einfachen Schlüsse gelangt man am Ende zu der Gleichung

$$V_k = L_k^2 + L^2_{k-1} + \ldots + L_2^2 + L_1^2,$$

und in dieser liegt der Satz, dass jede homogene quadratische Function von $k$ Variabelen als die algebraische Summe der Quadrate von $k$ homogenen Linearfunctionen dargestellt werden kann, wobei die erste derartige Function $k$ Variabele und jede folgende Function eine Variabele weniger als die vorhergehende enthält. So ist z. B. bei zwei Variabelen $u$ und $v$

$$au^2 + bv^2 + 2cuv$$
$$= \left(\sqrt{b}.\, v + \frac{c}{\sqrt{b}}\, u\right)^2 + \left(a - \frac{c^2}{b}\right) u^2 = (a'u + b'v)^2 + (a''u)^2,$$

wo $a'$, $b'$, $a''$ selbstverständliche Abkürzungen vorstellen; bei drei Variabelen $u$, $v$, $w$ hat man

$$Au^2 + Bv^2 + Cw^2 + 2Duv + 2Euw + 2Fvw$$
$$= \left(\sqrt{C}.\, w + \frac{Eu + Fv}{\sqrt{C}}\right)^2 + \left(A - \frac{E^2}{C}\right) u^2 + \left(B - \frac{F^2}{C}\right) v^2 + 2\left(D - \frac{EF}{C}\right) uv$$
$$= (A'u + B'v + C'w)^2 + au^2 + bv^2 + 2cuv$$
$$= (A'u + B'v + C'w)^2 + (a'u + b'v)^2 + (a''u)^2$$

u. s. w.

Nach dieser Digression kehren wir zur allgemeinen Gleichung

$$x^m + A_1 x^{m-1} + A_2 x^{m-2} + \ldots + A_{m-1} x + A_m = 0$$

zurück und denken uns dieselbe durch Substitution von

$$y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4$$

transformirt in

$$y^m + B_1 y^{m-1} + B_2 y^{m-2} + \ldots + B_{m-1} y + B_m = 0.$$

Aus den früheren Bemerkungen über die Natur der Grössen $b_0, b_1, \ldots b_{m-1}$, $c_0, c_1, \ldots c_{m-1}$ etc., in Verbindung mit den Gleichungen 6) und 7) geht hervor, dass $T_p$ eine ganze und homogene Function $p^{\text{ten}}$ Grades der fünf Elemente $a_0$, $a_1$, $a_2$, $a_3$, $a_4$ ist; ebenso sind zufolge der Gleichungen 8) $B_1$, $B_2$, $B_3$ etc. ganze und homogene Functionen derselben Variabelen, und der Grad jeder solchen Function wird durch den Index von $B$ angezeigt.

Will man nun aus der neuen Gleichung die mit $B_1$, $B_2$, $B_3$ behafteten Glieder wegschaffen, so hat man die drei Gleichungen

$$B_1 = 0, \; B_2 = 0, \; B_3 = 0$$

aufzulösen, von denen die erste linear, die zweite quadratisch und die dritte cubisch ist. Der ersten Gleichung kann man den Werth von $a_0$, ausgedrückt durch $a_1, \ldots a_4$, entnehmen und diesen in die beiden übrigen Gleichungen substituiren, wodurch letztere die Formen

$$B'_2 = 0, \; B'_3 = 0$$

annehmen mögen. Da die Substitution von $a_0$ eine lineare war, so sind die Grade der Gleichungen $B_2 = 0$ und $B_3 = 0$ nicht geändert worden; es ist daher $B'_2$ eine homogene Function zweiten Grades, $B'_3$ eine solche dritten Grades der vier Grössen $a_1$, $a_2$, $a_3$, $a_4$. Zufolge des vorhin erwähnten Satzes von den homogenen Functionen kann $B'_2$ unter der Form

$$B'_2 = L_1^2 + L_2^2 + L_3^2 + L_4^2$$

dargestellt werden, worin $L_1$, $L_2$, $L_3$, $L_4$ lineare Functionen von $a_1$, $a_2$, $a_3$, $a_4$ bedeuten; der Gleichung $B'_2 = 0$ genügt man daher durch die Annahme

$$L_1^2 + L_2^2 = 0, \; L_3^2 + L_4^2 = 0$$

oder

$$L_1 = L_2 \sqrt{-1}, \; L_3 = L_4 \sqrt{-1}.$$

Diese Gleichungen sind linear und gestatten, $a_1$ und $a_2$ in linearer Form durch $a_3$ und $a_4$ auszudrücken. Durch Substitution dieser Werthe in die noch übrige Gleichung $B'_3 = 0$ wird der Grad der letzteren nicht erhöht; es geht daher $B'_3 = 0$ in eine neue cubische Gleichung $B''_3 = 0$ über, wobei $B''_3$ eine homogene Function von $a_3$ und $a_4$ bedeutet. Wählt man $a_4$ willkührlich, etwa $= 1$, so bestimmt sich $a_3$ durch eine Gleichung dritten Grades und daraus folgen $a_2$, $a_1$, $a_0$ mit Hülfe der vorigen linearen Gleichungen, also:

Die allgemeine Gleichung

$$x^m + A_1 x^{m-1} + A_2 x^{m-2} + \ldots + A_{m-1} x + A_m = 0$$

kann immer auf die Form

$$y^m + B_4 y^{m-4} + B_5 y^{m-5} + \ldots + B_{m-1} y + B_m = 0$$

gebracht werden, und zwar bedarf es hierzu nur der Auflösung einer cubischen Gleichung.

Ganz ähnliche Schlüsse sind für den Fall zu machen, dass man die mit $B_1$, $B_2$, $B_4$ behafteten Glieder wegschaffen will; man findet sehr leicht den Satz:

Die Reduction der allgemeinen Gleichung

$$x^m + A_1 x^{m-1} + A_2 x^{m-2} + \ldots + A_{m-1} x + A_m = 0$$

auf die Form

$$y^m + B_3 y^{m-3} + B_5 y^{m-5} + \ldots + B_{m-1} y + B_m = 0$$

ist immer möglich und zwar durch Auflösung einer biquadratischen Gleichung.

Hiernach kann die allgemeine Gleichung fünften Grades auf die Formen

$$y^5 + B_4 y + B_5 = 0,$$
$$y^5 + B_3 y^2 + B_5 = 0,$$

gebracht werden, die bei Substitution von

$$y = \frac{1}{z}, \quad \frac{B_4}{B_5} = C_1, \quad \frac{B_3}{B_5} = C_2, \quad \frac{1}{B_5} = C_5$$

übergehen in

$$z^5 + C_1 z^1 + C_5 = 0,$$
$$z^5 + C_2 z^3 + C_5 = 0;$$

die allgemeine Gleichung fünften Grades kann demnach alle trinomischen Formen erhalten, deren sie ohne Aufgabe ihres Grades fähig ist*). Durch eine passende Substitution für $y$ oder $z$ lässt sich auch noch einer der Coefficienten $B$ oder $C$ irgend einer willkührlich gewählten Grösse gleich machen; so geht die erste Form für $y = \eta \sqrt[4]{-B_4}$ über in

9) $$\eta^5 - \eta - b = 0;$$

für $z = -\frac{2}{5} C_1 \zeta$ wird aus der dritten Form

10) $$\zeta^5 - \frac{5}{2} \zeta^4 - c = 0.$$

Die erste Gleichung (9) benutzte Hermite**), die zweite (10) Brioschi***); dem letzteren folgen wir hauptsächlich, weil seine Abhandlungen ausser der Auflösung der Gleichungen fünften Grades auch sonst manches Bemerkenswerthe enthalten.

## II. Die Auflösung der reducirten Gleichung.

Aus den Untersuchungen Jacobi's ist hinreichend bekannt, dass der Ausdruck

$$\frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-\lambda^2 y^2)}}$$

auf die Form

$$\frac{1}{M} \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2 x^2)}}$$

gebracht werden kann, worin $M$ eine constante Grösse bezeichnet; es gehört dazu die Substitution

$$y = \frac{a_1 x + a_3 x^3 + a_5 x^5 + \ldots + a_n x^n}{b_0 + b_2 x^2 + b_4 x^4 + \ldots + b_{n-1} x^{n-1}} = \frac{U}{V}$$

unter $n$ eine ungerade Zahl verstanden. Setzt man wie gewöhnlich

$$K = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2 x^2)}}, \qquad K' = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k'^2 x^2)}},$$

$$k^2 + k'^2 = 1,$$

$$\omega = \frac{mK + m'K'i}{n}, \qquad i = \sqrt{-1},$$

---

*) Jerrard: Mathematical Researches. Hamilton: Report of the sixt meeting of the British Association.

**) Comptes rendus No. 11 (15. Mars), 1858. pag. 508.

***) Annali di Matematica 1858; fasc. 3, pag. 175; fasc. 4, pag. 256.

wobei $m$ und $m'$ ganze Zahlen bedeuten, und schreibt $z$ für $\frac{1}{m}$, so hat man die beiden Formeln (Jacobi, Fundam. nova, § 21)

$$\sqrt[4]{\lambda} = k^{\frac{n}{4}} \sin \operatorname{coam} 4\omega \sin \operatorname{coam} 8\omega \ldots \sin \operatorname{coam} 2(n-1)\omega,$$

$$\sqrt{z} = (-1)^{\frac{n-1}{4}} \frac{\sin \operatorname{am} 4\omega \ \sin \operatorname{am} 8\omega \ldots \sin \operatorname{am} 2(n-1)\omega}{\sin \operatorname{coam} 4\omega \ \sin \operatorname{coam} 8\omega \ldots \sin \operatorname{coam} 2(n-1)\omega}.$$

Für den Fall, dass $n$ eine Primzahl ist, ergeben sich hieraus $n+1$ verschiedene Transformationen der $n^{\text{ten}}$ Ordnung, welche den folgenden $n+1$ Werthen von $\omega$ entsprechen:

$$\frac{K}{n}, \quad \frac{K'i}{n}, \quad \frac{K+K'i}{n}, \quad \frac{K+2K'i}{n}, \ldots \frac{K+(n-1)K'i}{n};$$

die Substitution derselben in die vorhin erwähnten Formeln liefert sowohl für $\lambda$ als für $z$ ebensoviel verschiedene einander correspondirende Werthe $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_{n+1}$ und $z_1, z_2, \ldots z_{n+1}$. Denkt man sich diese als Wurzeln algebraischer Gleichungen, so sind letztere vom Grade $n+1$; die erste derselben heisst bekanntlich die Modulargleichung, für die zweite würde der analoge Name Multiplicatorgleichung passend sein. Den $n+1$ Werthen von $\lambda$ entsprechen $n+1$ Werthe des Integrales

$$\Lambda = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-\lambda^2 x^2)}},$$

die mit $\Lambda_1, \Lambda_2, \ldots \Lambda_{n+1}$ bezeichnet werden mögen; ihr Zusammenhang mit $z_1, z_2, \ldots z_{n+1}$ wird durch die bekannten Gleichungen vermittelt

$$z_1 = (-1)^{\frac{n-1}{2}} \frac{n\Lambda_1}{K}, \quad z_2 = \frac{\Lambda_2}{K}, \ldots z_{n+1} = \frac{\Lambda_{n+1}}{K}.$$

Wenn ferner die gewöhnliche Bezeichnung

$$q = e^{-\frac{\pi K'}{K}}$$

beibehalten wird, so ist (Fundam. p. 184)

$$\sqrt{\frac{2K}{\pi}} = 1 + 2q + 2q^4 + 2q^9 + \ldots = \Sigma q^{m^2},$$

wobei sich das Summenzeichen auf alle ganzen, von $-\infty$ bis $+\infty$ reichenden Werthe des $m$ bezieht; auch hat man nach einem von Jacobi*) gefundenen und von Sohncke**) bewiesenen Satze

$$\sqrt{z_1} = (-1)^{\frac{n-1}{4}} \sqrt{n} \frac{\Sigma q^{m^2 n}}{\Sigma q^{m^2}}, \quad (m = -\infty \ldots m = +\infty)$$

und die Werthe von $\sqrt{z_2}, \sqrt{z_3}, \ldots \sqrt{z_{n+1}}$ ergeben sich dadurch, dass man in dem Ausdrucke

$$\frac{\Sigma \varrho^{m^2}}{\Sigma q^{m^2}}$$

der Reihe nach

$$\varrho = q^{\frac{1}{n}}, \ \alpha q^{\frac{1}{n}}, \ \alpha^2 q^{\frac{1}{n}}, \ldots \alpha^{n-1} q^{\frac{1}{n}}$$

---

*) Crelle's Journal, Bd. III, pag. 193.
**) Ebendaselbst, Bd. XVI, pag. 103—107.

setzt, wo $\alpha$ eine Wurzel der Gleichung $\alpha^n - 1 = 0$ bedeutet. Diese Eigenschaft der Multiplicatoren wurde zuerst von Abel bemerkt, wenn auch nicht völlig genau bewiesen*).

Nach diesen Vorerinnerungen bemerken wir, dass die Reihe der Quadratzahlen 1, 4, 9, 16 etc. folgende Zerlegung gestattet

$$\begin{array}{cccccc}
 & n^2 & & (2n)^2 & & \\
1, & (n-1)^2, & (n+1)^2, & (2n-1)^2, & (2n+1)^2, & \ldots \\
4, & (n-2)^2, & (n+2)^2, & (2n-2)^2, & (2n+2)^2, & \ldots \\
9, & (n-3)^2, & (n+3)^2, & (2n-3)^2, & (2n+3)^2, & \ldots \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \\
\left(\frac{n-1}{2}\right)^2, & \left(\frac{n+1}{2}\right)^2, & \left(\frac{3n-1}{2}\right)^2, & \left(\frac{3n+1}{2}\right)^2, & \left(\frac{5n-1}{2}\right)^2, & \ldots
\end{array}$$

von deren Richtigkeit man sich augenblicklich überzeugt, sobald man die Colonnen wechselweis abwärts und aufwärts durchgeht; man hat daher die entsprechende Zerlegung

$$\begin{aligned}
&1 + 2q^{\frac{1}{n}} + 2q^{\frac{4}{n}} + 2q^{\frac{9}{n}} + \ldots\ldots\ldots\ldots \\
&= 1 + 2q^n + 2q^{4n} + 2q^{9n} + \ldots\ldots\ldots\ldots \\
&\quad + 2q^{\frac{1}{n}} + 2q^{\frac{(n-1)^2}{n}} + 2q^{\frac{(n+1)^2}{n}} + 2q^{\frac{(2n-1)^2}{n}} + 2q^{\frac{(2n+1)^2}{n}} + \ldots \\
&\quad + 2q^{\frac{4}{n}} + 2q^{\frac{(n-2)^2}{n}} + 2q^{\frac{(n+2)^2}{n}} + 2q^{\frac{(2n-2)^2}{n}} + 2q^{\frac{(2n+2)^2}{n}} + \ldots \\
&\quad \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\
&\quad + 2q^{\frac{1}{n}\left(\frac{n-1}{2}\right)^2} + 2q^{\frac{1}{n}\left(\frac{n+1}{2}\right)^2} + 2q^{\frac{1}{n}\left(\frac{3n-1}{2}\right)^2} + \ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

oder kürzer

$$\begin{aligned}
\Sigma q^{\frac{m^2}{n}} &= \Sigma q^{m^2 n} + 2q^{\frac{1}{n}}\, \Sigma q^{m^2 n + 2m} + 2q^{\frac{4}{n}}\, \Sigma q^{m^2 n + 4m} + \ldots \\
&\quad \ldots + 2q^{\frac{r^2}{n}}\, \Sigma q^{m^2 n + 2rm} + \ldots
\end{aligned}$$

worin sich die Summenzeichen auf alle ganzen von $-\infty$ bis $+\infty$ reichenden $m$ beziehen, und $r$ zuletzt den Werth $\frac{n-1}{2}$ bekommt. Hiernach sind $\sqrt{z_1}$, $\sqrt{z_2}$, $\sqrt{z_3}$ etc. leicht auszudrücken; setzt man nämlich zur Abkürzung

$$11)\quad A_0 = \frac{\Sigma q^{m^2 n}}{\Sigma q^{m^2}},\quad A_1 = 2q^{\frac{1}{n}} \frac{\Sigma q^{m^2 n + 2m}}{\Sigma q^{m^2}},\ \ldots\ A_r = 2q^{\frac{r^2}{n}} \frac{\Sigma q^{m^2 n + 2rm}}{\Sigma q^{m^2}},$$

so ist nach dem Vorigen

$$\sqrt{z_1} = (-1)^{\frac{n-1}{4}} \sqrt{n}\, A_0,$$

$$12)\quad \begin{cases} \sqrt{z_2} = A_0 + A_1 + A_2 + \ldots + A_{\frac{n-1}{2}}, \\[2ex] \sqrt{z_3} = A_0 + \alpha A_1 + \alpha^4 A_2 + \ldots\ldots\ \alpha^{\left(\frac{n-1}{2}\right)^2} A_{\frac{n-1}{2}}, \end{cases}$$

---

*) Crelle's Journal, Bd. III, pag. 400. Oeuvres complètes, T. I, pag. 315.

und hieraus ergeben sich $\sqrt{z_4}$, $\sqrt{z_5}$ etc., wenn man in der letzten Gleichung $\alpha^2$, $\alpha^3$ etc. an die Stelle von $\alpha$ treten lässt. Diese wichtige Eigenschaft der Wurzeln der Multiplicatorgleichung hat Jacobi im 3. Bde. des Crelle'schen Journales (pag. 308) angegeben.

Für $n = 3$ ist bekanntlich, wenn $\sqrt[4]{k} = u$, $\sqrt[4]{\lambda} = v$ gesetzt wird,

$$M = \frac{v}{2u^3 + v} = \frac{1}{z}, \quad v = \frac{2u^3}{z-1};$$

die Modulargleichung lautet

$$u^4 - v^4 + 2uv\,(1 - u^2v^2) = 0$$

und die Multiplicatorgleichung

$$(z-1)^4 + 4\,(z-1)^3 - 16u^8 z = 0$$

oder

$$z^4 - 6z^2 + 8\,(1 - 2k^2)\,z - 3 = 0;$$

dem Vorigen zufolge sind die Wurzeln der letzteren

$$\sqrt{z_1} = i\sqrt{3}\,A_0, \quad \sqrt{z_2} = A_0 + A_1, \quad \sqrt{z_3} = A_0 + \alpha A_1, \quad \sqrt{z_4} = A_0 + \alpha^2 A_1.$$

Mit Hülfe der bekannten Relationen zwischen den Coefficienten und den Wurzeln einer Gleichung findet man leicht folgende Beziehungen zwischen $A_0$ und $A_1$

$$A_0\,(A_0^3 + A_1^3) = 1, \quad 8\,A_0^6 - 20\,A_0^3\,A_1^3 - A_1^6 = 8\,(1 - 2k^2).$$

Bei der Transformation fünften Grades ist die Multiplicatorgleichung

$$(z-1)^6 - 4\,(z-1)^5 + 2^8 k^2 k'^2 z = 0$$

oder

$$13)\quad z^6 - 10z^5 + 35z^4 - 60z^3 + 55z^2 - 2\,(13 - 2^7 k^2 k'^2)\,z + 5 = 0,$$

und nach No. 12)

$$14)\ \begin{cases} \sqrt{z_1} = \sqrt{5}\,A_0, & \sqrt{z_2} = A_0 + A_1 + A_2, \quad \sqrt{z_3} = A_0 + \alpha A_1 + \alpha^4 A_2, \\ \sqrt{z_4} = A_0 + \alpha^2 A_1 + \alpha^3 A_2, & \sqrt{z_5} = A_0 + \alpha^3 A_1 + \alpha^2 A_2, \quad \sqrt{z_6} = A_0 + \alpha^4 A_1 + \alpha A_2, \end{cases}$$

worin $\alpha$ eine Wurzel der Gleichung $\alpha^5 - 1 = 0$ bedeutet. Bildet man aus aus $z_1, z_2, \ldots z_6$ rückwärts die Coefficienten der obigen Gleichung sechsten Grades, wobei zur Abkürzung

$$15)\ \begin{cases} L = A_0^2 + A_1 A_2, \\ M = 8A_0^4 A_1 A_2 - 2A_0^2 A_1^2 A_2^2 + A_1^3 A_2^3 - A_0\,(A_1^5 + A_2^5), \\ N = 320A_0^6 A_1^2 A_2^2 - 160A_0^4 A_1^3 A_2^3 + 20A_0^2 A_1^4 A_2^4 + 6A_1^5 A_2^5, \\ \quad - 4A_0(32A_0^4 - 20A_0^2 A_1 A_2 + 5A_1^2 A_2^2)(A_1^5 + A_2^5) + A_1^{10} + A_2^{10} \end{cases}$$

gesetzt werden möge, so erhält man folgende Gleichungen

$$-10 = -10L, \qquad 35 = 35L^2, \qquad -60 = -60L^3 + 10M,$$

$$55 = 55L^4 - 10LM, \quad -2(13 - 2^7 k^2 k'^2) = -26L^5 + 30L^2M - N,$$

$$5 = 5\,(L^3 - M)^2.$$

Die erste, dritte und fünfte derselben liefern die Werthe

$$16)\qquad L = 1, \qquad M = 0, \qquad N = -2^8 k^2 k'^2,$$

durch welche die übrigen 3 Gleichungen von selbst erfüllt sind.

Wir untersuchen nun weiter den Zusammenhang zwischen folgenden fünf Grössen

$$17) \begin{cases} x_1 = (z_2-z_1)(z_3-z_6)(z_4-z_5), \; x_2 = (z_3-z_1)(z_4-z_2)(z_5-z_6), \\ x_3 = (z_4-z_1)(z_5-z_3)(z_6-z_2), \; x_4 = (z_5-z_1)(z_6-z_4)(z_2-z_3), \\ x_5 = (z_6-z_1)(z_2-z_5)(z_3-z_4), \end{cases}$$

namentlich suchen wir diejenige Gleichung, deren Wurzeln $x_1, x_2, \ldots x_5$ sein würden. Zu diesem Zwecke drücken wir $x_1, x_2, \ldots x_5$ erst durch $A_0$, $A_1$, $A_2$ aus, indem wir nach verrichteten Multiplicationen in 17) für $z_1, z_2, \ldots z_6$ ihre Werthe aus No. 14) einsetzen; wir erhalten hierdurch fünf Gleichungen von der Form

$$18) \begin{cases} x_1 = \sqrt{5}\,(B_0 + B_1 + B_2 + B_3 + B_4), \\ x_2 = \sqrt{5}\,(B_0 + \alpha B_1 + \alpha^2 B_2 + \alpha^3 B_3 + \alpha^4 B_4), \\ x_3 = \sqrt{5}\,(B_0 + \alpha^2 B_1 + \alpha^4 B_2 + \alpha B_3 + \alpha^3 B_4), \\ x_4 = \sqrt{5}\,(B_0 + \alpha^3 B_1 + \alpha B_2 + \alpha^4 B_3 + \alpha^2 B_4), \\ x_5 = \sqrt{5}\,(B_0 + \alpha^4 B_1 + \alpha^3 B_2 + \alpha^2 B_3 + \alpha B_4), \end{cases}$$

worin $B_0, B_1, \ldots B_4$ zur Abkürzung eingeführt wurden und folgende Werthe haben

$$\begin{aligned} B_0 &= 4M \\ B_1 &= 8A_0A_1^3A_2^2 - 16A_0^3A_1^2A_2 - 2A_1A_2^5 - A_1^6 + 4A_0^2A_2^4, \\ B_4 &= 8A_0A_1^2A_2^3 - 16A_0^3A_1A_2^2 - 2A_1^5A_2 - A_2^6 + 4A_0^2A_1^4, \\ B_2 &= 16A_0^3A_2^3 - 16A_0^4A_1^2 + A_1^4A_2^2 - 4A_0A_1A_2^4, \\ B_3 &= 16A_0^3A_1^3 - 16A_0^4A_2^2 + A_1^2A_2^4 - 4A_0A_1^4A_2. \end{aligned}$$

Ist nun

$$19) \qquad x^5 + p_1 x^4 + p_2 x^3 + p_3 x^2 + p_4 x + p_5 = 0$$

die Gleichung, deren Wurzeln $x_1, x_2, \ldots x_5$ sein würden, so bildet man die Coefficienten $p$ auf gewöhnlichem Wege aus $x_1, x_2, \ldots x_5$, wobei für die letzteren Grössen ihre in No. 18) angegebenen Werthe zu nehmen sind. Für die ersten vier Coefficienten erhält man

$$p_1 = -5\sqrt{5}.\,B_0,\; p_2 = -5^2P_2,\; p_3 = -5^2\sqrt{6}.\,P_3,\; p_4 = -5^3(P_4 - P_2^2),$$

wobei zur Abkürzung gesetzt wurde

$$\begin{aligned} P_2 &= B_1B_4 + B_2B_3, \qquad P_3 = B_1^2B_3 + B_2^2B_1 + B_3^2B_4 + B_4^2B_2, \\ P_4 &= B_1^3B_2 + B_2^3B_4 + B_3^3B_1 + B_4^3B_3 + 3B_1B_2B_3B_4. \end{aligned}$$

Drückt man $B_1, B_2, B_3, B_4$ durch $A_0, A_1, A_2$ aus und berücksichtigt die Gleichungen 15), so ist einfacher

$$P_2 = 2\,(LN - 3M^2),\; P_3 = 4M\,(LN - 5M^2);$$
$$P_4 = 15M^4 - L^2N^2 + 2LM^2N.$$

Man kennt aber aus No. 16) die Werthe von $L, M, N$, daher wird

$$P_2 = -2^9k^2k'^2,\; P_3 = 0,\; P_4 = -2^{16}k^4k'^4,$$

und nach dem Vorigen wegen $B_0 = 4M = 0$,

$$p_1 = 0,\; p_2 = 2^9 5^2 k^2 k'^2,\; p_3 = 0,\; p_4 = 2^{16} 5^4 k^4 k'^4.$$

Um noch $p_5$ zu berechnen, gehen wir auf die Gleichung 13) zurück und bilden das Product aus den Differenzen ihrer Wurzeln, also das Product aus den Grössen

$$\left.\begin{array}{r}(z_2-z_1)(z_3-z_1)(z_4-z_1)(z_5-z_1)(z_6-z_1)\\(z_3-z_2)(z_4-z_2)(z_5-z_2)(z_6-z_2)\\(z_4-z_3)(z_5-z_3)(z_6-z_3)\\(z_5-z_4)(z_6-z_4)\\(z_6-z_5)\end{array}\right\} = \Pi$$

dieses ist bekanntlich die sogen. Determinante der gegebenen Gleichung und kann auf verschiedene Weise aus den Coefficienten der Gleichung hergeleitet werden. Im vorliegenden Falle giebt die Rechnung

$$\Pi^2 = 2^{44} 5^5 k^8 k'^8 (1-4k^2k'^2)^2$$

und da nach 19) und 17) $p_5 = x_1 x_2 x_3 x_4 x_5 = -\Pi$ ist, so hat man

$$p_5 = -2^{22} 5^2 \sqrt{5}.\ k^4 k'^4 (1-4k^2k'^2).$$

Zufolge der Werthe von $p_1, p_2, \ldots p_5$ gestaltet sich die gesuchte Gleichung zur folgenden

$$x^5 + 2^9 5^2 k^2 k'^2 x^3 + 2^{16} 5^4 k^4 k'^4 x - 2^{22} 5^2 \sqrt{5}.k^4 k'^4 (1-4k^2k'^2) = 0$$

oder

$$20)\qquad x(x^2 + 2^8 5^2 k^2 k'^2)^2 = 2^{22} 5\sqrt{5}.k^4 k'^4 (1-4k^2k'^2),$$

welche mittelst der Substitutionen

$$21)\qquad 1 + \frac{x^2}{2^8 5^2 k^2 k'^2} = \frac{2}{5}\zeta, \qquad \frac{1}{2}\left(\frac{1-4k^2k'^2}{kk'}\right)^2 = c$$

auf die einfachere Form

$$\zeta^5 - \frac{5}{2}\zeta^4 - c = 0$$

zurückgeführt wird.

Die Auflösung der vorstehenden Gleichung ist daher verhältnissmässig sehr einfach. Bei gegebenem $c$ liefert die Gleichung

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1-4k^2k'^2}{kk'}\right)^2 = c \text{ oder } 4(kk')^2 + \sqrt{2c}.\ (kk') = 1$$

den Werth von $kk' = k\sqrt{1-k^2}$, hieraus ergeben sich $k, k', K, K', q, \varrho$, mithin auch für $n = 5$ die Werthe von $z_1, z_2, \ldots z_6$, nämlich

$$\sqrt{z_1} = -\sqrt{\frac{5\pi}{2K}}.\ \Sigma q^{5m^2},\quad \sqrt{z_2} = \sqrt{\frac{\pi}{2K}}.\ \Sigma q^{\frac{1}{5}m^2},$$

$$\sqrt{z_3} = \sqrt{\frac{\pi}{2K}}.\ \Sigma \alpha q^{\frac{1}{5}m^2},\quad \sqrt{z_4} = \sqrt{\frac{\pi}{2K}}.\ \Sigma \alpha^2 q^{\frac{1}{5}m^2},$$

$$\sqrt{z_5} = \sqrt{\frac{\pi}{2K}}.\ \Sigma \alpha^3 q^{\frac{1}{5}m^2},\quad \sqrt{z_6} = \sqrt{\frac{\pi}{2K}}.\ \Sigma \alpha^4 q^{\frac{1}{5}m^2},$$

worin sich alle Summenzeichen auf die Werthe $m = -\infty$ bis $m = +\alpha$ beziehen und jede der Summen leicht durch die Transcendente $\Theta$ ausgedrückt werden könnte. Mittelst der Formeln 17) erhält man jetzt $x_1, x_2, \ldots x_5$ und nach No. 21) die entsprechenden Werthe von $\zeta$, welche die gesuchten Wurzeln sind.

---

V.

# Die Theorie der Pole und Polaren bei Curven höherer Ordnung; mit einer Einleitung: Zwei Coordinatensysteme.

Von W. Fiedler,

**Lehrer der darstellenden Geometrie a. d. K. Gewerbschule zu Chemnitz.**

---

Bekanntlich ist die gerade Linie, die man in Bezug auf einen Kegelschnitt als die Polare eines Punktes in seiner Ebene bezeichnet, mit jenem Punkte, ihrem Pol, durch diese Eigenschaft verbunden: sie ist der geometrische Ort aller der Punkte, die auf den durch den Pol gehenden Transversalen die zu diesem conjugirt Harmonischen sind im Verhältniss zu den beiden Schnittpunkten der Transversale mit dem Kegelschnitt. Auch sind die Punkte, wo sie den Kegelschnitt schneidet, die Berührungspunkte der vom Pol aus an denselben zu ziehenden Tangenten.

In richtiger Verallgemeinerung der in diesen Sätzen niedergelegten mathematischen Gedanken sind die neueren Geometer zu der eleganten Theorie der Polaren bei Curven höherer Ordnungen gekommen. Diese Theorie erscheint mir eben sowohl als specielle Studie, wie in systematischer Beziehung von besonderer Wichtigkeit. Indem ich sie in ihren Hauptzügen hier vorlege, folge ich wesentlich den Ideen, die in dem ausgezeichneten Werke des englischen Geometers M. George Salmon niedergelegt sind, welches unter dem Titel: „*A treatise on the higher plane curves*“ im Jahre 1852 in Dublin veröffentlicht worden ist; jedoch berücksichtige ich dabei zugleich eine im Augustheft des Journals von Liouville 1857 erschienene Abhandlung von M. E. de Jonquières, in welcher dieser Gelehrte nach dem genannten englischen Autor die bezeichnete Theorie entwickelt, indem er sie jedoch im Geiste der anharmonischen Geometrie seines berühmten Lehrers, M. Chasles, darlegt. Es erscheint mir zweckmässig, beide auf verschiedene Principien fussende Behandlungsweisen zur Vergleichung neben einander zu stellen; dabei wird die Methode des englischen Autors als die eigentliche Quelle überall voranstehen und man wird hoffentlich finden, dass sie wohl die Mühe eines etwas ausführlicheren Eingehens belohnt. Die Gesichtspunkte des französischen Bearbeiters lassen sich leicht in kurzen Einschaltungen darlegen.

### Zwei Coordinatensysteme.

Angesichts der Bemerkung, dass eine Curve eben sowohl als der Ort eines bewegten Punktes wie als die Umhüllung einer beweglichen geraden Linie betrachtet und nach beiden Gesichtspunkten classificirt werden kann, indem man dort durch die Anzahl der Punkte der Curve in der nämlichen geraden Linie den Grad und hier durch die Anzahl der Tangenten der Curve vom nämlichen Punkte aus die Classe der erzeugten Curve bestimmt, legt Salmon seinen Entwickelungen hauptsächlich zwei verschiedene Coordinatensysteme zu Grunde, deren Gegensatz man durch die Bezeichnung Punkt-Coordinaten und Tangential-Coordinaten allenfalls bezeichnen kann; denn in dem einen System wird ein Punkt, im andern eine gerade Linie durch Coordinaten und dafür im ersten eine gerade Linie, im zweiten ein Punkt durch eine Gleichung zwischen denselben ausgedrückt. Aber die Punkt-Coordinaten Salmon's sind nicht mit den gewöhnlichen Cartesischen Coordinaten identisch, sie bilden vielmehr ein allgemeineres System, von dem das des Cartesius ein specieller Fall ist; es hat nicht zwei, sondern drei Coordinaten zur Bestimmung des Punktes und gleicherweise dienen im andern System drei Coordinaten zur Bestimmung der geraden Linie; beide Systeme entsprechen einander genau und gewähren den wichtigen Vortheil, dass sie immer homogene Gleichungen liefern. Salmon stellt sie einander entgegen als Dreilinien-Coordinaten und Dreipunkt-Coordinaten, weil in jenem System die Lage eines Punktes durch seine Entfernung von drei festen geraden Linien, in diesem die Lage einer geraden Linie durch ihre Entfernung von drei festen Punkten bestimmt wird.

Wenn der englische Gelehrte nur das eine dieser Systeme in dem genannten Werke kurz entwickelt, da er das andere als den Lesern seiner Schriften bekannt voraussetzt, so halte ich es für zweckmässig, beide gleichmässig näher darzulegen; diess soll im Folgenden zunächst gethan werden.

Man gelangt zu dem Dreilinien-Coordinaten-System auf folgende Art. Wenn

$$L = 0, \quad M = 0, \quad N = 0$$

die Gleichungen dreier geraden Linien vorstellen, die ein Dreieck bilden, so kann eine beliebige vierte Gerade

$$Ax + By + C = 0$$

in der Form

$$lL + mM + nN = 0$$

ausgedrückt werden, wo $l, m, n$ Coefficienten sind, die von den Grössen $A, B, C$, $a, b, c$, $a'b'c'$... abhängen, deren letztere aus den Gleichungen

$$L = ax + by + c, \quad M = a'x + b'y + c', \quad N = a'' + b'' + c''$$

herkommen; denn man wird zur Erfüllung dieser Form drei Gleichungen ersten Grades zur Bestimmung der drei Unbekannten $l, m, n$ erhalten, nämlich

$$la + ma' + na'' = A, \quad lb + mb' + nb'' = B, \quad lc + mc' + nc'' = C$$

und bekommt daraus

$$l = \frac{A(b'c''-b''c')+B(c'a''-c''a')+C(a'b''-a''b')}{a(b'c''-b''c')+b(c'a''-c''a')+c(a'b''-a''b')}$$

$$m = \frac{A(b''c-bc'')+B(c''a-ca'')+C(a''b-ab'')}{a'(b''c-bc'')+b'(c''a-ca'')+c'(a''b-ab'')}$$

$$n = \frac{A(bc'-b'c)+B(ca'-c'a)+C(ab'-a'b)}{a''(bc'-b'c)+b''(ca'-c'a)+c''(ab'-a'b)}.$$

Aus diesen Werthen von $l, m, n$ erkennt man, dass die Herstellung der Form

$$lL + mM + nN = 0$$

nur dann nicht möglich ist, wenn die drei Geraden $L, M, N$ durch denselben Punkt gehen, weil dann die Nenner in den Ausdrücken der drei Coefficienten Null und diese selbst unendlich werden. Dieselbe Möglichkeit bleibt auch für die Gleichungsform

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$$

oder die daraus mit der Bezeichnung der Figur (Fig. 1, Taf. I) abgeleitete

$$x \cos\alpha + y \sin\alpha = p$$

bestehen; sind die Gleichungen dreier geraden Linien in dieser Form durch die Zeichen $\lambda, \mu, \nu$ repräsentirt, so kann die Gleichung jeder vierten Geraden in der Form

$$l\lambda + m\mu + n\nu = 0$$

geschrieben werden. Welchen Nutzen dieses einfache Princip gewähren kann, mag ein Beispiel zeigen. Man habe ein Dreieck $ABC$ (Fig. 2) mit irgend drei von den Ecken ausgehenden und in einem Punkte $O$ sich schneidenden Transversalen $AD, BE, CF$; dann lassen sich die Eigenschaften der daraus entspringenden Figur sehr leicht entwickeln. Die Gleichungen der Dreiecksseiten $AB, AC, BC$ seien respective dargestellt durch

$$\gamma = 0, \quad \beta = 0, \quad \alpha = 0;$$

dann kann $l\alpha - m\beta$ die Gerade $CO$, $m\beta - n\gamma$ die Gerade $AO$ und $n\gamma - l\alpha$ die Gerade $BO$ darstellen, denn erstens charakterisiren diese Gleichungen die durch die Ecken $C, A, B$ gehenden und zweitens die in demselben Punkte $O$ sich begegnenden Geraden. (Das letztere bekanntlich dadurch, dass ihre Summe verschwindet.)

Hiernach lassen sich auf Grund jenes Princips die Gleichungen aller andern Linien der Figur bilden. Die Linie $EF$, die Verbindungslinie von $E$ (Durchschnittspunkt von $\beta$ mit $n\gamma - l\alpha$) mit $F$ (Durchschnittspunkt von $\gamma$ mit $l\alpha - m\beta$) wird dargestellt durch die Gleichung

$$m\beta + n\gamma - l\alpha = 0.$$

Ganz ebenso $DF$ durch

$$l\alpha - m\beta + n\gamma = 0 \quad \text{und } DE \text{ durch} \quad l\alpha + m\beta - n\gamma = 0.$$

Aus diesen Gleichungen ergiebt sich sofort, dass die drei Punkte $L, M, N$ in derselben durch

$$l\alpha + m\beta + n\gamma = 0$$

dargestellten geraden Linie liegen; denn dieselbe enthält den Punkt $N$ als

Durchschnitt von $\gamma$ mit $l\alpha + m\beta - n\gamma$, den Punkt $L$ als Durchschnitt von $\alpha$ mit $m\beta + n\gamma - l\alpha$ und den Punkt $M$ als Durchschnitt von $\beta$ mit $l\alpha - m\beta + n\gamma = 0$.

Auch ist die Gleichung von $CN$, als einer durch $C$ oder $\alpha, \beta$ und durch $N$ oder $l\alpha + m\beta + n\gamma$, $\gamma$ gehenden geraden Linie

$$l\alpha + m\beta = 0$$

und ebenso sind die Gleichungen von $AL$ und $BM$

$$m\beta + n\gamma = 0 \quad \text{und} \quad n\gamma + l\alpha = 0.$$

Bekanntlich bilden vier solche Gerade, wie die Symbole

$$\alpha = 0, \quad \beta = 0, \quad \alpha - k\beta = 0, \quad \alpha - k'\beta = 0$$

sie darstellen, ein Büschel, dessen anharmonisches Verhältniss $\frac{k}{k'}$ ist und daher für $k = -k'$ ein harmonisches Büschel.

Demnach ist $BN$ in $F$ und $A$ harmonisch getheilt, denn die Gleichungen der Linien $CB, CA, CN, CF$ sind

$$\alpha = 0, \quad \beta = 0, \quad l\alpha + m\beta = 0, \quad l\alpha - m\beta = 0;$$

desgleichen $AM$ in $E$ und $C$, denn die Linien $BA$, $BC$, $BM$, $BE$ haben die Gleichungen

$$\gamma = 0, \quad \alpha = 0, \quad n\gamma + l\alpha = 0, \quad n\gamma - l\alpha = 0;$$

und endlich auch $CL$ in $D$ und $B$, da die Gleichungen von $AC, AB, AL, AD$ sind

$$\beta = 0, \quad \gamma = 0, \quad m\beta + n\gamma = 0, \quad m\beta - n\gamma = 0.$$

Auch sagen die schon geschriebenen Gleichungen aus, dass $AL, BO, CN$ sich in einem Punkte schneiden müssen, desgleichen $AO$, $BM, CN$ u. s. w.

Wenn aber nach diesem Princip

$$A\alpha + B\beta + C\gamma = 0$$

die Gleichung einer geraden Linie bezogen auf die drei Fundamentallinien $\alpha, \beta, \gamma$ ausdrückt, so gelangt man augenblicklich zu den Dreilinien-Coordinaten, sobald man $\alpha, \beta, \gamma$ nicht mehr bloss als Abkürzungen für die Grössen

$$x \cos \alpha + y \sin \alpha - p, \quad x \cos \beta + y \sin \beta - p_1, \quad x \cos \gamma + y \sin \gamma - p_2,$$

sondern als die einfache Bezeichnung der Länge des Perpendikels von einem Punkte $(x, y)$ auf die durch $x \cos \alpha + y \sin \alpha = p$ u. s. w. respective dargestellte Linie betrachtet. Dann sind $\alpha, \beta, \gamma$ die Entfernungen des nämlichen Punktes von den drei festen Fundamentallinien, d. h. die Dreilinien-Coordinaten desselben und die Lage einer geraden Linie bestimmt sich durch eine homogene Gleichung zwischen diesen Entfernungen von der Form

$$A\alpha + B\beta + C\gamma = 0$$

Jede nicht homogene Gleichung kann leicht auf eine doppelte Weise in die homogene Form gebracht werden durch eine Einführung constanter Factoren; wären $a, b, c$ die Seitenlängen des Fundamentaldreiecks, so wird der unveränderliche doppelte Inhalt des Dreiecks, $M$, durch folgende Gleichung ausgedrückt, wo auch der Punkt $O$ liege, dessen Coordinaten $\alpha, \beta, \gamma$ sind:

$$M = a\alpha + b\beta + c\gamma.$$

Und daher kann eine nicht homogene Gleichung, wie $\beta = 5$, homogen gemacht werden, indem man sie schreibt

$$M\beta = 5\,(a\alpha + b\beta + c\gamma).$$

Wenn man die Winkel des Fundamentaldreiecks mit $A, B, C$ bezeichnet, so ist auch

$$\alpha \sin A + \beta \sin B + \gamma \sin C$$

eine zu demselben Zwecke brauchbare Constante, denn ihr Werth ist stets

$$\frac{M \sin A}{a}\;*).$$

Und hier kann man erkennen, dass diess Coordinatensystem mit dem Cartesischen sehr nahe verwandt ist. Denn betrachtet man diese Constanten, z. B. die letzte, so erscheinen sie unter der allgemeinen Form der Gleichung der geraden Linie; es muss also auch die Gleichung

$$\alpha \sin A + \beta \sin B + \gamma \sin C = 0$$

eine solche darstellen. Gleichwohl kann diese aber nicht für einen endlichen Punkt wahr sein, denn für jeden solchen ist

$$\alpha \sin A + \beta \sin B + \gamma \sin C = \frac{M \sin A}{a}$$

und nicht gleich Null; diese Gleichung kann nur eine unendlich entfernte Gerade in der Ebene des Fundamentaldreiecks darstellen. Und auch aus der gewöhnlichen Cartesischen Form der Gleichung $Ax + By + C = 0$ ergiebt sich leicht, dass die paradoxe Gleichung $C = 0$ die Linie im Unendlichen ausdrückt. Deshalb wird auch eine Parallele zur Linie $\alpha = 0$ durch $\alpha + C = 0$ dargestellt, d. h. nach einem bekannten Princip, als durch den Durchschnittspunkt der Linien $\alpha$ und $C$, d. i. den unendlich entfernten Punkt von $\alpha$ hindurchgehend.

Alle Cartesischen Gleichungen sind nur der Form nach nicht homogen, wohl aber in Wirklichkeit, denn je nach den Anforderungen der Homogeneität ist die der Gleichung unterzulegende Einheit eine verschiedene, sie ist für $y = 6$ eine lineare, für $xy = 4$ eine Flächeneinheit; wenn $z$ die bezügliche lineare Einheit darstellt, so kann die Cartesische Gleichung der geraden Linie geschrieben werden

$$Ax + By + Cz = 0.$$

Endlich kann man sagen, dass Gleichungen in Cartesischen Coordinaten nur die besondere Form sind, welche Gleichungen in Dreilinien-Coordinaten annehmen, wenn zwei der Fundamentallinien zu Coordinatenachsen geworden sind, indess die dritte unendlich entfernt ist.

In diesen Dreilinien-Coordinaten ist die allgemeine Gleichung eines Kegelschnitts, wenn wie vorher durch $\alpha\beta\gamma$ die drei Fundamentallinien ausgedrückt werden, offenbar

$$A\alpha^2 + B\alpha\beta + C\beta^2 + D\alpha\gamma + E\beta\gamma + F\gamma^2 = 0,$$

*) Dass auch Formen höherer Grade hiermit homogen zu machen sind, ist leicht zu erkennen; Näheres findet sich darüber bei dem zweiten Coordinaten-System.

denn sie ist vom zweiten Grade und schliesst fünf Constante ein, bedeutet daher einen Ort, der durch fünf beliebig gewählte Punkte bestimmt ist und kann also jeden möglichen Kegelschnitt darstellen. Sie ist die homogene Gleichung zweiten Grades zwischen drei Veränderlichen; die vollständige Gleichung zweiten Grades zwischen zwei Veränderlichen kann durch Einführung der Lineareinheit $z$ in sie übergeführt werden; nämlich

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

in $$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dxz + Eyz + Fz^2 = 0.$$

Auch findet diess nicht bloss bei Curven des zweiten; sondern bei Curven jeden beliebigen Grades statt; die vollständige Gleichung $n^{ten}$ Grades zwischen zwei Veränderlichen geht in gleicher Weise in die homogene Gleichung $n^{ten}$ Grades mit drei Veränderlichen über, denn die Anzahl der Glieder ist in beiden gleichmässig

$$\frac{(n+1)(n+2)}{1.2}.$$

Beim Gebrauch dieser Dreilinien-Coordinaten ist es auch ein nicht gering zu achtender Vorzug, dass man über drei Linien zum Vortheil der Einfachheit der Untersuchung verfügen kann, indess im Cartesischen System nur die möglichst zweckmässige Wahl zweier Coordinatenachsen frei ist. Als ein Beleg dafür kann die elegante Art dienen, in welcher dadurch der Beweis der anharmonischen Eigenschaften der Kegelschnitte geliefert werden kann. Es ist ein bekanntes und sehr fruchtbares Princip in der analytischen Geometrie, dass wenn $S = 0$ und $S' = 0$ zwei Oerter repräsentiren, eine Gleichung der Form $S = kS'$ (wo $k$ eine Constante) immer einen Ort darstellt, dem die jenen beiden Oertern gemeinsamen Punkte angehören; es ist von demselben schon im Vorigen Gebrauch gemacht worden. Nach ihm ist leicht ersichtlich, dass $P.Q = R^2$ einen Kegelschnitt darstellt, welchen die geraden Linien $P$ und $Q$ tangiren, während $R$ die entsprechende Berührungssehne ist. Irgend eine mit dem Kegelschnitt verbundene gerade Linie kann nun in Gliedern aus $P$, $Q$ und $R$ ausgedrückt werden und diess geschieht im Grunde nach dem Princip des Systems der Dreiecks-Coordinaten. Wenn $\mu P = R$ die Gleichung einer geraden Linie wäre, die irgend einen Punkt der Curve mit dem Punkte $(P, R)$ verbindet, so ergiebt sich durch Einsetzen in die Gleichung der Curve

$$Q = \mu R \text{ und } \mu^2 P = Q$$

für die Gleichungen der Linien, die diesen Punkt mit den Punkten $(Q, R)$ und $(P, Q)$ verbinden. Sicher werden zwei von diesen drei Gleichungen einen Punkt in der Curve bestimmen, man kann ihn nach der einzigen Veränderlichen, die zu seiner Bestimmung dient, den Punkt $\mu$ nennen. Wenn nun $\mu$ und $\mu_1$ zwei so bestimmte Punkte auf der Curve sind, so wird man die Gleichung ihrer Verbindungslinie erhalten:

$$\mu\mu_1 P - (\mu + \mu_1) R + Q = 0;$$

denn diess ist eine Gleichung, die ebensowohl erfüllt wird durch die Vor-

aussetzungen $\mu P = R$ und $\mu R = Q$ für den Punkt $\mu$, als auch durch die $\mu_1 P = R$ und $\mu_1 R = Q$ für den Punkt $\mu_1$. Hiernach drücken sich die Verbindungslinien von vier Punkten $\mu_1$, $\mu_2$, $\mu_3$, $\mu_4$ eines Kegelschnitts mit einem fünften Punkte $\mu$ desselben folgendermaassen aus

$$\mu_1 (\mu P - R) + (Q - \mu R) = 0$$
$$\mu_2 (\mu P - R) + (Q - \mu R) = 0$$
$$\mu_3 (\mu P - R) + (Q - \mu R) = 0$$
$$\mu_4 (\mu P - R) + (Q - \mu R) = 0$$

und das anharmonische Verhältniss dieser vier Geraden ist daher

$$= \frac{(\mu_1 - \mu_2)\ (\mu_3 - \mu_4)}{(\mu_1 - \mu_3)\ (\mu_2 - \mu_4)},$$

d. h. unabhängig von der Lage des Punktes $\mu$. Man hat daher den Satz: das anharmonische Verhältniss des Büschels, welches durch Verbindung von vier Punkten eines Kegelschnitts mit irgend einem fünften entsteht, ist constant.

Und ebenso leicht ergiebt sich die anharmonische Eigenschaft der Tangenten; denn zunächst geht die Gleichung der Verbindungslinie zweier Punkte $\mu$ und $\mu_1$ in die Gleichung der Tangente über, wenn $\mu$ und $\mu_1$ zusammenfallen, nämlich

$$\mu^2 P - 2\mu R + Q = 0.$$

Wenn aber in den Punkten $\mu_1$, $\mu_2$, $\mu_3$, $\mu_4$ feste Tangenten gedacht werden und $\mu$ der Berührungspunkt einer beweglichen Tangente ist, so ist das anharmonische Verhältniss, nach welchem diese von jenen geschnitten wird, mit dem des Büschels gleich, welches die Verbindungslinien der vier Schnittpunkte mit dem Punkte $(P, Q)$ bilden. Man erhält aber die Gleichung einer dieser Linien, wenn man aus zwei Gleichungen, wie

$$\mu^2 P - 2\mu R + Q = 0 \text{ und } \mu_1{}^2 P - 2\mu_1 R + Q = 0$$

die Grösse $R$ eliminirt, nämlich

$$\mu\mu_1 P - Q = 0.$$

Das fragliche anharmonische Verhältniss ist daher das der vier Linien

$$\mu\mu_1 P - Q = 0,\ \mu\mu_2 P - Q = 0,\ \mu\mu_3 P - Q = 0,\ \mu\mu_4 P - Q = 0$$

d. h.
$$\frac{(\mu_1 - \mu_2)\ (\mu_3 - \mu_4)}{(\mu_1 - \mu_3)\ (\mu_2 - \mu_4)}$$

oder es gilt der Satz: Vier feste Tangenten eines Kegelschnitts treffen irgend eine bewegliche Tangente desselben immer in Punkten von demselben anharmonischen Verhältniss. Ich halte die zahlreichen an diese wichtigen Sätze sich anschliessenden Entwickelungen zurück, weil durch das Mitgetheilte das System der Dreilinien-Coordinaten für das Folgende ausreichend erläutert sein dürfte.

Die Idee der Dreipunkt-Coordinaten lässt sich ebenfalls sehr einfach an das gewöhnliche Cartesische System anknüpfen; denn wenn in demselben die Gleichung der geraden Linie geschrieben wird $Ax + By + C = 0$,

so ist durch die drei Grössen $A$, $B$, $C$ (die sich allerdings auf zwei Unabhängige reduciren) die Lage der Linie vollkommen bestimmt; man könnte dieselben daher wohl die Coordinaten der Linie nennen. Wenn aber diese bestimmenden Coefficienten oder Coordinaten in der Weise veränderlich wären, dass sie immer durch eine Relation

$$aA + bB + cC = 0$$

(wo $a$, $b$, $c$ constant sind) verbunden bleiben, so geht die damit dargestellte bewegliche Gerade durch einen festen Punkt, denn wenn man zwischen beiden Gleichungen $C$ eliminirt, so erhält man die Gleichung

$$A\left(x - \frac{a}{c}\right) + B\left(y - \frac{b}{c}\right) = 0$$

d. h. die Gleichung einer durch den Punkt $x = \frac{a}{c}$, $y = \frac{b}{c}$ gehenden Geraden. Darnach kann man sicher die Gleichung $aA + bB + cC = 0$ die Gleichung dieses Punktes nennen und hätte darnach ein System, in welchem eine gerade Linie durch Coordinaten und ein Punkt durch eine Gleichung dargestellt wird. Der Analogie nach muss dasselbe ein specieller Fall des wirklichen Systems der Dreipunkt-Coordinaten sein. Diess selbst ergiebt sich wie folgt.

Denkt man sich von zwei Punkten $A$ und $B$ auf eine gerade Linie Perpendikel $\alpha$ und $\beta$ gefällt, so ist leicht zu erkennen, dass die Senkrechte von dem Punkte, der die Linie $AB$ im Verhältniss $l:m$ theilt, auf jene Gerade durch $\frac{l\alpha + m\beta}{l + m}$ ausgedrückt wird; in Folge dessen wird jede durch diesen Punkt selbst gehende Linie die Relation erfüllen müssen

$$l\alpha + m\beta = 0.$$

Man darf diese somit als die Gleichung eines Punktes betrachten, der, in der Verbindungslinie der beiden Punkte $\alpha = 0$, $\beta = 0$ liegend, dieselbe im Verhältniss von $m:l$ theilt. Wenn nun der Punkt $l\alpha + m\beta = 0$ mit $\gamma = 0$ verbunden und die Distanz im Verhältniss $n:l + m$ getheilt würde, so müsste die Senkrechte auf irgend eine gerade Linie durch den so gefundenen Punkt sein

$$\frac{(l + m)\,\frac{l\alpha + m\beta}{l + m} + n\gamma}{l + m + n} = \frac{l\alpha + m\beta + n\gamma}{l + m + n}.$$

Und wenn eine gerade Linie die Bedingung

$$l\alpha + m\beta + n\gamma = 0$$

erfüllt, so muss sie durch jenen Theilpunkt hindurchgehen. So repräsentirt also die Gleichung ersten Grades einen Punkt, indem sie zwischen den Dreipunkt-Coordinaten aller der geraden Linien besteht, welche durch denselben hindurchgehen. Man kann ihn nach dieser Gleichung sehr leicht construiren; sind nämlich (in Fig. 3) $A$, $B$, $C$ die drei Fundamentalpunkte, so findet man den durch die Gleichung $l\alpha + m\beta + n\gamma = 0$ dargestellten

Punkt erstens: wenn man $BC$ in $D$ im Verhältniss $n:m$ und $AD$ im Verhältniss $n+m:l$ theilt; zweitens: indem man $CA$ nach dem Verhältniss $l:n$ und $BE$ nach dem $l+n:m$ theilt; oder endlich drittens: indem man $AB$ nach dem Verhältniss $m:l$ und $CF$ nach $l+m:n$ theilt. Der letzte Theilpunkt ist immer der Punkt $O$, den jene Gleichung darstellt.

Diese Constructionen enthalten zugleich den bekannten Satz, dass

$$\frac{BD}{DC}\cdot\frac{CE}{EA}\cdot\frac{AF}{FB}=1.$$

Die Gleichung des Punktes $O$ kann auch durch die Flächeninhalte der gebildeten Dreiecke ausgedrückt werden:

$$BOC.\,\alpha+COA.\,\beta+AOB.\,\gamma=0;$$

und indem man die Dreiecksinhalte in Function zweier Seiten und des eingeschlossenen Winkels einsetzt

$$\frac{\sin BOC}{OA}.\,\alpha+\frac{\sin COA}{OB}.\,\beta+\frac{\sin AOB}{OC}.\,\gamma=0.$$

Einige Anwendungen und Erläuterungen dieser Methode dürften nicht überflüssig sein.

Wenn zwei Punkte die Gleichungen haben

$$l\alpha+m\beta+n\gamma=0,\quad l'\alpha+m'\beta+n'\gamma=0,$$

die zur Abkürzung durch $\mu=0$, $\nu=0$ vertreten werden können, so bezeichnet

$$A.\,\frac{l\alpha+m\beta+n\gamma}{l+m+n}+B.\,\frac{l'\alpha+m'\beta+n'\gamma}{l'+m'+n'}=0$$

einen Punkt, der die Entfernung der zwei ersten im Verhältniss $B:A$ theilt und kurz ist durch $\mu+k\nu=0$ irgend ein Punkt in der Verbindungslinie der beiden ersten ausgedrückt. Die zwei Punkte $\mu+k\nu=0$, $\mu-k\nu=0$ bezeichnen Punkte, die die Linie $(\mu\nu)$ innerlich und äusserlich in demselben Verhältniss theilen; demnach bezeichnen

$$\mu,\ \nu,\ \mu+k\nu,\ \mu-k\nu$$

ein System von vier harmonischen Punkten einer geraden Linie. In gleicher Weise ist das anharmonische Verhältniss des Systems

$$\mu,\ \nu,\ \mu+k\nu,\ \mu+l\nu$$

das von $k:l$, und das des Systems

$$\mu+k\nu,\ \mu+l\nu,\ \mu+m\nu,\ \mu+n\nu \text{ ist } \frac{(k-m)\,(l-n)}{(k-n)\,(l-m)}.$$

Es wird $\alpha+\beta=0$ der Mittelpunkt der Linie $AB$, $\alpha-\beta=0$ der unendlich entfernte Punkt derselben Linie sein; daher $\alpha-\gamma=0$ der unendlich entfernte Punkt der Linie $AC$ und $\beta-\gamma=0$ der von $BC$ und diese drei Punkte liegen in der durch $\alpha=\beta=\gamma$ dargestellten Linie, der unendlich entfernten Geraden; dass $\alpha=\beta=\gamma$ ihr Ausdruck sein müsse, hätte man schon aus der Betrachtung schliessen können, dass alle endlichen Punkte von der geraden Linie im Unendlichen gleichweit entfernt sein

müssen. Irgend ein **Punkt im Unendlichen** wird durch die Gleichung $l\alpha + m\beta + n\gamma = 0$ bezeichnet, wenn zugleich die Bedingung $l + m + n = 0$ erfüllt ist; denn dann genügen die Coordinaten der geraden Linie des Unendlichen der Gleichung. Es ist ferner klar, dass drei Gleichungen wie diese $l\alpha - m\beta = 0$, $m\beta - n\gamma = 0$, $n\gamma - l\alpha = 0$ **drei Punkte in gerader Linie** bezeichnen. Diese Gleichungen liefern jetzt sogleich den wohlbekannten Satz, dass wenn eine gerade Linie die drei Seiten eines Dreiecks $ABC$ in den Punkteu $L$, $M$, $N$ schneidet, die Relation stattfindet:

$$\frac{AM}{MC} \cdot \frac{CL}{LB} \cdot \frac{BN}{NA} = 1.$$

Man sieht schon aus diesem Wenigen, dass zwischen beiden Coordinaten-Systemen vollständige Reciprocität stattfindet; dieselben Gleichungen, die dort zeigen, dass drei Linien sich in einem Punkte schneiden, sagen hier aus, dass drei Punkte in einer geraden Linie liegen. Wenn die Gleichungen

$$\alpha + \beta = 0, \ \beta - \gamma = 0, \ \gamma + \alpha = 0,$$

als Gleichungen in Dreilinien-Coordinaten interpretirt, ausdrücken, dass die Halbirungslinien irgend zweier Aussenwinkel eines Dreiecks sich in der Halbirungslinie des dritten inneren Winkels begegnen, so bedeuten sie als Gleichungen in Dreipunkt-Coordinaten, dass die Verbindungslinie der Mittelpunkte zweier Seiten eines Dreiecks der dritten Seite parallel ist.

Viele Sätze bedürfen bei Anwendung dieses Coordinaten-Systems kaum des Beweises; z. B. **die Halbirungslinien der Seiten eines Dreiecks schneiden sich in einem Punkte**, nämlich dem $\alpha + \beta + \gamma = 0$; denn dieser Gleichung genügen die Coordinaten der Linie von $C$ nach der Mitte von $AB$, d. i. $\alpha + \beta = 0$, $\gamma = 0$, ebenso wie die der Linie von $A$ nach der Mitte von $BC$, d. i. $\beta + \gamma = 0$, $\alpha = 0$ und die der Linie von $B$ nach der Mitte von $CA$, d. i. $\alpha + \gamma = 0$ und $\beta = 0$.

Oder: **die drei Winkelhalbirungslinien eines Dreiecks schneiden sich in einem Punkte.** Denn der Punkt, wo eine dieser Halbirungslinien die Gegenseiten schneidet, kann, wenn $a$, $b$, $c$ die Seitenlängen, $C$, $B$, $A$ die Winkel des Dreiecks bezeichnen, geschrieben werden entweder $a\alpha + b\beta = 0$ oder $\alpha \sin A + \beta \sin B = 0$, weil die Gegenseite von der Halbirungslinie im Verhältniss der anliegenden Seiten getheilt wird. Die Gleichung

$$a\alpha + b\beta + c\gamma = 0 \text{ oder } \alpha \sin A + \beta \sin B + \gamma \sin C = 0$$

genügt den Coordinaten der Verbindungslinie des vorher bestimmten Punktes mit der Ecke $\gamma$ und so nach ihrer symmetrischen Form auch den andern Winkelhalbirungslinien. Mit derselben Leichtigkeit beweist sich der Satz vom Durchschnitt der drei Höhen.

In Folgendem ist der Satz bewiesen: **Die Mittelpunkte der Diagonalen eines vollständigen Vierecks liegen in einer gera-**

den **Linie**. Seien drei der Ecken Fundamentalpunkte, also ihre Gleichungen $\alpha = 0$, $\beta = 0$, $\gamma = 0$ und die der vierten $l\alpha + m\beta + n\gamma = 0$. Die Gleichung des Mittelpunkts einer Diagonale ist $\alpha + \gamma = 0$; die des Mittelpunkts der zweiten

$$\beta + \frac{l\alpha + m\beta + n\gamma}{l + m + n} = 0 \text{ oder}$$

$$(l + m + n)\,\beta + (l\alpha + m\beta + n\gamma) = 0.$$

Die Gleichung des Durchschnitts der Gegenseiten $AB$ und $CD$ ist $l\alpha + m\beta = 0$ und des von $AD$ und $BC$, $m\beta + n\gamma = 0$; die Gleichung des Mittelpunktes der diese zwei Punkte verbindenden geraden Linie ist daher

$$\frac{l\alpha + m\beta}{l + m} + \frac{m\beta + n\gamma}{m + n} = 0 \text{ oder } (m + n)\,(l\alpha + m\beta) + (l + m)\,(m\beta + n\gamma) = 0,$$

welches geschrieben werden kann

$$ln\,(\alpha + \gamma) + m[(l + m + n)\,\beta + l\alpha + m\beta + n\gamma] = 0,$$

woraus man deutlich erkennt, dass die drei Mittelpunkte in derselben geraden Linie liegen.

Im Bereich der Curven erweist sich an Stelle des allgemeinen Princips, dass der Ort $S = kS'$ die gemeinschaftlichen Punkte der Oerter $S = 0$ und $S' = 0$ enthält, hier das Folgende als gleich nützlich: **Wenn $U = 0$ und $U' = 0$ die Gleichungen zweier Oerter in Dreipunktcoordinaten bedeuten, so bezeichnet $U = kU'$ einen Ort, der von allen gemeinschaftlichen Tangenten jener beiden Oerter gleichfalls berührt wird**; denn die Coordinaten jeder den Gleichungen $U = 0$ und $U' = 0$ genügenden geraden Linie müssen auch die Gleichung $U = kU'$ befriedigen. So bezeichnet dann $\alpha\beta = k.\,\gamma\delta$ einen Kegelschnitt, der die vier Seiten des Vierecks berührt, dessen Ecken $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ bezeichnen, und so $\alpha\beta = k\gamma^2$ einen Kegelschnitt, der durch die Punkte $\alpha, \beta$ geht und die Verbindungslinien dieser Punkte mit $\gamma$ zu Tangenten hat.

Wenn sonst eine Tangente als eine gerade Linie definirt wird, welche die Curve in zwei aufeinanderfolgenden Punkten schneidet, so wird im gegenwärtigen System ein Punkt in der Curve als der Durchschnitt zweier aufeinanderfolgenden Tangenten betrachtet. Und daher ist ganz allgemein, wenn die Gleichung einer Curve $\alpha\varphi = \gamma^2\psi$ wäre, immer $\alpha$ ein Punkt der Curve und die Linie, die ihn mit $\gamma$ verbindet, eine Tangente derselben. Es ist gewiss, dass alles früher in Bezug auf Kegelschnitte im System der Dreilinien-Coordinaten Entwickelte hierher passt, indem ohne Veränderung des Rechnenwerks die Interpretation die des Systems der Dreipunkt-Coordinaten wird. Repräsentirt die Gleichung $\alpha\beta = \gamma^2$ (analog dort $P.\,Q = R^2$) den Kegelschnitt, dem $\alpha$ angehört und den $(\alpha, \gamma)$ und $(\beta, \gamma)$ tangiren, so bezeichnen $\mu\alpha - \gamma$ und $\beta - \mu\gamma$ irgend eine Tangente, und $\mu^2\alpha - 2\mu\gamma + \beta = 0$ bezeichnet den Berührungspunkt.

Wenn man in dem System der Dreilinien-Coordinaten die Aufgabe löst: **Ein Dreieck ist einem Kegelschnitt umschrieben; zwei**

seiner Ecken bewegen sich in festen geraden Linien, es ist der Ort der dritten Ecke zu finden; so entspricht ganz die nämliche Rechnung im Geiste der Dreipunkt-Coordinaten der Aufgabe: Ein Dreieck ist einem Kegelschnitt eingeschrieben und zwei Seiten desselben drehen sich um feste Punkte; man soll die Umhüllungscurve der dritten Seite finden. Und in beiden Fällen ist die Antwort ein Kegelschnitt, der mit dem gegebenen eine doppelte Berührung hat, aber im ersten Falle in den beiden Punkten, wo die Tangenten vom Durchschnittspunkt der festen geraden Linien aus den Kegelschnitt berühren; im zweiten in den Punkten, wo die Verbindungslinie der beiden festen Punkte den gegebenen Kegelschnitt schneidet.

Wenn die Aufgabe wäre, den Ort eines Punktes zu finden, der den Abschnitt der veränderlichen Tangente eines Kegelschnitts zwischen zwei festen Tangenten desselben in einem gegebenen Verhältniss theilt, so möge $\gamma$ der Durchschnittspunkt der festen Tangenten sein und die Gleichung des Kegelschnitts $\alpha\beta = k.\ \gamma^2$. Dann bezeichnet $\mu\alpha = k\gamma$ den Punkt, wo eine veränderliche Tangente die $\alpha$, $\gamma$ verbindende Tangente schneidet, $\beta = \mu k\gamma$ dagegen den Punkt, wo dieselbe $\beta$, $\gamma$ trifft und es ist nun

$$\frac{A}{\mu - k}(\mu\alpha - k\gamma) + \frac{B}{1 - \mu k}(\beta - \mu k\gamma) = 0$$

die Gleichung des Punktes, der die Verbindungslinie dieser Punkte in dem gegebenen Verhältniss $B:A$ theilt. Diese Gleichung wird, wenn man die Nenner entfernt und ordnet

$$\mu^2 (Ak\alpha + Bk\gamma) - \mu\,[A\alpha + B\beta + (A + B)\,k^2\gamma] + Ak\gamma + Bk\beta = 0.$$

Und um nun den gesuchten Ort zu erhalten, muss man die Bedingung bilden, dass sie in $\mu$ gleiche Wurzeln besitze; diese Bedingung aber und damit die Gleichung des gesuchten Ortes ist

$$4k^2 (A\alpha + B\gamma)(A\gamma + B\beta) = [A\alpha + B\beta + (A + B)\,k^2\gamma]^2.$$

Wenn man in dem System der Dreilinien-Coordinaten unterscheiden will, ob eine Curve zweiten Grades eine Hyperbel, Ellipse oder Parabel sei, so müssen die Winkel des Dreiecks $\alpha\beta\gamma$ bekannt sein. In dem gegenwärtigen System kann die Unterscheidung leicht allgemein vollzogen werden. Die Curve wird eine Parabel sein, wenn die Coordinaten der Linie im Unendlichen $\alpha = \beta = \gamma$ der Gleichung in Dreipunkt-Coordinaten genügen; und weil die Gleichung homogen ist, wird diess der Fall sein, wenn die Summe der Coefficienten Null ist; so stellt z. B. $\alpha\beta = \gamma^2$ eine Parabel dar und man sieht daraus sofort, dass das Product der Senkrechten von zwei Punkten der Curve auf eine Tangente dem Quadrate der Senkrechten gleich ist, die man vom Pol der Verbindungslinie dieser Punkte auf dieselbe fällen kann.

Um zu untersuchen, ob die allgemeine Gleichung

$$A\alpha^2 + 2B\alpha\beta + C\beta^2 + 2D\alpha\gamma + 2E\beta\gamma + F\gamma^2 = 0$$

eine Ellipse oder Hyperbel darstellt, ist zu zeigen, ob die Linie im Unendlichen die Curve in zwei reellen Punkten schneidet oder nicht; dazu wird man zuerst die Bedingung bilden, welche erfüllt sein muss, damit ein Punkt

$$l\alpha + m\beta + n\gamma = 0$$

der Curve angehöre, dann diesen Punkt speciell als einen Punkt des Unendlichen einführen, indem man $l + m = -n$ setzt und für $l:m$ auflösen; man wird damit die Gleichung der Punkte haben, wo die Linie im Unendlichen die Curve schneidet, und wenn man die Bedingung bildet, dass die Gleichung in $l:m$ reelle Wurzeln haben soll, so wird diess die Bedingung sein, dass die Curve eine Hyperbel sein soll. Man findet, dass die durch die allgemeine Gleichung dargestellte Curve eine Hyperbel ist, wenn die Coefficientensumme

$$A + 2B + C + 2D + 2E + F$$

und die Function

$$AE^2 + CD^2 + FB^2 - ACF - 2BDE,$$

einerlei Zeichen haben. Wenn diese Grössen verschiedene Zeichen besitzen, so ist die Curve eine Ellipse. Ist die letztere Function gleich Null, so ist die Gleichung in Factoren zerfällbar und repräsentirt zwei Punkte.

Wenn man die allgemeine Gleichung des Kegelschnitts in der symmetrischen Form

$$a\alpha^2 + a'\beta^2 + a''\gamma^2 + 2b\beta\gamma + 2b'\gamma\alpha + 2b''\alpha\beta = 0$$

schreibt und zur Abkürzung durch $S$ vertreten lässt, so drückt dieselbe Gleichung

$$\alpha'\frac{dS}{d\alpha} + \beta'\frac{dS}{d\beta} + \gamma'\frac{dS}{d\gamma} = 0$$

im System der Dreilinien-Coordinaten die Polare irgend eines Punktes $\alpha'\beta'\gamma'$ und im System der Dreipunkt-Coordinaten den Pol irgend einer geraden Linie $\alpha'\beta'\gamma'$ aus.

Denkt man im letzteren Fall diese gerade Linie im Unendlichen, so dass ihre Coordinaten $\alpha' = \beta' = \gamma'$ — was im ersten Falle dem Punkte im Unendlichen entspricht — so erhält man die Gleichung des Centrums (denn es ist der Pol der unendlich entfernten geraden Linie)

$$\frac{dS}{d\alpha} + \frac{dS}{d\beta} + \frac{dS}{d\gamma} = 0;$$

und dieselbe Gleichung wird im ersten Falle die Gleichung eines Durchmessers sein, denn ein solcher ist die Polare eines unendlich entfernten Punktes.

Wenn z. B. der Kegelschnitt einem Viereck eingeschrieben sein soll, von welchem drei Ecken die Fundamentalpunkte $\alpha, \beta, \gamma$ sind, indess die vierte

$$l\alpha + m\beta + n\gamma$$

kurz durch $\delta$ bezeichnet wird, so ist seine Gleichung

$$\alpha\gamma = k.\beta\delta$$

und sein Centrum muss daher sein

$$\alpha + \gamma = k(\beta + \delta);$$

woraus man ersieht, dass dasselbe immer in der geraden Linie liegen muss, die die Mittelpunkte der Diagonalen des Vierecks verbindet.

Diese Beispiele mögen genügen; nur das ist noch zu erörtern, wie in diesem Coordinatensystem nicht homogene Gleichungen homogen gemacht werden können. Man darf voraussetzen, dass das Mittel dazu dem bei den Dreilinien-Coordinaten angewendeten ähnlich sein werde, dass es also hier bestehen wird in einer Relation zwischen den drei Senkrechten von den Eckpunkten eines Dreiecks auf eine gerade Linie. Ist also — indem wir Cartesische Coordinaten in ihrer allgemeinsten Form anwenden

$$x \cos \Theta + y \sin \Theta + p = 0$$

eine gerade Linie, so sind

$$x_1 \cos \Theta + y_1 \sin \Theta + p = \alpha, \quad x_2 \cos \Theta + y_2 \sin \Theta + p = \beta,$$
$$x_3 \cos \Theta + y_3 \sin \Theta + p = \gamma,$$

und aus diesen Gleichungen werden $\Theta$ und $p$ zu eliminiren sein. Indem man die erste dieser drei Gleichungen mit $y_2 - y_3$, die zweite mit $y_3 - y_1$ und die dritte mit $y_1 - y_2$ multiplicirt und den doppelten Inhalt des Dreiecks

$$= x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2)$$

durch $M$ abkürzend bezeichnet, erhält man

$$M \cos \Theta = \alpha(y_2 - y_3) + \beta(y_3 - y_1) + \gamma(y_1 - y_2)$$

und auf ganz analoge Weise

$$-M \sin \Theta = \alpha(x_1 - x_3) + \beta(x_3 - x_1) + \gamma(x_1 - x_2)$$

zwei Gleichungen, aus denen nun $\Theta$ aufs Einfachste verschwindet. Indem man in das Resultat der Elimination die Seiten des Dreiecks $a, b, c$ und seine Winkel $A, B, C$ statt der Coordinatendifferenzen und die drei Höhen $p_1, p_2, p_3$ für die Bezeichnung des doppelten Inhalts einführt, erhält man die folgende Gleichung

$$\frac{\alpha^2}{p_1^2} + \frac{\beta^2}{p_2^2} + \frac{\gamma^2}{p_3^2} - \frac{2\alpha\beta \cos C}{p_1 p_2} - \frac{2\beta\gamma \cos A}{p_2 p_3} - \frac{2\gamma\alpha \cos B}{p_3 p_1} = 1,$$

welche kurz

$$\Omega = 1$$

geschrieben werden mag. Mit Hilfe dieses Ausdrucks kann man jede nicht homogene Gleichung homogen machen; man wird in einer solchen, wie z. B.

$$\varphi(\alpha, \beta, \gamma) = const.$$

zuerst durch Einführung irgend eines Factors $z$ die Homogeneität herstellen und sodann diesen mit Hilfe der Gleichung $z^2 = \Omega$ eliminiren.

Und hier ist nicht zu übersehen, dass diese Elimination von verschiedenem Erfolg ist, jenachdem die Constante in der Gleichung

$$\varphi(\alpha, \beta, \gamma, const.) = 0$$

nur in geraden oder auch in ungeraden Potenzen enthalten ist; in jenem Falle ist die Gleichung nach der Elimination von demselben Grade wie vorher, im andern Falle nachher vom doppelten Grade. So wird die Gleichung eines Kreises, dessen Mittelpunkt $l\alpha + m\beta + n\gamma = 0$ und dessen Halbmesser $r$ ist

$$\frac{l\alpha + m\beta + n\gamma}{l + m + n} = r,$$

indem man sie homogen macht, zu dieser

$$(l\alpha + m\beta + n\gamma)^2 = r^2 (l + m + n)^2 \Omega;$$

der Kreis ist also eine Curve der zweiten Klasse. Dagegen ist eine Curve

$$\alpha\beta\gamma = const.$$

von der sechsten Klasse, denn sie wird durch die Einführung von $\Omega$ zu

$$\alpha^2\beta^2\gamma^2 = \Omega^3.$$

Und wenn man jetzt endlich untersucht, welches die Bedeutung der Gleichung

$$\frac{\alpha^2}{p_1^2} + \frac{\beta^2}{p_2^2} + \frac{\gamma^2}{p_3^2} - \frac{2\,\alpha\beta\cos C}{p_1 p_2} - \frac{2\beta\gamma\cos A}{p_2 p_3} - \frac{2\gamma\alpha\cos B}{p_3 p_1} = \delta$$

ist, so hat das den nämlichen Sinn und Erfolg, wie die entsprechende Untersuchung bei den Dreilinien-Coordinaten. Die Gleichung scheint zunächst eine Curve zweiter Klasse zu sein, allein sie zerfällt näher betrachtet in Factoren und bezeichnet zwei Punkte. Augenscheinlich ist, dass es keine endlichen Punkte sein können, da man für alle diese immer $\Omega = 1$ hat. Ihre nähere Kenntniss ist aber nach dem Mitgetheilten leicht zu erlangen, denn wären diese Factoren kurz $\omega, \omega'$, so ist die Gleichung eines Kreises vom Mittelpunkte $\delta$ in homogener Form

$$\delta^2 = k^2 . \omega\omega'$$

und man erkennt nun, dass $\omega, \omega'$ die zwei Punkte darstellen, wo die vom Centrum $\delta$ an den Kreis gezogenen Tangenten ihn berühren, oder die zwei Punkte eines Kreises, in denen er die unendlich entfernte gerade Linie schneidet *). Und so gelangt man zu der Einsicht, dass die Auffassung des Cartesischen Systems in dem Sinne der Tangential-Coordinaten etwas darin vom System der Dreipunkt-Coordinaten Abweichendes geben müsste, dass dort nur einer der drei Fundamentalpunkte endlich und reell erscheinen würde.

Ich schliesse hier die Entwickelung dieser Coordinatensysteme, auf deren Benutzung das Folgende gegründet ist; wenn sie etwas lang erscheint, so entschuldige man diess mit dem Wunsche, eine möglichst abgerundete und selbständige, will sagen von Citaten und dergleichen unabhängige Darstellung zu gehen. Dieselbe dürfte gerade dadurch um so gerechtfertigter erscheinen, als es keinem Kenner der deutschen Geometrie bis hierher ent-

---

*) Von diesen Punkten des Kreises im Unendlichen und ihrer Bestimmung handelt Chasles, Traité de géométrie supérieure art. 651 und benachbarte mit besonderer Deutlichkeit.

gangen sein kann, dass bei aller Selbständigkeit der Darlegung die beiden erörterten Coordinatensysteme selbst der zu Grunde liegenden Idee nach nicht wirklich neu sind; beide sind sie offenbar nicht wesentlich verschieden von dem System der Fundamentalpunkte und Fundamentallinien — ich habe diese Namen absichtlich schon im Vorigen gebraucht, von der englischen Bezeichnung abweichend — durch welches vor dreissig Jahren Herr Prof. Möbius zu einer so glänzenden Reihe geometrischer Entdeckungen gelangte. Wenn die rein geometrische Entwickelung und Durchführung und die klare Entgegensetzung der darin enthaltenen Systeme als Punkt-Coordinaten und Tangential-Coordinaten dem englischen Autor eigenthümlich erscheint, so zeigen die Entwickelungen des gedachten klassischen deutschen Werks, dass sein berühmter Verfasser sich die Vortheile dieser Reciprocität nicht entgehen liess. In der vollen Betonung dieser Umstände schmälert man, wie mir scheint, nicht im Entferntesten das Verdienst des englischen Autors; und ich muss hinzufügen, dass aus Salmon's Werken, so weit ich dieselben kenne, zwar eine sorgfältige Beachtung der Arbeiten der neueren deutschen Geometer (Crelle's Journal), aber nirgends sonst gerade eine genauere Kenntniss der Arbeiten des Herrn Prof. Möbius hervorleuchtet; vielmehr sagt derselbe in einer Note, dass sein System der Dreipunkt-Coordinaten ihm nach einem flüchtigen Ueberblick mit der Methode des barycentrischen Calculs zusammenzufallen scheine.

Und so geht aus dem Allen die für jeden deutschen Freund der Geometrie erfreuliche Wahrnehmung hervor, dass die wissenschaftlichen Ideen eines ihrer Vertreter noch immer auch im Auslande in fruchtbringender Wirkungsfähigkeit sich bezeugen; diess kann Salmon's ausgezeichnetes Werk beweisen, wie es — übrigens gleichzeitig — Chasles's *Traité de géom. sup.* allen Einsichtigen in überraschender Weise gezeigt hat. Und die volle Selbständigkeit der genannten Geometer thut dieser Freude keinen Eintrag.

## Pole und Polaren.

Wenn eine Curve $n^{ten}$ Grades zuerst dargestellt wird durch die Gleichung in der Form

$$A + Bx + Cy + Dx^2 + Exy + Fy^2 + \dots$$
$$+ Px^n + Qx^{n-1}y + \dots + Rxy^{n-1} + Sy^n = 0$$

so geht dieselbe durch Einführung von Polar-Coordinaten, d. h. durch Substitution von $\varrho \cos \Theta$ und $\varrho \sin \Theta$ für $x$ und $y$ in die neue Form über

$$A + \varrho\,(B\cos\Theta + C\sin\Theta) + \varrho^2\,(D\cos^2\Theta + E\cos\Theta\sin\Theta + F\sin^2\Theta) +$$
$$\varrho^3\,(G\cos^3\Theta + \dots) + \dots = 0.$$

Man hat nun den wichtigen von Cotes in seiner *Harmonia mensurarum* gegebenen Satz: Wenn man in jedem Radius vector, der von einem festen Punkte $O$ ausgehend, eine Curve $n^{ten}$ Grades in den Punkten $R_1, R_2 \dots$ schneidet, einen Punkt $R$ so wählt, dass

$$\frac{n}{OR} = \frac{1}{OR_1} + \frac{1}{OR_2} + \frac{1}{OR_3} + \dots$$

so ist der Ort von $R$ eine gerade Linie.

Denn wenn man $O$ zum Coordinatenanfang wählt, so ist die Gleichung, welche $OR_1, OR_2 \dots$ bestimmt, von der Form

$$A. \frac{1}{\varrho^n} + (B \cos \Theta + C \sin \Theta) \frac{1}{\varrho^{n-1}}$$
$$+ (D \cos^2\Theta + E \cos \Theta \sin \Theta + F \sin^2\Theta) \frac{1}{\varrho^{n-2}} + \dots = 0$$

Daraus ergiebt sich sofort

$$\frac{n}{OR} = -\frac{B \cos \Theta + C \sin \Theta}{A},$$

oder, indem man zu gewöhnlichen $x, y$-Coordinaten zurückkehrt,

$$Bx + Cy + nA = 0.$$

Auf diese gerade Linie, der Polare im Falle der Kegelschnitte analog, die auch der Ort der harmonischen Mittel der Radien vectoren durch einen gegebenen Punkt ist, kann man den Gebrauch der Worte Pol und Polare ausdehnen und sie die Polarlinie des Anfangspunktes der Coordinaten nennen.

E. de Jonquières schreibt, wie Salmon gleich nachher auch, die Gleichung dieses Ortes in der Form

$$\frac{1}{OR} - \frac{1}{OR_1} + \frac{1}{OR} - \frac{1}{OR_2} + \frac{1}{OR} - \frac{1}{OR_3} + \dots = 0$$

oder kürzer

$$\Sigma \left( \frac{1}{OR} - \frac{1}{OR_n} \right) = 0,$$

und schliesst, dass er eine gerade Linie bedeute, daraus, dass diese Gleichung $OR$ nur im ersten Grade enthält, also dem Punkte $R$ auf jeder Transversale nur eine einzige Lage anweist, von der zugleich leicht zu sehen ist, dass sie nicht in $O$ selbst sein kann, weil, wenn $OR$ Null wäre, auch eine der Grössen $OR_n$ es sein müsste, d. h. $O$ selbst in der Curve läge, was nicht vorausgesetzt ward.

Auf ganz einfache Weise bildet man nun Polarcurven höherer Ordnung. Man setzt den Ort

$$\Sigma \left( \frac{1}{\varrho} - \frac{1}{\varrho_1} \right) \left( \frac{1}{\varrho} - \frac{1}{\varrho_2} \right) = 0$$

und fragt nach seiner Bedeutung. Die Zahl der Glieder in dieser Summe ist die Anzahl der Combinationen zu zweien von $n$ Dingen, also $= \frac{n(n-1)}{2}$; so viel mal wird in jener Summe $\frac{1}{\varrho^2}$ vorkommen, der Coefficient von $\frac{1}{\varrho}$ wird werden $-(n-1) \, \Sigma \left( \frac{1}{\varrho_1} \right)$ und daher wird obige Gleichung des Ortes gleichbedeutend sein mit der folgenden

$$\frac{n(n-1)}{2} \frac{1}{\varrho^2} - (n-1) \frac{1}{\varrho} \Sigma \left( \frac{1}{\varrho_1} \right) + \Sigma \left( \frac{1}{\varrho_1 \varrho_2} \right) = 0.$$

Offenbar stellt sie einen solchen Kegelschnitt dar, dass das harmonische Mittel der Entfernungen vom Coordinatenanfang $O$ zum Kegelschnitt gleich dem harmonischen Mittel der Entfernungen von $O$ zur Curve ist und der reciproke Werth des Products seiner Entfernungen vom Kegelschnitt gleich dem mittlern Product der Paare der reciproken Werthe seiner Entfernungen von der Curve. Man kann denselben die konische Polare des Coordinatenanfangs nennen. Seine Gleichung erhält man, wenn man aus der Gleichung der Curve für

$$\Sigma\left(\frac{1}{\varrho}\right) \text{ und } \Sigma\left(\frac{1}{\varrho_1\,\varrho_2}\right)$$

ihre Werthe einsetzt; sie ist demnach

$$\frac{n\,(n-1)}{2}\,\frac{1}{\varrho^2}+(n-1)\,\frac{B\cos\Theta+C\sin\Theta}{A}\,\frac{1}{\varrho}+\frac{D\cos^2\Theta+E\cos\Theta\sin\Theta+F\sin^2\Theta}{A}=0.$$

Mit demselben Rechte wie vorher schliesst natürlich der französische Mathematiker aus der Gleichung

$$\Sigma\left(\frac{1}{OR}-\frac{1}{OR_1}\right)\left(\frac{1}{OR}-\frac{1}{OR_2}\right)=0,$$

dass der Ort von $R$ nur ein Kegelschnitt sein kann, weil die Grösse $OR$ nur im zweiten Grade in der Gleichung auftritt und $R$ nicht mit $O$ selbst zusammenfallen kann, so lange $O$ nicht der Curve angehört.

Es ist also eine dem Satze von Cotes analoge allgemeine Eigenschaft geometrischer Curven, dass der durch die entwickelten Gleichungen dargestellte Ort immer ein Kegelschnitt ist.

Und so lässt sich die Polarcurve irgend einer höheren Ordnung $k$ bilden, wenn man die Gleichung setzt

$$\Sigma\left(\frac{1}{\varrho}-\frac{1}{\varrho_1}\right)\left(\frac{1}{\varrho}-\frac{1}{\varrho_2}\right)\cdots\left(\frac{1}{\varrho}-\frac{1}{\varrho_k}\right)=0.$$

Dieselbe ist gleichbedeutend mit

$$\frac{n\,(n-1)\ldots(n-k+1)}{1\,.\,2\ldots k}\left(\frac{1}{\varrho}\right)^k-\frac{(n-1)\ldots(n-k+1)}{1\,.\,2\ldots(k-1)}\left(\frac{1}{\varrho}\right)^{k-1}\Sigma\left(\frac{1}{\varrho_1}\right)$$
$$+\frac{(n-2)\ldots(n-k+1)}{1\,.\,2\ldots(k-2)}\left(\frac{1}{\varrho}\right)^{k-2}\Sigma\left(\frac{1}{\varrho_1\,\varrho_2}\right)+\ldots=0,$$

welche eine Curve $k^{\text{ten}}$ Grades bedeutet, die folgende Eigenschaften besitzt (wenn immer $OR$ einen Radius vector der ursprünglichen Curve und $Or$ der Polarcurve bezeichnet)

$$\frac{1}{n}\,\Sigma\,\frac{1}{OR_1}=\frac{1}{k}\,\Sigma\,\frac{1}{Or_1},$$
$$\frac{1\,.\,2}{n\,(n-1)}\,\Sigma\,\frac{1}{OR_1\,.\,OR_2}=\frac{1\,.\,2}{k\,(k-1)}\,\Sigma\,\frac{1}{Or_1\,.\,Or_2},$$
$$\frac{1\,.\,2\,.\,3}{n\,(n-1)\,(n-2)}\,\Sigma\,\frac{1}{OR_1\,.\,OR_2\,.\,OR_3}=\frac{1\,.\,2\,.\,3}{k\,(k-1)\,(k-2)}\,\Sigma\,\frac{1}{Or_1\,.\,Or_2\,.\,Or_3}\text{ u. s. w.}$$

und man erhält die Gleichung dieser Polarcurve durch Einsetzen der Werthe für die Ausdrücke $\Sigma$ aus der gegebenen Gleichung der Curve, wie folgt:

$$\left(\frac{1}{\varrho}\right)^k + \frac{k}{n}\left(\frac{1}{\varrho}\right)^{k-1} \frac{B\cos\Theta + C\sin\Theta}{A}$$
$$+ \frac{k(k-1)}{n(n-1)}\left(\frac{1}{\varrho}\right)^{k-2} \frac{D\cos^2\Theta + E\cos\Theta\sin\Theta + F\sin^2\Theta}{A} + \ldots .$$

oder wie Salmon sie kurz schreibt:

$$u_0 + \frac{k}{n}\cdot u_1 + \frac{k(k-1)}{n(n-1)}u_2 + \frac{k(k-1)(k-2)}{n(n-1)(n-2)}u_3 + \ldots . = 0.$$

Man hat somit eine unbegrenzte Anzahl von Sätzen, die dem von Cotes analog sind.

Aus der Art, in welcher diese Gleichungen gebildet worden sind, folgt sofort, dass die Polarlinie des Coordinatenanfangs in Bezug auf alle diese Polarcurven dieselbe ist, denn das harmonische Mittel der Radien vectoren ist für alle diese Curven dasselbe; dass eben so die conische Polare des Coordinatenanfangs für alle die Curven unter jenen, die den zweiten Grad übersteigen, dieselbe ist, weil der mittlere Werth der Producte der Paare reciproker Werthe der Entfernungen vom Coordinatenanfang für alle diese Curven derselbe bleibt, und dass ganz allgemein irgend eine der Polarcurven des Coordinatenanfangs auch in Bezug zu allen seinen andern Polarcurven höherer Grade eine Polarcurve desselben ist.

E. de Jonquières beweist diese merkwürdige Eigenschaft für den folgenden speciellen Fall: die conische Polare eines Punktes im Verhältniss zu einer Curve vierter Ordnung ist zugleich die conische Polare dieses Punktes bezüglich der im Verhältniss zur gegebenen Curve genommenen cubischen Polare desselben Punktes. Aus der Gleichung

$$\Sigma\left(\frac{1}{OR} - \frac{1}{OR_1}\right)\left(\frac{1}{OR} - \frac{1}{OR_2}\right) = 0$$

folgt nämlich, dass die zwei Werthe von $OR$, die einer beliebigen Transversale $OR_1 R_2 R_3 R_4$ entsprechen, die beiden Wurzeln der Gleichung sind:

$$A, \overline{OR}^2 (OR_1 . OR_2 + OR_1 . OR_3 + OR_1 . OR_4 + OR_2 . OR_3 + OR_2 . OR_4 + OR_3 . OR_4) - 3\,OR\,(OR_1 . OR_2 . OR_3 + OR_1 . OR_2 . OR_4 + OR_1 . OR_3 . OR_4 + OR_2 . OR_3 . OR_4) + 6\,OR_1 . OR_2 . OR_3 . OR_4 = 0.$$

Seien nun $Or$, $Or_1$, $Or_2$ die drei Werthe des Radius vectors der cubischen Polare des Punktes $O$ auf derselben Transversale, so werden die beiden Werthe des Radius vectors der conischen Polare von dieser Curve dritter Ordnung die Wurzeln der Gleichung zweiten Grades sein

$$\overline{OP}^2 (Or + Or_1 + Or_2) - 2\,OP\,(Or . Or_1 + Or . Or_2 + Or_1 . Or_2) + 3\,Or . Or_1 . Or_2 = 0.$$

Und wenn man in dieser die Coefficienten durch die aus der Gleichung

$$\Sigma\left(\frac{1}{OR} - \frac{1}{OR_1}\right)\left(\frac{1}{OR} - \frac{1}{OR_2}\right)\left(\frac{1}{OR} - \frac{1}{OR_3}\right) = 0,$$

welche die cubische Polare darstellt, entnommenen Werthe ersetzt, so erhält man eine mit der Gleichung $A$ identische Gleichung. Also sind die Werthe von $OR$ und $OP$ dieselben und die beiden conischen Polaren decken sich. Der Autor bemerkt dazu noch: dieser Beweis lässt sich ebenso auf jeden speciellen Fall anwenden. Er besteht in einer einfachen Bewährung, die zwar beschwerlich aber nicht schwer ist, weil sie nicht die Bestimmung der Wurzeln der aufeinanderfolgenden Gleichungen, die die Werthe der Radien vectoren der verschiedenen Polaren liefern, selbst erfordert, sondern nur die Kenntniss der Summe der Producte dieser Wurzeln zu einen, zweien, dreien u.s.w. genommen, Producte, die unmittelbar durch die Coefficienten dieser verschiedenen Gleichungen gegeben sind. — Gewiss bleibt die wirkliche Durchführung dieser Schritte von einer beschwerlichen Langwierigkeit.

Durch diesen merkwürdigen Zusammenhang werden alle Polaren derselben Curve und desselben Punktes zu einer wahren Familie der Polarcurven vereinigt.

Wenn der Punkt $O$ in unendlicher Entfernung ist, so ändert sich die Form der definirenden Gleichungen

$$\Sigma\left(\frac{1}{\varrho}-\frac{1}{\varrho_1}\right)=0 \text{ oder } \Sigma\left(\frac{1}{OR}-\frac{1}{OR_1}\right)=0$$

$$\Sigma\left(\frac{1}{\varrho}-\frac{1}{\varrho_1}\right)\left(\frac{1}{\varrho}-\frac{1}{\varrho_2}\right)=0 \text{ oder } \Sigma\left(\frac{1}{OR}-\frac{1}{OR_1}\right)\left(\frac{1}{OR}-\frac{1}{OR_2}\right)=0 \text{ u. s. w.},$$

die man offenbar auch schreiben kann

$$\Sigma\left(\frac{RR_1}{OR\,.\,OR_1}\right)=0,\ \Sigma\left(\frac{RR_1}{OR\,.\,OR_1}\cdot\frac{RR_2}{OR\,.\,OR_2}\right)=0 \text{ u. s. w.}$$

wegen der Gleichheit aller Nenner, die darin vorkommen, in diese:

$$\Sigma(RR_1)=0,\ \Sigma(RR_1\,.\,RR_2)=0,\ \Sigma(RR_1\,.\,RR_2\,.\,RR_3)=0 \text{ u. s. w.},$$

und diese Gleichungen besagen: die Polarlinie des unendlich entfernten Punktes besitzt die Eigenschaft, dass die Summe aller zwischen der Curve und ihrer Polare auf den parallelen Sehnen, die nach ihm hingehen, liegenden Abschnitte verschwindet; seine conische Polare besitzt dieselbe Eigenschaft hinsichtlich der Summe der Producte der paarweis genommenen Abschnitte u. s. w.

Seit Newton heisst die gerade Linie, die für ein System paralleler Sehnen der Ort der Centra der mittleren Entfernungen der $n$ Punkte ist, wo jede derselben die nämliche Curve $n^{\text{ter}}$ Ordnung schneidet, der dem gegebenen System paralleler Sehnen entsprechende Durchmesser der Curve. Und es gründet sich dabei der Name „Centrum der mittleren Entfernung" auf den Umstand, dass, wenn man von irgend einem Punkt einer solchen Sehne aus nach den Punkten der Curve Radien vectoren $\varrho_1, \varrho_2, \varrho_3 \ldots \varrho_n$ zählt und den nach dem entsprechenden Punkte des Durchmessers $\varrho$ nennt, immer die Relation stattfindet

$$\Sigma(\varrho-\varrho_1)=0, \text{ oder } n\varrho=\Sigma(\varrho_1) \text{ oder } \varrho=\frac{\Sigma(\varrho_1)}{n}.$$

Genau diese Relation geht auch aus den obigen Formeln hervor, so weit sie sich auf die Polarlinie beziehen; aus den gegebenen Entwickelungen folgt also unzweifelhaft, dass die Polarlinie eines Punktes in unendlicher Entfernung der Durchmesser des Systems paralleler Sehnen ist, welche nach jenem Punkte gerichtet sind.

Es folgt aber auch daraus, dass jener Newton'sche Begriff des Durchmessers in der Art zu erweitern ist, dass es auch krummlinige Durchmesser *) giebt. Eine Curve $n^{\text{ter}}$ Ordnung hat krummlinige Durchmesser aller Ordnungen bis zur $(n-1)^{\text{ten}}$. Der krummlinige Durchmesser irgend einer Ordnung ist identisch mit der Polarcurve der nämlichen Ordnung von dem unendlich entfernten Durchschnittspunkt des Sehnensystems, dem die Diametral-Curve entspricht.

Es ist gewiss, dass zwei Punkte die gerade Polare bestimmen, und daher auch sicher, dass wenn zwei gerade Linien durch $O$ zwei Curven in denselben Punkten $R_1, R_2 \ldots S_1, S_2 \ldots$ schneiden, die Polare von $O$ in Bezug auf beide Curven dieselbe sein wird, weil zwei ihrer Punkte $R$ und $S$ für beide dieselben sind. Diess wird gleichmässig wahr bleiben, wenn die zwei Linien $OR, OS$ zusammenfallen, d.h. Wenn zwei Curven $n^{\text{ten}}$ Grades einander in $n$ Punkten einer geraden Linie berühren, so wird die Polare irgend eines Punktes in dieser geraden Linie für beide Curven dieselbe sein, man muss daher, wenn irgend ein Radius vector durch einen solchen Punkt beide Curven schneidet, die Relation haben

$$\Sigma\frac{1}{OR}=\Sigma\frac{1}{Or}.$$

Von diesem Satze ist ein specieller Fall das Theorem von Maclaurin: Wenn man durch einen Punkt $O$ eine gerade Linie zieht, die eine Curve $n^{\text{ten}}$ Grades in $n$ Punkten schneidet und in diesen Punkten Tangenten an die Curve legt, dann aber durch $O$ eine andere gerade Linie legt, die die Curve in $R_1, R_2 \ldots$ und jenes System von Tangenten in $r_1, r_2 \ldots$ durchschneidet, so besteht die Relation

$$\Sigma\frac{1}{OR}=\Sigma\frac{1}{Or}.$$

Und davon ist endlich Newton's bekannter Satz ein specieller Fall: Wenn eine Sehne eine Curve und ihre Asymptoten schneidet, so ist die algebraische Summe der Abschnitte zwischen der Curve und ihren Asymptoten gleich Null.

Allein in dem Bisherigen ist der Punkt $O$, dessen Polaren man ausdrückte, noch immer als Anfangspunkt der Coordinaten vorausgesetzt wor-

*) Diesen Begriff hat, so viel ich weiss, Cramer eingeführt.

den; diese specielle Voraussetzung ist aufzugeben. Gewiss könnte man dazu durch eine einfache Coordinatentransformation gelangen; allein Salmon zieht es vor, eine allgemeinere mehr symmetrische und für Anwendungen geeignetere Methode anzuwenden, in deren Entwickelung ich ihm nun folge. Er gebraucht Dreilinien-Coordinaten und bezeichnet dieselben durch $x$, $y$, $z$.

Die Gleichung der geradlinigen Polare ward gefunden, indem man die Gleichung

$$\Sigma\left(\frac{1}{\varrho}-\frac{1}{\varrho_1}\right)=0 \text{ oder } \Sigma\left(\frac{RR_1}{OR\,.\,OR_1}\right)=0$$

bildete, die man mit Hinweglassung des überall vorhandenen Factors im Nenner schreiben darf

$$\Sigma\left(\frac{RR_1}{OR_1}\right)=0.$$

Die Gleichung der conischen Polare wird dem entsprechend ausgedrückt durch

$$\Sigma\left(\frac{1}{\varrho}-\frac{1}{\varrho_1}\right)\left(\frac{1}{\varrho}-\frac{1}{\varrho_2}\right)= \text{ oder } \Sigma\left(\frac{RR_1\,.\,RR_2}{OR_1\,.\,OR_2}\right)=0$$

die der cubischen durch

$$\Sigma\left(\frac{1}{\varrho}-\frac{1}{\varrho_1}\right)\left(\frac{1}{\varrho}-\frac{1}{\varrho_2}\right)\left(\frac{1}{\varrho}-\frac{1}{\varrho_3}\right)=0 \text{ oder } \Sigma\left(\frac{RR_1\,.\,RR_2\,.\,RR_3}{OR_1\,.\,OR_2\,.\,OR_3}\right)=0 \text{ u. s. w.}$$

Wenn man dann die Gleichung bilden kann, deren Wurzeln

$$\frac{RR_1}{OR_1},\ \frac{RR_2}{OR_2} \text{ u. s. w.}$$

sind, d. h. die Verhältnisse, in denen die Linie $OR$ durch die $n$ Punkte getheilt ist, wo sie die Curve schneidet, so würde der Coefficient des zweiten Gliedes dieser Gleichung, indem man ihn gleich Null setzt, die Gleichung der geradlinigen Polare liefern; der Coefficient des dritten Gliedes, der die Summe der Producte jener Wurzeln, paarweise genommen, ausdrückt, würde in derselben Weise die Gleichung der conischen Polare liefern u. s. w.

Eine solche Gleichung kann aber leicht gebildet werden; wenn nämlich $x_1, y_1, z_1$ die Coordinaten von $O$ und $x, y, z$ die von $R$ sind, so sind die Coordinaten eines Punktes $R_1$, welcher die Länge $OR$ im Verhältniss $\lambda:\mu$ theilt,

$$\left(\frac{RR_1}{OR_1}=\frac{\mu}{\lambda}\right) \text{ ausgedrückt durch } \frac{\mu x_1+\lambda x}{\mu+\lambda},\ \frac{\mu y_1+\lambda y}{\mu+\lambda},\ \frac{\mu z_1+\lambda z}{\mu+\lambda}.$$

Wenn nun der Punkt $R_1$ in der Curve ist, so müssen diese Werthe der Gleichung der Curve genügen. Und man kann dabei wegen der Homogeneität der Gleichung in $xyz$ den gemeinsamen Nenner $\mu+\lambda$ weglassen, lernt aber aus dem allen, dass man durch Einsetzen von $\mu x_1+\lambda x$, $\mu y_1+\lambda y$, $\mu z_1+\lambda z$ statt $x, y, z$ in die Gleichung einer Curve

$$\varphi(x, y, z)=0$$

eine Gleichung des $n^{\text{ten}}$ Grades in $\mu:\lambda$ erhalten wird, deren Wurzeln die Verhältnisse geben, in welchen die Linie $OR$ durch jeden der $n$ Punkte getheilt wird, wo sie der Curve begegnet.

Und wenn man nun $x, y, z$, die Coordinaten von $R$, veränderlich denkt, so liefern die Coefficienten dieser Gleichung in $\frac{\mu}{\lambda}$, gleich Null gesetzt, die Gleichungen der verschiedenen Polarcurven des Punktes $O$ in Bezug auf die gegebene Curve. Die Differentialrechnung erlaubt, das Resultat dieser Substitution einfach zu schreiben, denn für irgend eine Function von drei Veränderlichen liefert das Taylor'sche Theorem den Ausdruck

$$\varphi(x+h, y+k, z+l) = \varphi(x, y, z) + \left(h\frac{d\varphi}{dx} + k\frac{d\varphi}{dy} + l\frac{d\varphi}{dz}\right) + \frac{1}{1.2}\left(h^2\frac{d^2\varphi}{dx^2} + k^2\frac{d^2\varphi}{dy^2} + l^2\frac{d^2\varphi}{dz^2} + 2hk\frac{d^2\varphi}{dx\,dy} + 2kl\frac{d^2\varphi}{dy\,dz} + 2lh\frac{d^2\varphi}{dz\,dx}\right) + \ldots$$

und durch Einsetzen von $\frac{\mu x_1}{\lambda}$ für $h$, $\frac{\mu y_1}{\lambda}$ für $k$ und $\frac{\mu z_1}{\lambda}$ für $l$ in diese Gleichung muss man das Resultat der Substitution von $\mu x_1 + \lambda x$, $\mu y_1 + \lambda y$, $\mu z_1 + \lambda z$ für $x, y, z$ in die Gleichung $\varphi(x, y, z) = 0$ erhalten.

Wenn man zur vorläufigen Abkürzung des ohnediess noch zusammengesetzten Ausdrucks durch $U = 0$ die ursprüngliche Gleichung und durch $[U] = 0$ die transformirte bezeichnet, so erhält man das Resultat in folgender vollkommen symmetrischen Gestalt:

$$\begin{aligned}[U] = \lambda^n U &+ \lambda^{n-1}\mu\left(x_1\frac{dU}{dx} + y_1\frac{dU}{dy} + z_1\frac{dU}{dz}\right)\\ &+ \frac{\lambda^{n-2}\mu^2}{1.2}\left(x_1^2\frac{d^2U}{dx^2} + y_1^2\frac{d^2U}{dy^2} + z_1^2\frac{d^2U}{dz^2} + 2x_1y_1\frac{d^2U}{dx\,dy} + 2y_1z_1\frac{d^2U}{dy\,dz}\right.\\ &\qquad\left. + 2z_1x_1\frac{d^2U}{dz\,dx}\right)\\ &+ \ldots\\ &+ \ldots\\ &+ \frac{\mu^{n-2}\lambda^2}{1.2}\left[x^2\left(\frac{d^2U}{dx^2}\right)_1 + y^2\left(\frac{d^2U}{dy^2}\right)_1 + z^2\left(\frac{d^2U}{dz^2}\right)_1 + 2xy\left(\frac{d^2U}{dx\,dy}\right)_1\right.\\ &\qquad\left. + 2yz\left(\frac{d^2U}{dy\,dz}\right)_1 + 2zx\left(\frac{d^2U}{dz\,dx}\right)_1\right]\\ &+ \mu^{n-1}\lambda\left[x\left(\frac{dU}{dx}\right)_1 + y\left(\frac{dU}{dy}\right)_1 + z\left(\frac{dU}{dz}\right)_1\right] + \mu^n U,\end{aligned}$$

wobei $\left(\frac{dU}{dx}\right)_1$, $\left(\frac{d^2U}{dx^2}\right)_1$ u. s. w. das Resultat der Substitution von $x_1, y_1, z_1$ statt $x, y, z$ in die Ausdrücke $\frac{dU}{dx}$, $\frac{d^2U}{dx^2}$ u. s. w. bezeichnen.

Durch den Gebrauch von Operationssymbolen kann dieser Ausdruck wesentlich abgekürzt werden. Wenn $\Delta$ die Operation

$$x_1\frac{d}{dx} + y_1\frac{d}{dy} + z_1\frac{d}{dz}$$

bezeichnet, so hat das Zeichen $\Delta^2$ den Sinn

$$\left(x_1\frac{d}{dx} + y_1\frac{d}{dy} + z_1\frac{d}{dz}\right)^2 = x_1^2\frac{d^2}{dx^2} + y_1^2\frac{d^2}{dy^2} + z_1^2\frac{d^2}{dz^2} + 2x_1y_1\frac{d^2}{dx\,dy} + 2y_1z_1\frac{d^2}{dy\,dz} + 2z_1x_1\frac{d^2}{dz\,dx}$$

und man kann durch $\Delta^3$, $\Delta^4$, $\Delta^5$ u. s. w die Formen

$$\left(x_1 \frac{d}{dx} + y_1 \frac{d}{dy} + z_1 \frac{d}{dz}\right)^3, \left(x_1 \frac{d}{dx} + y_1 \frac{d}{dy} + z_1 \frac{d}{dz}\right)^4 \text{u. s. w.}$$

darstellen, diese selbst auf die in der Differentialrechnung gebräuchliche Weise verstanden. Um ferner die Coordinaten der Punkte zu unterscheiden, welche in diesen Formeln vorkommen, kann die folgende Bezeichnung dienen

$$\Delta_1 U = x_1 \frac{dU}{dx} + y_1 \frac{dU}{dy} + z_1 \frac{dU}{dz}, \quad \Delta U_1 = x\left(\frac{dU}{dx}\right)_1 + y\left(\frac{dU}{dy}\right)_1 + z\left(\frac{dU}{dz}\right)_1,$$

so dass der dem $\Delta$ angehängte Index sich auf die Coordinaten bezieht, welche die Differential-Coefficienten multipliciren, dagegen der dem $U$ angehängte besagt, dass die entsprechenden Coordinaten in $\frac{dU}{dx}$ u. s. w. eingesetzt seien. Darnach würde dann z. B. $\Delta_1 U_2$ bezeichnen:

$$x_1\left(\frac{dU}{dx}\right)_2 + y_1\left(\frac{dU}{dy}\right)_2 + z_1\left(\frac{dU}{dz}\right)_2$$

oder das Resultat der Substitution von $x_2, y_2, z_2$ in $\Delta_1 U$; $\Delta_2 U_1$ dagegen würde das Resultat der Substitution derselben Coordinaten $x_2, y_2, z_2$ in $\Delta U_1$ ausdrücken. In gleicher Weise werden die Symbole $\Delta^2 U_1$ und $\Delta_1^2 U$ verständlich sein und so die übrigen. Das allgemeine Resultat kann dann wie folgt geschrieben werden

$$\lambda^n U + \lambda^{n-1}\mu(\Delta_1 U) + \frac{\lambda^{n-2}\mu^2}{1.2}(\Delta_1^2 U) + \frac{\lambda^{n-3}\mu^3}{1.2.3}(\Delta_1^3 U) + \ldots$$
$$+ \mu^n U_1 + \mu^{n-1}\lambda(\Delta U_1) + \frac{\mu^{n-2}\lambda^2}{1.2}(\Delta^2 U_1)$$
$$+ \frac{\mu^{n-3}\lambda^3}{1.2.3}(\Delta^3 U_1) + \ldots = 0.$$

Diese Gleichung giebt, wenn die Punkte $O(x_1, y_1, z_1)$ und $R(x, y, z)$ bekannt sind, die Coordinaten der $n$ Punkte, wo $OR$ die Curve schneidet, nämlich wenn $\lambda_1 : \mu_1$ eine der $n$ Wurzeln der Gleichung ist, die Coordinaten

$$\frac{\lambda_1 x + \mu_1 x_1}{\lambda_1 + \mu_1}, \quad \frac{\lambda_1 y + \mu_1 y_1}{\lambda_1 + \mu_1}, \quad \frac{\lambda_1 z + \mu_1 z_1}{\lambda_1 + \mu_1}.$$

Weil nun $\frac{\mu}{\lambda} = \frac{RR_1}{OR_1}$ und das Product aller der Wurzeln $\frac{\mu}{\lambda}$ der Gleichung $= \frac{U}{U_1}$, so hat man

$$\frac{RR_1 \,.\, RR_2 \,.\, RR_3 \ldots}{OR_1 \,.\, OR_2 \,.\, OR_3 \ldots} = \frac{U}{U_1},$$

d. h. das stetige Product der auf einer gegebenen geraden Linie von einem Punkt bis zur Curve gemessenen Entfernungen ist dem Resultat der Substitution der Coordinaten dieses Punktes in die Gleichung der Curve proportional, welches ein Satz von Newton ist.

Da nach der allgemeinen Theorie der Gleichungen

$$\Sigma\left(\frac{\mu}{\lambda}\right) = \frac{\Delta U_1}{U_1}$$

und die Gleichung der geradlinigen Polare gefunden wird, indem man setzt

$$\Sigma \frac{RR_1}{OR_1} = 0,$$

so ist die Gleichung der geraden Polare des Punktes $x_1, y_1, z_1$ allgemein

$$\Delta U_1 = x\left(\frac{dU}{dx}\right)_1 + y\left(\frac{dU}{dy}\right)_1 + z\left(\frac{dU}{dz}\right)_1 = 0.$$

Eben so ist die Gleichung der conischen Polare desselben Punktes

$$\Delta^2 U_1 = x^2\left(\frac{d^2U}{dx^2}\right)_1 + y^2\left(\frac{d^2U}{dy^2}\right)_1 + z^2\left(\frac{d^2U}{dz^2}\right)_1 + 2xy\left(\frac{d^2U}{dx\,dy}\right)_1$$
$$+ 2yz\left(\frac{d^2U}{dy\,dz}\right)_1 + 2zx\left(\frac{d^2U}{dz\,dx}\right)_1 = 0.$$

Und so kann man in derselben Art die Gleichungen der Polarcurven höherer Ordnungen schreiben. Jene letzten Glieder der allgemeinen Gleichung, die den ersten symmetrisch sind, lehren die Gleichungen der Polarcurven der höchsten Grade kennen; dadurch ergiebt sich die Gleichung der Polare des $(n-1)^{\text{ten}}$ Grades in den Formen

$$\Delta^{n-1} U_1 = 0 \text{ oder } \Delta_1 U = x_1 \frac{dU}{dx} + y_1 \frac{dU}{dy} + z_1 \frac{dU}{dz} = 0$$

die des $(n-2)^{\text{ten}}$ Grades ist

$$\Delta^{n-2} U_1 = 0 \text{ oder } \Delta_1^2 U = 0 \text{ u. s. w.}$$

Die Polarcurve des $(n-1)^{\text{ten}}$ Grades, deren Gleichung gefunden wird, indem man die Operation $\Delta_1 U$ vollzieht, nennt Salmon die erste Polare; darauf die Polarcurve $(n-2)^{\text{ten}}$ Grades, bei welcher man dieselbe Operation doppelt vollziehen muss, die zweite Polare u. s. f.; darnach wird denn die Polare ersten Grades oder die gerade Polare nichts anderes als die $(n-1)^{\text{te}}$ Polare sein.

Und auch in dieser allgemeinen Entwickelung ist aus der Art, in welcher diese Gleichungen gebildet sind, vollkommen gewiss, dass die Polarcurve irgend eines Grades auch in Bezug auf alle diejenigen Polaren des nämlichen Punktes, deren Grad den ihrigen übersteigt, eine Polarcurve dieses Punktes ist. Das Symbol für diese Eigenschaft, für die Familienzusammengehörigkeit der Polaren ist der Ausdruck

$$\Delta_1^k (\Delta_1^l U) = \Delta_1^{k+l} U.$$

Die gewonnenen so sehr symmetrischen und einfachen Ausdrücke der allgemeinen Auflösung, Folge der zweckmässigen obgleich ganz allgemeinen und unabhängigen Wahl des Coordinatensystems, zeigen sich alsbald nützlich in der Untersuchung weiterer Eigenschaften der Polaren.

Die Gleichung

$$x\left(\frac{dU}{dx}\right)_1 + y\left(\frac{dU}{dy}\right)_1 + z\left(\frac{dU}{dz}\right)_1 = 0$$

drückt eine Relation zwischen $x, y, z$, den Coordinaten irgend eines Punktes der Polarlinie, und denen $x_1, y_1, z_1$ des Pols derselben aus. Wenn man sich nun den ersten Punkt fixirt und den zweiten veränderlich denkt, so muss offenbar der Ort des letzteren Punktes sein

$$x_2 \frac{dU}{dx} + y_2 \frac{dU}{dy} + z_2 \frac{dU}{dz} = 0$$

und diess einfache Ergebniss, richtig gedeutet, heisst offenbar: Der Ort aller der Punkte, deren geradlinige Polaren durch einen gegebenen Punkt gehen, ist die erste Polare dieses Punktes.

Man sieht wohl, dass dieselbe Reciprocität der Ausdrücke, wie sie zu der eben ausgesprochenen Beziehung zwischen der geraden und der ersten Polare führt, auch zwischen der conischen und zweiten, der cubischen und dritten Polare besteht und dass man daher eine ganze Reihe von Sätzen hat, die dem zuletzt ausgesprochenen entsprechen und deren erster lautet: Der Ort aller der Punkte, deren conische Polaren durch einen gegebenen Punkt gehen, ist die zweite Polare dieses Punktes.

Jene Beziehung zwischen der geraden und der ersten Polare erlaubt die Beantwortung der Frage: Wie viel Pole entsprechen einer geraden Linie bei einer Curve $n^{ten}$ Grades?

Man hat nur nöthig, zwei Punkte in der geraden Linie zu betrachten; die Pole aller durch den ersten Punkt gehenden geraden Linien liegen in einer Curve $(n-1)^{ten}$ Grades

$$x_1 \frac{dU}{dx} + y_1 \frac{dU}{dy} + z_1 \frac{dU}{dz} = 0$$

und desgleichen die Pole aller geraden Linien durch einen zweiten Punkt in der Curve

$$x_2 \frac{dU}{dx} + y_2 \frac{dU}{dy} + z_2 \frac{dU}{dz} = 0.$$

Die Pole der Verbindungslinie beider Punkte müssen offenbar in diesen beiden Curven zugleich liegen, also die Durchschnittspunkte zweier Curven $(n-1)^{ten}$ Grades sein; ihre Anzahl ist daher $(n-1)^2$. Eine gerade Linie hat also in Bezug auf einen Kegelschnitt einen Pol, in Bezug auf eine Curve dritten Grades deren vier, in Bezug auf eine Curve vierten Grades neun u. s. w.

Dasselbe Resultat lässt sich auch so aussprechen: Die ersten Polaren aller Punkte einer geraden Linie gehen durch dieselben $(n-1)^2$ Punkte, nämlich durch die Pole dieser geraden Linie.

Es ist klar, dass auch dieser Satz nur einer ist von einer ganzen Reihe von Sätzen, die ihm analog sind.

Wenn der Punkt, von dessen Polaren man handelt, in der Curve selbst liegt, so führt die Theorie abermals zu wichtigen Ergebnissen. Wenn die allgemeine Gleichung der Curve in Cartesischen Coordinaten durch Zusammenfassung der Glieder gleicher Ordnung unter den beigefügten Abkürzungen wie folgt geschrieben wird

$$\left.\begin{array}{l} A \\ +Bx+Cy \\ +Dx^2+Exy+Fy^2 \\ + \dots . \\ \cdot \\ \cdot \\ +Px^n+Qx^{n-1}y+\dots .+Rxy^{n-1}+Sy^n \end{array}\right\} = 0, \quad \begin{array}{l} (u_0) \\ (u_1) \\ (u_2) \\ \vdots \\ \\ \\ (u_n), \end{array}$$

nämlich
$$u_0+u_1+u_2+\dots .+u_n=0,$$
so kann die Gleichung der ersten Polare des Coordinatenanfangs unter der Form
$$u_1+u_0 n=0$$
geschrieben werden; wenn daher der Coordinatenanfang der Curve selbst angehört, so geht diese Gleichung über in $u_1=0$ und ist nach deren Bedeutung zu fragen.

Am klarsten wird dieselbe, wenn man die obige allgemeine Gleichung unter der Voraussetzung $A=0$ in Polarcoordinaten umsetzt; sie ist dann
$$\varrho\,(B\cos\Theta+C\sin\Theta)+\varrho^2(D\cos^2\Theta+E\cos\Theta\sin\Theta+F\sin^2\Theta)$$
$$+\varrho^3(G\cos^3\Theta+\dots .)+\dots .=0$$
und an die Stelle von $u_1=0$ tritt damit
$$\varrho\,(B\cos\Theta+C\sin\Theta)=0 \text{ oder } B\cos\Theta+C\sin\Theta=0.$$

Damit gewinnt aber jene allgemeine Gleichung die Form
$$\varrho^2(D\cos^2\Theta+E\cos\Theta\sin\Theta+F\sin^2\Theta)+\varrho^3(G\cos^3\Theta+H\cos^2\Theta\sin\Theta+\dots .)$$
$$+\dots .=0$$
welche durch $\varrho^2$ theilbar ist, also zwei Wurzeln $\varrho=0$ besitzt, und es muss daher die durch den Coordinatenanfang gehende gerade Linie
$$B\cos\Theta+C\sin\Theta=0 \text{ oder } u_1=0$$
mit der Curve in diesem Punkte zwei zusammenfallende Punkte gemein haben, also ihre Tangente im Coordinaten-Anfangspunkt sein (sofern dieser nicht einer der merkwürdigen Punkte der Curve ist, wovon nachher). Es erweist sich also die geradlinige Polare eines Punktes in der Curve unter diesen besondern Voraussetzungen als die Tangente der Curve in diesem Punkte.

Und auch hier ist die allgemeine Entwickelung productiver. Die allgemeine Gleichung einer Polarcurve irgend eines Punktes $x_1\,y_1\,z_1$ ist mit Benutzung der Operationssymbole
$$\left(x_1\frac{d}{dx}+y_1\frac{d}{dy}+z_1\frac{d}{dz}\right)^k U=0$$
und diese reducirt sich für den Coordinatenanfang wegen $x_1=0$, $y_1=0$ auf
$$\frac{d^kU}{dz^k}.$$

Wenn aber hierzu die allgemeine Gleichung als
$$u_1 z^{n-1}+u_2 z^{n-2}+u_3 z^{n-3}+\dots .=0$$

vorausgesetzt wird, so ist klar, dass in dem Resultat jener Differentiation noch immer $u_1$ die niedrigsten Glieder in $x$ und $y$ repräsentiren wird; daher dieselbe Folgerung wie vorher. Man hat daher die Sätze:

Die geradlinige Polare eines Punktes der Curve in Bezug auf dieselbe ist die Tangente derselben in diesem Punkte.

Alle Polaren eines Punktes der Curve in Bezug auf dieselbe berühren die Curve in diesem Punkte.

Und dann schliesst sich nach dem Satze, dass die erste Polare der Ort aller der Punkte ist, deren gerade Polaren durch einen festen Punkt, eben den Pol der ersten Polare, gehen, sofort als evident noch dieses wichtige Ergebniss an: Die Berührungspunkte aller der Tangenten, welche von einem gegebenen Punkte aus an eine Curve gezogen werden können, liegen in der ersten Polare dieses Punktes*). Im Rückblick auf das Verhältniss der Polaren zu den Diametralcurven, wie es früher erörtert worden ist und wofern man auf diese dasselbe Princip der Classification anwendet, wie es bei den Polarcurven durchgeführt wurde, kann man hinzufügen: Die Berührungspunkte aller der Tangenten, die einer gegebenen Richtung parallel an eine Curve gezogen werden können, liegen in der ersten dieser Richtung conjugirten Diametralcurve.

Und da diese Polar- oder Diametralcurve nach den vorhergegangenen Entwickelungen allgemein von der $(n-1)^{\text{ten}}$ Ordnung ist, so beantwortet sich die Frage nach der Zahl der Tangenten, die man von einem Punkte aus an eine Curve $n^{\text{ter}}$ Ordnung ziehen kann, durch folgenden Satz: Durch einen gegebenen Punkt (also auch durch einen unendlich fernen Punkt in gegebener Richtung) können an eine Curve $n^{\text{ten}}$ Grades $n(n-1)$ Tangenten gezogen werden. Es darf erinnert werden, dass diess zugleich die Beantwortung der Frage ist nach der Classe der Curve oder nach dem Grade der Reciproken einer Curve $n^{\text{ten}}$ Grades.

Hier erscheint es nützlich, wenn ich mit einigen Bemerkungen wieder speciell zu der Arbeit des französischen Gelehrten zurückkehre. Sein Beweis dafür, dass die Tangente in einem Punkte die gerade Polare dieses Punktes sei, bezieht sich speciell auf eine Curve dritter Ordnung und ist kurz etwa folgender: die Gleichung

$$\Sigma\left(\frac{1}{OR}-\frac{1}{OR_1}\right)=0$$

giebt dann die Entwickelung

$$RR_1 \,.\, OR_2 \,.\, OR_3 + RR_2 \,.\, OR_1 \,.\, OR_3 + RR_3 \,.\, OR_2 \,.\, OR_1 = 0,$$

*) Poncelet hat schon in Gergonne's Annalen Vol. VIII, pag. 213 gezeigt, dass die Berührungspunkte auf einer Curve $(n-1)^{\text{ten}}$ Grades liegen, gegenüber der Angabe Waring's, dass ihre Anzahl auf $n^2$ kommen könne. Diese Curve $(n-1)^{\text{ter}}$ Ordnung ist Salmon's erste Polare.

welche sich, sobald $O$ mit einem Punkte $R_1$ der Curve zusammenfällt, auf das Glied

$$RR \,.\, OR_2 \,.\, OR_3 = 0$$

reducirt. Da aber $OR_2$, $OR_3$ nicht Null sind, so besagt diess

$$RR_1 \text{ oder } RO = 0,$$

dass also die Polare durch den Punkt $O$ selbst geht. Wenn man aber die Tangente in $O$ an die gegebene Curve zur Transversale nimmt, so werden $OR_2$ oder $OR_3$ unendlich klein und in Folge dessen hat $OR$ einen unbestimmten Werth, d. h. alle Punkte der Tangente können für $R$ genommen werden und die Tangente selbst ist, so lange der Punkt der Curve kein vielfacher Punkt ist, die gerade Polare desselben.

Den allgemeinen Satz über die Berührung sämmtlicher Polaren eines Curvenpunktes mit der Curve beweist de Jonquières speciell für die conische Polare einer Curve dritten Grades und für die cubische Polare einer Curve vierten Grades; die Beweisform ist wirklich einfach und fähig auf jeden andern Fall ausgedehnt zu werden. Ich deute sie an.

Für das erste Beispiel wird die Gleichung

$$\Sigma\left(\frac{1}{OR}-\frac{1}{OR_1}\right)\left(\frac{1}{OR}-\frac{1}{OR_2}\right)=0$$

für $OR_1 = 0$ zu

$$OR\,(RR_2 . OR_3 + RR_3 . OR_2) = 0,$$

welcher durch zwei Voraussetzungen entsprochen wird, nämlich

$$OR = 0 \text{ und } \frac{RR_2}{OR_2} : \frac{RR_3}{OR_3} = -1.$$

Nach der ersten geht die conische Polare durch $O$ und nach der zweiten sind alle ihre Punkte die conjugirt harmonischen von $O$ im Verhältniss zu den zwei Durchschnittspunkten der Curve dritter Ordnung mit der betreffenden von $O$ ausgehenden Transversale. Denkt man die Transversale in $O$ tangirend an die gegebene Curve, so ist $R_2$ dem $O$ unendlich nahe, also $R$, als dem $O$ in Bezug auf $R_1$ und $R_2$ conjugirt harmonisch, gleichfalls unendlich nahe bei $O$ in der Richtung der Tangente; womit gezeigt ist, dass die conische Polare einer Curve dritten Grades die Curve in dem Punkte berührt, zu dem sie gehört.

In dem zweiten Falle geht die charakterisirende Gleichung

$$\Sigma\left(\frac{1}{OR}-\frac{1}{OR_1}\right)\left(\frac{1}{OR}-\frac{1}{OR_2}\right)\left(\frac{1}{OR}-\frac{1}{OR_3}\right)=0$$

für $OR_1 = 0$ in diese über

$$OR \,.\, RR_2\,(RR_3 \,.\, OR_4 + RR_4 \,.\, OR_3) + OR \,.\, RR_3 \,.\, RR_4 \,.\, OR_2 = 0$$

woraus erstens erkannt wird, dass die cubische Polare durch $O$ geht, weil $OR = 0$ ihr genügt; zweitens, dass sie die gegebene Curve in diesem Punkte berührt, denn wenn man die Transversale die Curve in $O$ berühren lässt, so

verschwindet $OR.RR_3.RR_4.OR_2$ wegen $OR_2 = 0$ und man hat nun die Bedingungen

$$RR_2 = 0 \text{ und } \frac{RR_3}{OR_3} : \frac{RR_4}{OR_4} = -1$$

d.h. die cubische Polare hat die Tangente der Curve vierter Ordnung in $O$ selbst zur Tangente und der dritte Punkt, der ihr auf dieser Tangente angehört, ist im Verhältniss zu den Punkten $R_3$ und $R_4$, wo diese Tangente der gegebenen Curve von Neuem begegnet, conjugirt harmonisch zu $O$.

Und so beweist er auch den Satz, dass die erste Polare eines Punktes der Ort der Pole aller durch diesen Punkt gehenden geraden Linien ist, für den speciellen Fall der Curve dritten Grades, doch so, dass man der Methode allgemeine Anwendbarkeit und deshalb wahre Beweiskraft nicht absprechen kann. Die conische Polare eines Punktes $O$ im Verhältniss zu einer Curve dritter Ordnung ist auch der geometrische Ort der Pole aller durch $O$ gehenden geraden Linien; denn es ist dazu nur nöthig zu zeigen, dass, wenn $R$ ein Punkt dieses Kegelschnitts ist, die Relation

$$\Sigma\left(\frac{1}{RO} - \frac{1}{RR_1}\right) = 0$$

eine Folge ist von der andern

$$\Sigma\left(\frac{1}{OR} - \frac{1}{OR_1}\right)\left(\frac{1}{OR} - \frac{1}{OR_2}\right) = 0.$$

Entwickelt man aber jene und bezieht die Segmente auf den Punkt $O$ als ihren Anfang, so dass man die Beziehung hat

$$RO + OR_1 + R_1R = 0,$$

so erhält man die Gleichung

$$\overline{OR}^2 (OR_1 + OR_2 + OR_3) - OR\,[OR_1 (OR_2 + OR_3) + OR_2 (OR_3 + OR_1) + OR_3 (OR_1 + OR_2)] + 3\,OR_1 \cdot OR_2 \cdot OR_3 = 0,$$

welche allerdings aus

$$\Sigma\left(\frac{1}{OR} - \frac{1}{OR_1}\right)\left(\frac{1}{OR} - \frac{1}{OR_2}\right) = 0$$

hervorgeht.

Das Schema des Beweises für jeden andern Fall besteht darin, dass man zeigt, wie die Gleichung

$$\Sigma\left(\frac{1}{RO} - \frac{1}{RR_1}\right) = 0$$

eine nothwendige Folge ist von der Relation

$$\Sigma\left(\frac{1}{OR} - \frac{1}{OR_1}\right)\left(\frac{1}{OR} - \frac{1}{OR_2}\right) \cdots \left(\frac{1}{OR} - \frac{1}{OR_m}\right) = 0.$$

Gewiss verdienen diese einfachen Beweismethoden der anharmonischen Geometrie für so sehr allgemeine Sätze alle Aufmerksamkeit.

Ich kehre jedoch zu Salmon's Entwickelungsmethode zurück, denn ich beabsichtige aus der allgemeinen Theorie noch zu entwickeln, wie sich vielfache Punkte einer Curve den Polarcurven gegenüber verhalten.

Wenn man den Coordinatenanfang*) als einen vielfachen Punkt vom Grade $k$ voraussetzt, so werden die niedrigsten Potenzen der allgemeinen Gleichung in $x$ und $y$ vom Exponenten $k$ sein; dann müssen die niedrigsten Potenzen in der Entwickelung der ersten Polare

$$x_1 \frac{dU}{dx} + y_1 \frac{dU}{dy} + z_1 \frac{dU}{dz} = 0$$

nothwendig vom Grade $(k-1)$ sein und der Coordinatenanfang wird daher in ihr ein vielfacher Punkt von dieser Ordnung sein; die Gleichung der zweiten Polare wird, da darein die zweiten Differentiale der Gleichung der Curve eingehen, $x$ und $y$ in keinen niedrigeren Graden als dem $(k-2)^{\text{ten}}$ enthalten können u. s. w. Daraus entspringt also der allgemeine Satz: Wenn eine Curve einen vielfachen Punkt vom Grade $k$ hat, so wird dieser in jeder ersten Polare derselben ein vielfacher Punkt vom Grade $(k-1)$ sein; vom Grade $(k-2)$ in jeder zweiten Polare u. s. f.; er wird zuletzt den $(k-1)^{\text{ten}}$ Polarcurven als einfacher Punkt angehören und in den Polaren noch höheren Ranges nicht mehr auftreten.

Wenn ferner unter den Tangenten am vielfachen Punkt irgend ein Paar zusammenfallen, so muss das Glied $u_k$ der allgemeinen Gleichung, welches gleich Null gesetzt, die Tangenten $a, b, c \ldots$ des vielfachen Punktes liefert, von der Form $a^2 b c d \ldots$ sein und daher werden sowohl $\frac{du_k}{dx}$ als auch $\frac{du_k}{dy}$ den Factor $a$ enthalten; es müssen deshalb auch die niedrigsten Glieder in der Gleichung der Polare

$$x_1 \frac{du_k}{dx} + y_1 \frac{du_k}{dy}$$

den Factor $a$ haben, während $z_1 \frac{du}{dz}$ offenbar keine Glieder unter dem Grade $k$ in $x$ und $y$ enthält. Daraus geht klar hervor, dass jene Doppeltangente der gegebenen Curve im vielfachen Punkt auch eine Tangente — doch nur eine einfache — ihrer ersten Polare in demselben vielfachen Punkte ist.

Und wenn bei einem vielfachen Punkte $k^{\text{ter}}$ Ordnung das Glied $u_k$ einen Factor im $l^{\text{ten}}$ Grade enthielte, welches einer $l$ fachen Tangente entspricht, so wird dieser Factor in allen ersten Differentialen von $u_k$ im Grade $(l-1)$, in allen zweiten Differentialen vom Grade $(l-2)$ vorkommen u. s. w., welches ganz allgemein ausdrückt, dass eine vielfache Tangente vom Grade $l$ in einem vielfachen Punkte der Ordnung $k$ der ursprünglichen Curve in allen ersten Polaren derselben eine vielfache Tangente vom Grade $(l-1)$ an denselben vielfachen Punkt der Ordnung $(k-1)$ sein wird; desgleichen in allen zweiten Polaren eine vielfache Tangente vom Grade $(l-2)$

*) Dass diese Voraussetzung die Allgemeinheit nicht beeinträchtigt, braucht kaum bemerkt zu werden.

an den vielfachen Punkt $(k-2)^{\text{ter}}$ Ordnung u. s. w.; sie wird also zuletzt als einfache Tangente an der $(l-1)^{\text{ten}}$ Polare in einem vielfachen Punkt vom Grade $(k+1-l)$ erscheinen und von da ab keine Polare mehr tangiren.

Wenn die Curve einen Doppelpunkt hat, so ist es leicht, die Tangente dieses Punktes zur ersten Polare irgend eines andern Punktes zu construiren; denn wenn $x$ und $y$ die beiden Tangenten der Curve in diesem Doppelpunkte sind, so muss die Gleichung derselben von der Form sein

$$xy + u_3 + u_4 \ldots . = 0$$

und die Glieder niedrigster Ordnung in $x, y$ in der Gleichung

$$x_1 \frac{dU}{dx} + y_1 \frac{dU}{dy} + z_1 \frac{dU}{dz} = 0$$

werden sein $x_1 y + x y_1$ und in $x_1 y + y_1 x = 0$ die Tangente der Polare in diesem Punkte darstellen. Nun ist die Verbindungslinie des Doppelpunktes mit dem Punkte $x_1 y_1$, dessen erste Polare genommen ward, durch die Gleichung $x_1 y - y_1 x = 0$ dargestellt und man erkennt daraus, dass die verlangte Tangente der ersten Polare die vierte Harmonikale sein wird zu dieser Verbindungslinie und den zwei Tangenten der gegebenen Curve im Doppelpunkte.

Der specielle Fall, dass die zwei Tangenten im Doppelpunkte sich decken, dass er also eine Spitze oder ein stationärer Punkt ist, zeigt diesen Satz in Uebereinstimmung mit dem vorigen allgemeineren.

Hier brauche ich wohl nur daran zu erinnern, dass auch diese Eigenschaften der Polaren bezüglich der vielfachen Punkte sehr einfach in den Grundgedanken der Beweisführung des französischen Autors eingehen, sobald ein bestimmter Fall ins Auge gefasst wird.

Es ist leicht zu erkennen, dass diese Beziehungen der Polare zu den vielfachen Punkten in dem Falle der Existenz solcher Punkte einen Einfluss üben auf die Antwort, die in dem Vorigen im Allgemeinen gegeben worden ist, auf die Frage nach der Anzahl der möglichen Tangenten oder nach der Classe einer Curve (dem Grade ihrer Reciproken).

Da in einem Doppelpunkte zwei aufeinanderfolgende Punkte zusammenfallen, so hat jede durch ihn gezogene Linie zwei Punkte mit der Curve gemein und muss speciell jede gerade Linie durch ihn als eine Tangente der Curve in dem Sinne betrachtet werden, nach welchem eine Tangente eine gerade Linie ist, die eine Curve in zwei aufeinanderfolgenden Punkten schneidet. Wenn man aber solche uneigentliche Tangenten von der Zahl der Tangenten in Abzug bringen will, die man von einem Punkte aus an eine Curve $n^{\text{ter}}$ Ordnung ziehen kann, so erhält man, weil nach dem Vorigen zugleich auch jeder Doppelpunkt unter den Durchschnittspunkten der Curve mit ihrer ersten Polare für zwei zählt, den Satz: Wenn eine Curve $n^{\text{ten}}$ Grades $\delta$ Doppelpunkte hat, so ist die Zahl der von

einem Punkte aus an sie zu ziehenden Tangenten, oder ihre Klasse oder der Grad ihrer Reciproken

$$= n(n-1) - 2\delta;$$

treten dazu noch $k$ Spitzen, so reducirt sich diese Zahl, weil in diesem Falle die erste Polare nicht bloss durch die Spitze geht, sondern auch dieselbe Tangente wie die gegebene Curve hat und daher jede Spitze unter den Schnittpunkten dreifach gezählt werden muss, auf

$$n(n-1) - 2\delta - 3k.$$

Wenn die Curve einen vielfachen Punkt von der Ordnung $k$ enthielte, so würde derselbe in ihrer ersten Polare als ein vielfacher Punkt der Ordnung $k-1$ auftreten und daher den Grad der reciproken Curve um $k(k-1)$ Einheiten vermindern; und in der That, wenn man sich ein System von $k$ geraden Linien denkt, so besitzt dasselbe im Allgemeinen $\frac{k(k-1)}{2}$ Doppelpunkte, d. h. Durchschnittspunkte; wenn aber die Linien alle durch denselben Punkt gehen, so verschwinden die sämmtlichen Doppelpunkte und an ihre Stelle tritt ein einziger vielfacher Punkt der $k^{\text{ten}}$ Ordnung. Man ist also auch so zu der Regel geleitet: Ein vielfacher Punkt der Ordnung $k$ wirkt ebenso wie die Vereinigung von $\frac{k(k-1)}{2}$ Doppelpunkten oder was das Nämliche ist: Die Wirkung eines vielfachen Punktes der $k^{\text{ten}}$ Ordnung im Grade der Reciproken ist dieselbe wie die der äquivalenten Anzahl doppelter Punkte.

Und wenn der vielfache Punkt eine $l$ fache Tangente besässe, so würde man der Zahl, um welche sein Einfluss den Grad der Reciproken oder die Zahl der Tangenten vermindert, noch $l-1$ Einheiten hinzufügen müssen.

Ich habe gerade diese Folgen der allgemeinen Theorie der Polaren hier entwickelt, weil sie so naturgemäss, so fast unvermeidlich aus ihr hervorwachsen. Es ist begreiflich, dass diese Theorie noch die Quelle vieler anderweiten Sätze sein muss. Warum sollte sie z. B. nicht in der Theorie der vielfachen Tangenten einer Curve von demselben Nutzen und Einfluss sein, wie hier diese Excurse sie in Bezug zu den vielfachen Punkten gezeigt haben? Doch entspringt gerade hier dem weiteren Nachdenken eine andere und allgemeinere Frage, nämlich: Wie gestaltet sich und welche Resultate liefert die Theorie der Pole und Polaren in dem System der Tangential- oder Dreipunkt-Coordinaten?

Diese Frage entspringt auch aus der einleitenden Entwickelung beider Coordinatensysteme, von denen bis jetzt nur das eine ausführlich gebraucht und allen Interpretationen zu Grunde gelegt worden ist. Ich werde sie ausführlicher als Salmon erörtern. Eine andere Frage aber ergiebt sich aus der speciellen Beziehung, in welcher die Theorie der Pole und Polaren hier zu den Problemen der Tangenten an Curven höherer Ordnungen gezeigt worden ist: Sollte diese Theorie nicht auch zur wirklichen Con-

struction dieser Tangenten in besonderen Fällen von höheren Curven nützlich sein?

Indem ich dem Schlusse dieser Darlegung mich nähere, will ich auf diese beiden Fragen noch in aller Kürze eingehen; ich fasse die letztere zuerst, da sie in dem Verhältnisse eines Beispiels zur bisherigen Entwickelung steht. Eben in diesem Charakter eines Beispiels bleibe ich, indem ich mich auf Curven dritten Grades beschränke.

Die Aufgabe, die Polaren einer solchen Curve in Bezug auf einen gegebenen Punkt zu zeichnen — denn auf diese kommt die Aufgabe der allgemeinen Tangentenconstruction zurück — reducirt sich darauf, durch den Pol eine gewisse Anzahl von Transversalen zu ziehen, ihre respectiven Durchschnittspunkte mit der Curve zu bestimmen und endlich auf diesen Transversalen die Werthe aufzutragen, welche gewisse, den dritten Grad nicht übersteigende Gleichungen als Wurzeln liefern.

Sucht man die gerade Polare, so genügen zu ihrer Bestimmung zwei Transversalen durch den Pol, weil sie durch zwei Punkte vollständig bestimmt ist. Schneide die erste Polare die Curve in den Punkten $a, b, c$, so wird die gesuchte gerade Linie gewiss die erste Polare des Punktes $O$ in Bezug auf alle möglichen Curven dritter Ordnung sein, die durch diese sechs Punkte hindurchgehen. Also muss sie auch dieselbe sein, wie für das aus den drei geraden Linien $aa', bb', cc'$ gebildete Dreieck.

Eine ganz einfache Discussion zeigt aber, wie diese abzuleiten und wie sie mit dem Lineal allein zu construiren ist. Ein Dreieck wird repräsentirt durch die Gleichung $\alpha\beta\gamma = 0$; die gerade Polare irgend eines Punktes $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ in Bezug auf dasselbe ist daher

$$\beta_1\gamma_1\alpha + \gamma_1\alpha_1\beta + \alpha_1\beta_1\gamma = 0 \text{ oder } \frac{\alpha}{\alpha_1} + \frac{\beta}{\beta_1} + \frac{\gamma}{\gamma_1} = 0$$

und diese ist mit der folgenden Construction identisch (Fig. 4). $ABC$ ist das Dreieck, $O$ der Pol, $LMN$ die geradlinige Polare desselben; denn die Linien $AD, BE, CF$ sind

$$\frac{\alpha}{\alpha_1} = \frac{\beta}{\beta_1} = \frac{\gamma}{\gamma_1}$$

und $CF$, $FD$, $DE$ sind

$$\frac{\beta}{\beta_1} + \frac{\gamma}{\gamma_1} - \frac{\alpha}{\alpha_1},\ \frac{\gamma}{\gamma_1} + \frac{\alpha}{\alpha_1} - \frac{\beta}{\beta_1},\ \frac{\alpha}{\alpha_1} + \frac{\beta}{\beta_1} - \frac{\gamma}{\gamma_1},$$

daher ist denn $LMN$

$$\frac{\alpha}{\alpha_1} + \frac{\beta}{\beta_1} + \frac{\gamma}{\gamma_1} = 0.$$

Diese nämliche Construction also führt immer auch zur Bestimmung der geradlinigen Polare eines Punktes in Bezug auf eine Curve dritten Grades.

Aus ihr muss daher auch die Construction des einer gewissen Richtung conjugirten geradlinigen Durchmessers einer Curve dritter Ordnung hervorgehen, als die gerade Polare eines in dieser Richtung unendlich entfernten Punktes. Ist $ABC$ noch immer das wie vorhin erhaltene Dreieck (erhalten also durch Bestimmung der sechs Durchschnittspunkte der Curve mit zwei

jener Richtung parallelen Sehnen und paarweise Verbindung derselben) und $CF$ die Richtung, zu der man den entsprechenden Durchmesser sucht, so zieht man $AD \parallel BE \parallel CF$ und vollendet die Figur wie folgt: $LMN$ (Fig. 5) wird der gesuchte Durchmesser sein.

Wenn man sich die beiden von $O$ aus gezogenen Transversalen unendlich benachbart denkt (Fig. 5), so gehen die drei geraden Linien $aa'$, $bb'$, $cc'$ in die Tangenten der Curve in $a, b, c$ über und diese drei Tangenten, in Punkten auf einer Transversale an die Curve gelegt, bilden dann das besprochene Dreieck.

Denkt man sich an Stelle dieses Tangentendreiecks das Asymptotendreieck, so entspricht diess dem Falle, wo die Transversale $Oabc$ ganz im Unendlichen gedacht wird und man hat daher auch hier dann einen Durchmesser der Curve zu erwarten.

Es mag bemerkt werden, dass die Gleichung der conischen Polare des Dreiecks $\alpha\beta\gamma = 0$ in Bezug auf den Punkt $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$

$$\frac{\alpha_1}{\alpha} + \frac{\beta_1}{\beta} + \frac{\gamma_1}{\gamma} = 0$$

ist, ein Kegelschnitt, der durch die Ecken des Dreiecks geht und dessen Tangente in einer Ecke des Dreiecks $\alpha, \beta$ die Gleichung hat

$$\frac{\alpha}{\alpha_1} + \frac{\beta}{\beta_1} = 0,$$

so dass man sie construiren kann, indem man den Scheitel $\alpha, \beta$ mit dem Punkte verbindet, wo die gerade Polare des Punktes die Gegenseite $\gamma$ schneidet.

Deswegen ist aber nicht zu übersehen, dass diese conische Polare des Dreiecks nicht zugleich auch die der Curve dritter Ordnung ist, aus der das Dreieck hergeleitet worden; denn zur Bestimmung eines Kegelschnittes gehören fünf Punkte, und da derselbe jede Transversale in zwei Punkten schneidet, so muss man drei Transversalen zu seiner Bestimmung benutzen, $Oabc$, $Oa'b'c'$, $Oa''b''c''$. Zur wirklichen Construction dieses Kegelschnitts führt folgender Gedankengang. Der Polarkegelschnitt wird in Bezug auf alle möglichen Curven dritten Grades, die durch diese neun Punkte $abc$ $a'b'c'a''b''c''$ gehen, der nämliche sein müssen. Wählt man daher die Transversalen so, dass durch drei dieser Punkte $a''a'a$ eine gerade Linie geht und deshalb die andern sechs $bb'b''cc'c''$ einem Kegelschnitt angehören, so wird die conische Polare des Punktes $O$ in Bezug auf das System dieser geraden Linie und dieses Kegelschnitts genau dieselbe sein, wie in Bezug auf die vorliegende Curve dritten Grades. Nun ist aber, wenn $S$ den Kegelschnitt $bb'b''cc'c''$ und $L$ die gerade Linie $aa'a''$ vertritt,

$$d(SL) = LdS + SL'.$$

Es geht also die verlangte conische Polare durch die Durchschnitte von $L$ und $S$ und auch durch die Punkte, wo $S$ durch die Polare von $O$ in Bezug auf $S$ geschnitten wird; und man hat zur Vervollständigung der Bestimmung

des gesuchten Kegelschnitts eine fünfte Bedingung in dem nach dem Früheren nothwendigen Umstande, dass die gerade Polare des Punktes $O$ in Bezug auf die gegebene Curve auch die Polare desselben in Bezug auf den verlangten Kegelschnitt sei.

Kann man auf diese Weise die conische Polare in Bezug auf eine Curve dritten Grades einfach construiren, so erhält man ebenso für einen unendlich entfernten Punkt den Diametralkegelschnitt und erlangt damit die Auflösung beider Aufgaben der Tangentenconstruction für Curven dritter Ordnung: Construction der Tangenten von einem gegebenen Punkte aus — die conische Polare dieses Punktes liefert die sechs Berührungspunkte — und Construction der Tangenten parallel einer gegebenen Richtung — die dieser Richtung conjugirte Diametralcurve leistet das Nämliche.

Diese Andeutungen mögen für jetzt der beregten Frage genügen.

Ehe ich zur zweiten gestellten Frage übergehe, führe ich hier, als einen merkwürdigen Beweis von den eigenthümlichen Vortheilen, welche die Theorie der Pole und Polaren gewähren kann, einen Satz von Salmon an, dessen Beweis sich gerade hier vortrefflich anschliesst.

Man denke sich durch zwei aufeinanderfolgende Punkte in einer Curve dritten Grades die zwei Reihen von Tangenten an dieselbe gelegt

$$OA,\ OB,\ OC,\ OD,\ PA,\ PB,\ PC,\ PD,$$

so durchschneidet irgend eine Tangente $OA$ die darauffolgende Tangente $PA$ in ihrem Berührungspunkte $A$. Die vier Berührungspunkte $A, B, C, D$ liegen aber in der conischen Polare von $O$, welche auch die gegebene Curve im Punkte $O$ berührt. Es liegen also die sechs Punkte $OPABCD$ in demselben Kegelschnitt und daher ist das anharmonische Verhältniss des Büschels $O(ABCD)$ das nämliche wie das des Büschels $P(ABCD)$. Weil nun diess Verhältniss immer dasselbe bleibt, wenn man von einem Punkt der Curve zum benachbarten geht, so ist es überhaupt constant für dieselbe Curve und man hat den schönen Satz: Das anharmonische Verhältniss des Büschels, welches die vier durch einen Punkt einer Curve dritten Grades an dieselbe gezogenen Tangenten bilden, ist für dieselbe Curve unveränderlich.

Dieses Verhältniss kann als eine unterscheidende numerische Charakteristik der Curve dienen und da der Werth des anharmonischen Verhältnisses durch Projection ungestört bleibt, so können irgend zwei Curven dritter Ordnung nur dann aufeinander projicirt werden, wenn diese charakteristischen Zahlen für beide dieselben sind.

Der geometrische Ausdruck dieses Satzes ist gleichfalls merkwürdig genug. Er besagt: Wenn $O$ und $P$ irgend zwei Punkte einer Curve dritter Ordnung sind, so schneiden die vier Tangenten von $O$ an die Curve die entsprechenden vier Tangenten von $P$ aus in vier Punkten, die mit $O$ und $P$ auf demselben Kegelschnitt

liegen. (Wie leicht zu sehen, giebt es für jedes Punktepaar $O, P$ vier solche Kegelschnitte.)

Und nun die andere Frage betreffend nach der Form und Bedeutung der Theorie der Pole und Polaren in dem System der Dreipunkt-Coordinaten, so ist die Antwort im Allgemeinen leicht: Die Form bleibt dieselbe, die Interpretation ändert sich.

Mit ganz denselben Formeln, mit denen man in der entwickelten Weise von dem durch seine Coordinaten $x_1, y_1, z_1$ gegebenen Pol zur Gleichung seiner Polare ging, die wie die Gleichung der gegebenen Curve in Punkt-Coordinaten gegeben ward, gelangt man im System der Dreipunkt-Coordinaten von der geradlinigen Polare — denn diese ist hier durch ihre Coordinaten $x_1, y_1, z_1$ gegeben — zum Pol; die Gleichung der gegebenen Curve wie die des erhaltenen Pols wird in Tangential-Coordinaten erscheinen.

Man erkennt aber sofort, dass das geometrische Gebild, welches jetzt als Pol zu bezeichnen ist, nicht mehr das einfach punktförmige ist, als welches es vorausgesetzt wurde, da man von ihm ausging; vielmehr ist die geometrische Natur des Pols jetzt so zu bezeichnen: dieselbe Mannichfaltigkeit, die vorher dem Begriff der Polare eigen war, in welcher sie als gerade Polare, speciell als Tangente, als conische, cubische Polare, genauer gesprochen als Polare zweiten Grades, als Polare dritten Grades auftrat, alle Formengrade durchlaufend, die im System der Dreilinien- oder Punkt-Coordinaten möglich sind, wird jetzt dem Begriff des Pols zu Theil werden; er wird alle im System der Dreipunkt- oder Tangential-Coordinaten darstellbaren Formen durchlaufen, der Pol einer geraden Linie wird vorhanden sein als Punkt, speciell als Curvenpunkt, als Curve der zweiten, dritten, vierten Classe u. s. w.

Man müsste jetzt, dem entsprechend, dass vorher eine Curve $(n-1)^{\text{ten}}$ Grades die erste Polare war, eine Curve $(n-1)^{\text{ter}}$ Classe als ersten Pol bezeichnen und würde den allgemeinen Satz haben, dass diese Curve der $(n-1)^{\text{ten}}$ Classe von den $n$ Tangenten der gegebenen Curve berührt wird, die daran in den Punkten gezogen sind, wo sie die gegebene gerade Polare schneidet. Ueberall in allen Einzelnheiten wird diese vollständige Dualität oder Reciprocität gefunden werden, wie sie schon in den beiden Auffassungsweisen einer Curve ausgeprägt ist, nach welchen dem System der Punkt-Coordinaten eine Curve der Ort eines beweglichen Punktes, dem System der Tangential-Coordinaten die Umhüllung einer beweglichen geraden Linie ist.

An einem Beispiele jedoch mag diese reciproke Auffassung etwas näher dargestellt werden; ich wähle dazu die allgemeine Entwickelung der Polare eines beliebigen Punktes $x_1, y_1, z_1$, wie sie durch Einführung der Werthe

$$\mu x_1 + \lambda x, \ \mu y_1 + \lambda y, \ \mu z_1 + \lambda z$$

für $x, y, z$ in die allgemeine Gleichung der gegebenen Curve in dem Früheren vorgelegt worden ist. Jetzt ist die Gleichung der gegebenen Curve nicht

mehr eine Relation, die die Coordinaten jedes ihrer Punkte erfüllen, sondern vielmehr eine solche, welcher die Coordinaten jeder ihrer Tangenten genügen; $x_1, y_1, z_1$ sind nicht die Coordinaten eines Punktes, sondern einer geraden Linie. Wenn dort $\mu : \lambda$ das lineare Verhältniss war, in welchem die Verbindungslinie des gegebenen festen Punktes $x_1, y_1, z_1$ $(O)$ mit dem veränderlichen Punkte $x, y, z$ $(R)$ durch einen Punkt in der Curve $(R_1)$ getheilt wurde, nämlich

$$\frac{\mu}{\lambda} = \frac{RR_1}{OR_1},$$

so ist jetzt vielmehr diese selbe Grösse $\frac{\mu}{\lambda}$ das Sinusverhältniss, nach welchem der Winkel, den die gegebene feste gerade Linie $x_1, y_1, z_1$ $(O)$ mit der veränderlichen geraden Linie $x, y, z$ $(R)$ bildet, durch eine Tangente der Curve $(R_1)$ getheilt wird:

$$\frac{\mu}{\lambda} = \frac{\sin RPR_1}{\sin OPR_1}$$

(wenn $P$ den Scheitel jenes Winkels bezeichnet). Dort durchlief der veränderliche Punkt $R$ die gesuchte Polare, hier umhüllt die veränderliche gerade Linie $R$ den gesuchten Pol, dort war $R_1$ ein Punkt der gegebenen Curve, hier ist es eine Tangente derselben, dort theilte er die Verbindungslinie der zwei Punkte $O, R$, hier den Winkel der sich schneidenden geraden Linien $O, R$.

Wenn daher — um gleich von den Resultaten zu sprechen, denn alles Rechnungswerk bleibt genau das Nämliche — dort die Gleichung der geradlinigen Polare erhalten ward,

$$x\left(\frac{dU}{dx}\right)_1 + y\left(\frac{dU}{dy}\right)_1 + z\left(\frac{dU}{dz}\right)_1 = 0$$

so stellt hier genau dieselbe Gleichung vom ersten Grade den punktförmigen Pol dar. Und wenn dort diese geradlinige Polare die Eigenschaft besass,

$$\Sigma\left(\frac{\mu}{\lambda}\right) = \Sigma\left(\frac{RR_1}{OR_1}\right) = 0$$

so besitzt hier der punktförmige Pol die Eigenschaft

$$\Sigma\left(\frac{\mu}{\lambda}\right) = \Sigma\left(\frac{\sin RPR_1}{\sin OPR_1}\right) = 0,$$

wobei der Punkt $P$ die gegebene gerade Linie durchläuft; dort ist die charakteristische Gleichung die gleich Null gesetzte Summe der Abschnittsverhältnisse zwischen einem Punkt der Curve und einem der Polare zu dem von jenem Curvenpunkt bis zum Pol; hier die gleich Null gesetzte Summe der Sinusverhältnisse zwischen dem Winkel, den eine Tangente der Curve und eine des Pols und dem Winkel, den dieselbe Curventangente und die gegebene gerade Polare bilden. (Der Scheitel des ersteren Winkels ist immer ein Punkt der geraden Polare; solches ist zu bemerken nützlich, weil der Pol in dem betrachteten Falle punktförmig und daher von Tangenten desselben nur uneigentlich zu reden ist.)

In ganz gleicher Weise ändert sich hier die Bedeutung der übrigen allgemeinen Gleichungen nun bezüglich der Pole der verschiedenen Classen. Nur an jene Gleichung des punktförmigen Pols mögen noch einige Bemerkungen geknüpft werden. Für eine Curve zweiter Classe wird seine charakteristische Relation

$$\frac{\sin RPR_1}{\sin R_1 PO} + \frac{\sin RPR_2}{\sin R_2 PO} = 0,$$

welches den Satz ausspricht: Wenn man von irgend einem Punkte $P$ einer festen geraden Linie $OP$ Tangenten $PR_1, PR_2$ an einen Kegelschnitt zieht und dann den Strahl $PR$ so legt, dass $P(OR_1\ RR_2)$ ein harmonisches Büschel ist, so geht $PR$ durch einen festen Punkt.

Diess ist die fundamentale Beziehung zwischen Pol und Polare in Bezug auf einen Kegelschnitt als eine Curve zweiter Classe betrachtet.

Aus der allgemeinen Gleichung des punktförmigen Pols und seiner fundamentalen Eigenschaft erkennt man, dass allerdings ein einziger Punkt als Pol einer geraden Linie in Bezug auf eine Curve höherer Classe gefunden wird. Als man dagegen früher den Pol einer geraden Linie in Bezug auf eine Curve höherer Ordnung suchte, fand man, dass viele Pole der geraden Linie entsprachen, nur den einzigen Fall der Curve zweiter Ordnung ausgenommen.

Wenn die gerade Linie im Unendlichen gedacht wird, so ist ihr Pol in Bezug auf einen Kegelschnitt das Centrum, der Mittelpunkt desselben; nach Analogie dieser Bezeichnung würden bei einer Curve höheren Grades viele Punkte auftreten, die alle gleichberechtigt wären, Mittelpunkte zu heissen. Ich habe deshalb ganz vermieden, an der betreffenden Stelle des Früheren davon zu sprechen, obgleich das über die Durchmesser Gesagte aufzufordern schien, von Mittelpunkten zu handeln. (Nämlich nach Analogie des Verhältnisses von Durchmessern und Mittelpunkten bei den Kegelschnitten.)

Jetzt kann erkannt werden, dass einheitliche Mittelpunkte den Curven nur insofern entsprechen, als man sie als Umhüllungen bewegter gerader Linien betrachtet. Die vollkommene und nur hier vorhandene Uebereinstimmung zwischen Grad und Classe bei den Kegelschnitten ist die Ursache des hier stattfindenden genauen Zusammentreffens beider Betrachtungsweisen.

Um so mehr ist es wünschenswerth, hier die interessante Frage zu beantworten, welche Eigenschaft einen solchen Mittelpunkt einer Curve höherer Classe charakterisirt.

Wenn man den Fusspunkt der von $R_1$ auf die gerade Linie $RP$ gefällten Senkrechten $M_1$ und den Fusspunkt der von demselben Punkte auf die Linie $OP$ gefällten Senkrechten $O_1$ nennt, so kann die allgemeine Relation

$$\Sigma\left(\frac{\sin RPR_1}{\sin R_1 PO}\right) = 0 \text{ in der Form } \Sigma\left(\frac{M_1 R_1}{R_1 O_1}\right) = 0$$

geschrieben werden.

Wenn nun die Linie $OP$ in das Unendliche fortrückt, so werden alle Nenner in dieser Summe einander gleich und man hat als einfache Definition eines wirklichen Mittelpunktes

$$\Sigma (M_1 R_1) = 0;$$

d. h. es verschwindet die Summe der Senkrechten, die man von den Berührungspunkten eines Systems paralleler Tangenten auf eine durch den Mittelpunkt gezogene gleichgerichtete gerade Linie fällen kann, oder die Summe der Perpendikel von ihm selbst auf dieses Tangentensystem.

Chasles hat diesen Satz zuerst gegeben (Quetelet, *Corresp. math.* II. 8.): Das Centrum der mittleren Entfernungen eines Systems paralleler Tangenten zu einer beliebigen gegebenen Curve ist ein fester Punkt, der als der Mittelpunkt der Curve betrachtet werden kann. In einem Kegelschnitt ist der Mittelpunkt der Verbindungslinie der Berührungspunkte zweier parallelen Tangenten dieser feste Punkt. In einer Curve dritter Classe ist es der Schwerpunkt des durch die Berührungspunkte gebildeten Dreiecks u. s. w.

Damit mag nun auch die Erörterung jener anderen Frage und diese Darlegung der Theorie der Pole und Polaren überhaupt geschlossen sein.

## VI.

# Die Elektricitätslehre vom Standpunkt der Undulationstheorie.

Ein Versuch von Dr. ED. ZETZSCHE,

Lehrer a. d. K. Gewerbschule in Chemnitz.

### 2. Artikel.

---

In dem Vorhergehenden haben wir gezeigt, welche vielseitige Uebereinstimmung zwischen Schall, Wärme, Licht, Elektricität und Magnetismus vorhanden ist; daran reihen wir jetzt den Versuch, die elektrischen Erscheinungen aus der Annahme von elektrischen Schwingungen zu erklären. Gerade wegen jener nachgewiesenen Uebereinstimmung aber schliessen wir uns enger an die Theorie des Lichtes an und suchen durch sie zuvörderst eine Grundlage zu gewinnen, auf welche wir uns bei der Bildung unserer Ansicht über die allgemeinsten Eigenschaften der elektrischen Schwingungen stützen können.

Da das Licht, abweichend vom Schalle, sich selbst durch einen luftleeren Raum hindurch fortpflanzt, so nimmt man an, dass die Lichtschwingungen nicht Schwingungen der Körpertheilchen seien, sondern in einem überall verbreiteten, höchst elastischen Medium, in dem Aether vor sich gingen. Die Theilchen dieses zur Erklärung der Lichterscheinungen zu Hilfe genommenen Aethers sind im Verhältniss zu den Körpertheilchen äusserst klein und zwar in dem Grade, dass ihre lichtgebende Bewegung die Körpertheilchen weiter gar nicht berührt, sondern Letztere bei derselben in Ruhe bleiben *). Wohl aber übt die wägbare Masse der Körper einen gewissen Einfluss auf die Aethertheilchen aus, und desshalb ist die Fortpflanzung des Lichtes im luftleeren Raume und in den verschiedenen gasförmigen, flüssigen und festen Körpern verschieden. Eben so gut nun, wie die Körpertheilchen auf einander einwirken, thun es auch die Aetherpartikelchen; allein es wird die dadurch bedingte absolute Elasticität des Aethers

---

*) Wenn nicht etwa die chemische Wirkung des Lichtes auf eine Ueberwindung der Trägheit der ruhenden Körpertheilchen durch den schwingenden Aether hindeutet.

durch jenen Einfluss der Körpertheilchen abgeändert, und wir lernen somit immer nur die relative Elasticität der Aethertheilchen kennen. Für gewöhnlich befindet sich die Gesammtwirkung aller auf irgend ein Aethertheilchen anziehend oder abstossend wirkenden Aethertheilchen zugleich mit der von den Körpertheilchen auf dasselbe ausgeübten Anziehung oder Abstossung im Gleichgewichte. Wird dieses Gleichgewicht gestört, so streben die Aethertheilchen in dasselbe zurückzukehren, und wegen der vorhandenen Elasticität beginnt zuvor ein Schwingen um die Gleichgewichtslage; diese Schwingungen aber pflanzen sich dadurch fort, dass in Folge des zwischen den Aethertheilchen bestehenden Zusammenhangs jedes folgende Theilchen eine Anregung bekommt, die Bewegung des vorhergehenden (um eine kurze Zeit später) nachzumachen. Werden auf diese Weise die entstandenen Schwingungen bis zur Netzhaut des Auges fortgepflanzt, so empfindet das Auge sie als Lichteindruck. Diese Schwingungen des Aethers erfolgen transversal auf die Fortpflanzungsrichtung, welche mit der Richtung der Strahlen zusammenfällt. „In dem einfachsten homogenen Lichte bewegen sich die schwingenden Aethertheilchen nach der Weise eines einfachen Pendels und beschreiben entweder geradlinige, kreisförmige, oder elliptische Bahnen. Diese Bewegungsformen sind der Grund der geradlinigen, der circularen und der elliptischen Polarisation. Die Farbe des Lichtes richtet sich nach der Dauer einer Schwingung; die Stärke desselben wird durch das Quadrat der Schwingungsweite gemessen" *).

Wenn wir nun ganz denselben Aether und in derselben Weise auch die elektrischen Erscheinungen vermitteln lassen wollen, nämlich so, dass er dieselben nicht schon durch sein blosses Vorhandensein, sondern erst dann vermittelt, wenn er in gewisse Schwingungen **) geräth, so finden wir uns doch besonders durch die Leitungserscheinungen und durch die so deutlich ausgeprägte, kräftige Einwirkung der Elektricität auf die Massentheilchen zu einer wesentlichen Abweichung von der eben kurz vorgetragenen Theorie des Lichtes veranlasst. Und desshalb stellen wir die Elektricität gleich-

*) Ettingshausen: die Principien der heutigen Physik, S. 10.

**) Wir denken uns diese Schwingungen ebenfalls transversal gegen die Fortpflanzungsrichtung. — Die vorliegende Abhandlung war in ihrem Hauptentwurf schon zu Ende 1856 fertig und wurde zuerst im Januar 1857 privatim mitgetheilt, im April 1857 aber der philosophischen Facultät der Universität Jena vorgelegt. Gegen Ende 1857 erschien von Professor Karl Robida in Klagenfurt eine „Vibrationstheorie der Elektricität." Robida hat „seit Anfang dieses Jahres (1857) die Vibrationstheorie der Fluidumshypothese substituirt" und nach ihm „beruht die Elektricität auf Longitudinalschwingungen der Theilchen eines elektrischen Körpers, aus welchen Longitudinalwellen entstehen, die als positiv elektrische mit verdichtetem Vordertheile, als negativ elektrische mit verdünntem Vordertheile in der Fortpflanzungsrichtung der entsprechenden Elektricität fortschreiten." Für die Richtigkeit dieser Behauptung werden directe Beweise aufgeführt. Die Beweisführung ist aber locker und lückenhaft, und es herrscht in der ganzen Durchführung viel Willkühr und zum Theil Unbestimmtheit, wie wir in einem spätern Artikel nachzuweisen Gelegenheit nehmen werden.

sam als Uebergangsglied zwischen Schall und Licht durch die Annahme, dass die elektrischen Erscheinungen weder ausschliessend und allein aus Schwingungen der Körpertheilchen, noch ausschliessend und allein aus Schwingungen des Aethers, sondern aus beiden gemeinschaftlich hervorgehen*). Damit sich also ein Körper elektrisch zeige, müssen in ihm beiderlei Schwingungen vorhanden sein, und so lange sie vorhanden sind, ist eben der Körper elektrisch. Es treten nun aber elektrische Schwingungen der Körpertheilchen nie allein auf, sondern sind stets von gleichen Schwingungen des Aethers begleitet; dagegen kann es geschehen, dass in besonderen Fällen blos die Aethertheilchen in Schwingungen gerathen, ohne zugleich die Körpertheilchen mit in Schwingungen zu versetzen. Es können nämlich die Wechselbeziehungen zwischen Aether- und Massentheilchen von verschiedener Art sein. Die Körpertheilchen werden immer ein gewisses Uebergewicht über die Theilchen des so äusserst feinen und beweglichen Aethers ausüben und desshalb gewaltsam und unwiderstehlich ihre Schwingungen stets auch auf den Aether übertragen, während ein Schwingen der Aethertheilchen sich den Körpertheilchen nur dann mittheilen kann, wenn die Wechselwirkung zwischen beiden kräftig genug dazu ist und wenn überdiess die Starrheit der Körpertheilchen diese nicht hindert, dem erhaltenen Antriebe zu Schwingungen zu folgen. Werden also irgend welche elektrische Schwingungen bis zu einem Körper fortgepflanzt**), so wird es von dem in diesem herrschenden Verhältnisse zwischen Aether- und Körpertheilchen abhängen***), ob in ihm durch den von den ankommenden Schwingungen ausgehenden und desshalb in seiner Stärke bestimmten Antrieb blos der Aether, oder ob Aether- und Körpertheilchen zugleich in Schwingungen versetzt werden, d. h. ob der Körper blos die Elektricität als Strahlung durch sich hindurch wirken lässt †), oder ob er selbst elektrisch wird. Im erstern

*) Robida nimmt blos Schwingungen der Körpertheilchen an; wir gewinnen durch unsere Annahme eine leichte Erklärung für die influenzirende und inducirende Fernwirkung der Elektricität und leiten aus ihr auch die Verschiedenheiten im Verhalten der Leiter und Nichtleiter ab. — Dieselbe Annahme dürfte mit ähnlichem Vortheil wohl auch für die Wärme beibehalten werden können; ohnehin betrachtet man ja die Verbreitung der Wärmestrahlen als ätherische Wellenbewegung mit transversalen Schwingungen; während man sich andere Wärmeerscheinungen als auf Schwingungen der Körpertheilchen selbst beruhend vorstellt. Vergl. darüber Ettingshausen, die Principien der heutigen Physik, S. 14 und 15.

**) Viel Aehnlichkeit mit dem vorliegenden Falle hat die Resonanz. — Die Luft über einem tönenden Körper schwingt ebenfalls mit, und es erscheinen die Chladni'schen Klangfiguren auch auf einer über einer tönenden Scheibe ausgespannten Membran. Eine Berührung des tönenden Körpers mit der Hand oder mit einem andern weichen Körper lässt den Ton verschwinden oder macht ihn unrein.

***) Becquerel, traité de physique I, 367: „Die Leitungsfähigkeit kann von dem Molekularzustande abhängen; der Diamant isolirt, Anthracit und Coak leiten." — Wenn die Theilchen durch äussern Zwang in einer unfreiwilligen Spannung erhalten werden, so werden sie an Beweglichkeit verlieren und sich ihre Leitungsfähigkeit vermindern. Einfluss der Temperatur auf die Leitungsfähigkeit.

†) Bei der gestrahlten Wärme wird der Körper, durch den hindurch die Strahlung erfolgt, selbst nicht warm.

Falle nennen wir den Körper einen Nichtleiter oder Isolator, im zweiten einen Leiter*). In den Leitern überträgt sich immer die Schwingung von einem Theilchen auf die andern und es werden so auch beide Arten der Schwingungen fortgepflanzt**). Ja selbst dann, wenn bis zu einem Leiter nur Schwingungen der Aethertheilchen gelangen, gerathen doch in ihm nicht blos die Aethertheilchen, sondern auch die Körpertheilchen mit in Schwingungen und die zu ihm gelangte Strahlung wird in ihm (bei der Influenz oder Vertheilung) zur Leitung, weil ja bei den Leitern die Aethertheilchen nicht allein schwingen können, die Strahlung nicht unverändert durch sie hindurchgeht. Anders ist es bei den Nichtleitern: da vermag kaum ein schwingendes Körpertheilchen seine trägen Nachbarn in Schwingungen zu versetzen und noch viel weniger kann daher ein Aethertheilchen durch seine Schwingungen die Körpertheilchen zum Mitschwingen anregen. Es ist vielmehr in den Nichtleitern die Wechselwirkung zwischen den Aether- und Körpertheilchen so schwach, dass die Letztern den Erstern sogar gestatten, für sich allein zu schwingen. So tritt bei den Nichtleitern die Strahlung mehr oder minder frei von der Leitung hervor, deren Begleiterin sie übrigens für gewöhnlich ist. Es braucht ferner wohl kaum noch besonders hervorgehoben zu werden, dass die Nichtleiter in Folge der durch sie hindurchgehenden Strahlung noch nicht elektrisch werden, so lange nicht auch die Körpertheilchen in ihnen zu schwingen beginnen. Wenn aber ein Nichtleiter einmal elektrisch wird, wenn bei ihm auch die Körpertheilchen schwingen, dann werden deren Schwingungen in der Regel sehr heftig sein***). Die Strahlung muss als blosse Fortpflanzung der elektrischen Aetherschwingungen mit der geradlinigen Fortpflanzung der Lichtstrahlen mehr im Einklang stehen, als die Leitung, bei welcher sich die Schwingungen von Theil zu Theil mittheilen und, ohne eine ursprüngliche Richtung der Fortpflanzung festzuhalten, dem Leiter in allen seinen Windungen und Krümmungen folgen †), so lange nur der Zusammenhang nicht unterbrochen ist. Die In-

*) In der Wirklichkeit dürfte es aber weder vollkommene Nichtleiter, noch vollkommene Leiter, sondern blos gute und schlechte Leiter geben, wie es ja auch nicht vollkommen elastische oder unelastische Körper gibt. — Die besten Leiter der Elektricität und zugleich der Wärme sind die dehnbaren Metalle und die leicht beweglichen Flüssigkeiten; die besten Isolatoren sind spröde und zähe Substanzen. Trockene Gase isoliren so lange, bis die schwache Wechselwirkung zwischen Aether- und Körpertheilchen durch die mit zunehmender Verdünnung wachsende Beweglichkeit der Theilchen überboten wird. — Der harte Stahl hat eine grössere Coercitivkraft, als weiches Eisen, dessen Coercitivkraft jedoch durch Kalthämmern und Verdrehen um seine Längsaxe wächst.

**) Mit gleicher Geschwindigkeit durch eine Art Unisoniren.

***) Bei gespannten Saiten und Membranen sind die Schwingungszahlen proportional den Quadratwurzeln aus den spannenden Gewichten. Vergl. Pouillet, übersetzt von Palmieri, III. § 330.

†) Ganz ähnlich wie bei der geleiteten Wärme. Vergl. Zantedeschi II. I. S. 268 und die Note von Melloni zu § 482 der Palmierischen Uebersetzung des 4. Theils der Physik von Pouillet.

tensität nimmt daher hier nicht mit dem Quadrate der Entfernung ab, sondern ist lediglich durch die Anzahl der hintereinander in Schwingungen zu versetzenden Theilchen bedingt*), was das Ohm'sche Gesetz über den Einfluss der Länge des Leiters auf die Stromstärke bestätigt. Da es endlich eines kräftigeren Anstosses bedarf, um die gröberen Körpertheilchen in Schwingungen zu versetzen, so wird auch bei der Leitung mehr von dem Schwingungsmomente des ursprünglich elektrischen, abgeleiteten Körpers verbraucht, als bei der blossen Strahlung**); dennoch schützt auch der beste Nichtleiter auf die Dauer nicht ausreichend gegen jeden Verlust an Elektricität.

Vielleicht werden durch die Schwingungen der Körpertheilchen vorwiegend die Veränderungen veranlasst, welche durch die Elektricität in den Aeusserungen der Molekularkräfte eintreten, während die leuchtenden und dynamischen Wirkungen auf Rechnung der Schwingungen der Aethertheilchen zu schreiben wären.

Auf eine Verdichtung im fortpflanzenden Mittel, welche bei den blos im Aether fortgepflanzten Lichtschwingungen nicht stattfindet, scheint das Zickzack des Blitzes und die Verästelung der elektrischen Funken hinzudeuten.

Und wie lassen sich nun aus diesen Voraussetzungen die Gesetze der elektrischen Erscheinungen entwickeln? Bei der Untersuchung darüber scheiden wir die Gesammtheit der elektrischen Erscheinungen in zwei Gruppen und handeln zunächst von der Erregung der Elektricität und dann von dem Verhalten elektrischer Körper.

1) Unter den verschiedenen Arten der Erregung der Elektricität besprechen wir zuerst die Erregung durch Berührung. Wie sich in jedem, in allen seinen einzelnen Theilchen völlig gleichartigen Körper die wechselseitigen Wirkungen der Körper- und Aethertheilchen auf einander im Gleichgewichte befinden, so ist es auch bei der Berührung zweier ganz gleichartiger Körper***); denn es erhält hier jedes Theilchen in der Berührungsfläche zwei gleiche Antriebe nach entgegengesetzter Richtung. Desshalb ist in beiden Fällen keine Ursache vorhanden, wesshalb die Theilchen aus dem Zustande der Ruhe in eine schwingende Bewegung übergehen sollten. Sind aber die beiden sich berührenden Körper verschiedenartig, so

*) Die Grösse des Querschnitts dagegen ist hier eben so wenig von Gewicht, als bei der Verbreitung tönender Schwingungen. Vergl. Pouillet, übersetzt von Palmieri, III. § 337. S. 82.

**) Für gewöhnlich ist die Influenz und Induction für den influencirenden und inducirenden Körper nicht als Arbeit zu betrachten; wohl aber die Ueberwindung des Leitungswiderstandes (vgl. Ettingshausen, die Principien der heutigen Physik, S. 18). Dass aber selbst bei der Influenz eine namhafte Menge Elektricität verbraucht und unwirksam gemacht werden kann, zeigen uns die Erfahrungen an ins Meer versenkten Telegraphendrähten.

***) Andrer Meinung ist Robida, vergl. Vibrationstheorie S. 14; allein auch in diesem Punkte können wir uns nicht zu seiner Ansicht bekehren.

sind die von den entgegengesetzten Seiten kommenden Antriebe, wenn sie in gleichem Sinne erfolgen, sie also das davon ergriffene Theilchen aus der Gleichgewichtslage nach entgegengesetzten Richtungen zu verschieben streben, wenigstens nicht gleich gross, und es bleibt dann ihre Differenz wirksam übrig; oder die Antriebe wirken gar in entgegengesetztem Sinne auf ein und dasselbe Theilchen, und dann unterstützen sie sich gegenseitig in ihren Wirkungen. Es wird also in diesem Falle immer das Gleichgewicht gestört sein*) und zwar um so mehr, je grösser die Verschiedenheit oder der Gegensatz in den Eigenschaften der zur Berührung gebrachten Stoffe ist, d. h. je stärker deren chemische Verwandtschaft ist**). Aus dieser ersten Gleichgewichtsstörung werden dann um so leichter elektrische Schwingungen hervorgehen können, je stärker die Wechselwirkung zwischen den Theilchen ist und je leichter sich dieselben in elektrische Schwingungen versetzen lassen. Daher liefert nur die Berührung guter Leiter merkliche Elektricität und zwar um so mehr, je verschiedenartiger dieselben sonst sind.

Die Theilchen in der Berührungsfläche haben aber gerade die entgegengesetzte relative Lage gegen die Theilchen des einen und des andern der beiden sich berührenden Körper, somit erfolgt die erste Ablenkung aus der Gleichgewichtslage für den einen Körper gerade in entgegengesetztem Sinne, als für den andern Körper. Wenn nun die Schwingungen selbst von solcher Beschaffenheit sind, dass durch den eben genannten Umstand und seinen Einfluss auf die Gestalt oder die Lage der Schwingungsbahn die Schwingungsweise sich als eine andere herausstellen kann***), so können die von den schwingenden Theilchen in der Berührungsfläche aus gleichzeitig nach beiden Seiten hin fortgepflanzten Schwingungen in verschiedenem Sinne erfolgen, einen gewissen Gegensatz zeigen und den einen der beiden sich berührenden Körper als positiv, den andern als negativ elektrisch erscheinen lassen.

Die Schwingungen pflanzen sich also von der Berührungsfläche aus

---

*) Ganz gleichförmig werden wir auch alle andern Erregungsarten der Electricität, selbst Influenz und Induction aus Störung des Gleichgewichts ableiten. — Becquerel, traité de physique I. S. 74: „Alles, was das natürliche Gleichgewicht der Moleküle zu stören strebt, wird Ursache einer Elektricitätserregung."

**) Wir möchten hier an die chemische Wirkung durch Contact (Mitscherlich) oder die Katalyse (Berzelius) erinnern. Berzelius hält die katalytische Kraft für eine besondere Aeusserung der elektrochemischen Thätigkeit, deren Wirkung eigentlich darin bestehe, dass sie „die Elemente der Körper zu einer neuen Anordnung veranlasst," in welcher die entgegengesetzten Elektricitäten vollständiger neutralisirt d. h. die Verwandtschaften mehr ausgeglichen sind. Vergl. Rammelsberg, Lehrbuch der Stöchiometrie, Berlin 1842, S. 57. Diese Erklärung von Berzelius lässt sich mit der hier vorgetragenen Ansicht recht gut vereinigen.

***) Der Einfluss der Art und Weise, in welcher das zuerst schwingende Theilchen abgelenkt wurde, auf die Schwingungsweise der andern damit zusammenhängenden Theilchen findet sich sehr deutlich ausgesprochen in den Resonanzerscheinungen von Platten, die mit gestrichenen Saiten in Verbindung stehen. Vergl. Pouillet, übersetzt von Palmieri III. § 350. S. 112.

über beide Körper in deren ganzer Ausdehnung*) fort. Das dabei verbrauchte Schwingungsmoment wird stetig wieder ersetzt, so lange in der Berührung die erregende Ursache thätig bleibt. In Folge dieser Nachhaltigkeit der Wirkung geräth der ganze Körper dauernd in elektrische Schwingungen, deren Intensität**) anfänglich zunimmt, bis sich ein neuer Beharrungszustand herausgebildet hat und mit diesem das Maximum der Elektricität erreicht wurde. Auch hierbei ist wieder (wie S. 135 Note *) die Grösse des Querschnitts der Körper ohne Einfluss und demgemäss ist es auch gleichgiltig, ob in dem Querschnitte, von welchem die Bewegung ursprünglich ausging, nämlich in der Berührungsfläche, eine grössere oder geringere Anzahl von Theilchen aus dem Gleichgewichte gebracht wurden oder mit andern Worten: die Grösse der Berührungsflächen ist eben so ohne Einfluss auf die Menge der erregten Elektricität, wie die Grösse der Löthflächen bei der Thermoelektricität***); vielleicht aber dürfte in beiden Fällen von dieser Grösse die Zeit abhängen, welche bis zum Eintritt des Maximums verfliesst. Wesentlich anders natürlich verhält es sich, wenn mehrere Berührungsflächen hinter einander thätig sind und in einem aus mehreren Theilen gebildeten Ganzen wirken. Daher kommt es auch, dass die elektrische Differenz zwischen zwei Gliedern der elektrischen Spannungsreihe gleich ist der Summe der Differenzen der Zwischenglieder, wobei man zugleich die Art und Stärke der ersten Einwirkung der sich berührenden Substanzen nicht ausser Acht lassen darf; denn aus ihr erklärt sich einmal, warum die elektrische Spannungsreihe in so naher Beziehung zu den chemischen Eigenschaften†) steht, und andrerseits, warum derselbe Stoff positiv oder negativ elektrisch wird, jenachdem man den zweiten, ihn berührenden Körper wählt. Die Polarisation oder elektromotorische Gegenkraft bei den inconstanten Ketten liefert den schlagendsten Beweis, wie die Einwirkung sofort sich ändert, wenn die Körper ihre Eigenschaften wechseln, vornämlich wenn diess an den sich berührenden Flächen geschieht.

Wie in einem tönenden Körper, wenn er in Unterabtheilungen schwingt,

---

*) Ganz ähnlich wie bei tönenden Körpern; vergl. Pouillet, übersetzt von Palmieri III. § 343.

**) Könnte auch bei der Elektricität, wie beim Lichte (S. 132), das Quadrat der Schwingungsweite als Maass für die Intensität gebraucht werden?

***) Bei dem Elektrisiren eines Körpers durch Mittheilung dagegen fehlt die Nachhaltigkeit der Wirkung. Hier besitzt der mittheilende elektrische Körper nur ein bestimmtes Schwingungsmoment, das sich, einmal verbraucht, nicht wieder ersetzt. Je mehr also hier mit der gesammten Masse des zu elektrisirenden Körpers die Anzahl der hintereinander in Schwingungen zu versetzenden Theilchen wächst, um so geringer nur kann der Antheil sein, welcher von jener gegebenen, auf Störung des Gleichgewichts wirkenden Kraft auf jedes einzelne Theilchen kommt, desto geringer ist dann auch die Intensität der Schwingungen oder die Dichte der Elektricität.

†) Den Grund für das eigenthümliche Verhalten der tropfbaren und elastischen Flüssigkeiten möchten wir in ihren chemischen und physikalischen Eigenschaften suchen.

ruhende Schwingungsknoten die Stellen bezeichnen, wo die entgegengesetzt schwingenden Systeme an einander grenzen, so zeigt sich die Berührungsfläche der beiden entgegengesetzt elektrisch gewordenen Körper als Indifferenzzone. So lange nun die beiden elektrischen Pole isolirt bleiben, werden die Schwingungen eines jeden der beiden Systeme durch die des andern beeinträchtigt*), indem hier eine Art Resonanz statt hat, ganz ähnlich wie bei einem System, das aus mehreren tönenden Körpern gebildet ist. Wird dagegen der eine Pol abgeleitet, so wird sein Schwingungsmoment durch die unendlich grosse Anzahl der von ihm aus in Schwingungen zu versetzenden Theilchen verbraucht**) und die Intensität der Schwingungen des andern, nicht abgeleiteten Systems wird grösser, verdoppelt sich nahezu. Der Leiter, welcher den ableitenden Körper mit dem abgeleiteten Pole verbindet, wird im Augenblicke der Ableitung selbst von einem „elektrischen Strom" durchlaufen, d. h. es pflanzen sich die vom Pol ausgehenden elektrischen Schwingungen durch ihn hindurch fort. Der im vorliegenden Falle entstehende elektrische Strom ist aber nur ein momentaner, eine einzelne elektrische Welle. Werden dagegen beide Pole gleichzeitig abgeleitet, so werden in jedem Augenblicke die Schwingungen, welche in der Berührungsfläche entstanden, nach beiden Seiten vollständig abgeleitet und verbraucht, und es können von Augenblick zu Augenblick in ununterbrochener Aufeinanderfolge neue Schwingungen entstehen und sich fortpflanzen: es beginnt ein dauernder elektrischer Strom***), eine beständige Erregung und Vernichtung elektrischer Schwingungen, eine ununterbrochene Folge elektrischer Wellen†). Dasselbe findet statt, wenn man die beiden Pole selbst durch einen Leiter mit einander verbindet; denn auch dann ist die Füglichkeit vorhanden, dass sich in diesem Leiter, in dem Schliessungsbogen, die von den beiden Polen herkommenden Schwingungen gegenseitig beständig vernichten oder ausgleichen und so von der Berührungsfläche bestän-

---

*) Darauf scheint auch der in der Zeitschrift des Telegraphen-Vereins II. 7. S. 154 mitgetheilte fünfte Versuch von Wheatstone hinzuweisen, bei welchem die in gleicher Entfernung von den Batteriepolen in den (660 englische Meilen langen) Schliessungsdraht eingeschalteten Galvanometer gleichzeitig abgelenkt wurden, wenn der Schliessungskreis in der Nähe eines Poles geöffnet war und dann wieder geschlossen wurde.

**) Vergl. die Note 133 **) auf S. 5.

***) Nach Gauss kann ein elektrischer Strom auch circuliren zwischen zwei Körpern, welche bei hinreichender Grösse die Elektricität aufzunehmen vermögen. Und in der That besitzen die momentanen Ströme, welche z. B. während der Ladung einer Leidner Flasche den Ladungsdraht durchströmen, nach Ritter alle Eigenschaften gewöhnlicher Ströme. Vergl. Zeitschrift des Telegraphen-Vereins I. 5. S. 139. Die Wirkung solcher Ströme auf das Galvanometer wurde auch von Faraday (vergl. Zeitschr. des Tel.-Ver. I. 5. S. 127—130) und von Wheatstone (vergl. Zeitschr. des Tel.-Ver. II. 7. S. 153) beobachtet. Aehnlich steht es mit den chemischen Wirkungen; vergl. Zeitschr. des Tel.-Ver. I. 5. S. 136 und 12. S. 288. Es ist somit die Erweiterung des Begriffes Strom wohl gerechtfertigt.

†) Auch für das Licht nimmt Fresnel eine fortdauernde Einwirkung vom Ausgangspunkte des Lichtes an, also eine ununterbrochene Folge von Lichtwellen.

dig neue elektrische Wellen ausgehen. Die Dauer des Stromes ist also, wenn die Ursache zur Erregung elektrischer Schwingungen unausgesetzt thätig bleibt, blos bedingt durch eine ununterbrochene Fortleitung*) der Schwingungen. Mit der Unterbrechung der Leitung wird der Strom unterbrochen; mit der Entfernung der erregenden Ursache entfernt man die Wirkung; daher sind Reibungs- und Inductionsströme von so kurzer Dauer, während die galvanischen erst in Folge der Polarisation oder der Ablagerung von Gasen an den Elektroden schwächer werden und aufhören. Deutlich genug ist diess wohl auch im Ohm'schen Gesetz über die Stromstärke ausgesprochen; denn dieses sagt, es sei die Stromstärke $S$ proportional einmal dem Vermögen der Batterie, Elektricität zu erregen, d. i. der elektromotorischen Kraft $E$ und ausserdem proportional der Fähigkeit $F$ des Schliessungsbogens, die erzeugte Elektricität abzuleiten. Diese letztere Fähigkeit $F$ ist aber der reciproke Werth der Summe der Widerstände $W$, welche sich dem Abfliessen der Elektricität entgegenstellen; demnach finden wir die Stromstärke $S = \frac{E}{W}$.

In jedem der drei Fälle, wo ein momentaner oder dauernder Strom entsteht, zeigt sich die bewegte oder dynamische Elektricität wesentlich verschieden von der ruhenden oder statischen Elektricität, dadurch dass gerade sie magnetisirt, chemische Wirkungen hervorbringt, Licht und Wärme erzeugt. Die Erregung eines Inductionsstromes in einem benachbarten geschlossenen Leiter findet dagegen nur in den Momenten statt, wo die Wirkung des Stromes beginnt, aufhört, stärker oder schwächer**) wird, weil nur in diesen Fällen eine Störung des elektrischen Gleichgewichtes in dem inducirten Leiter eintritt, deren Folge eben die Entstehung des Inductionsstromes ist.

Wenn zwei gleichnamige Ströme in gleicher Richtung einen Leiter durchströmen, so verstärken sie sich in ihren Wirkungen; haben die beiden Ströme entgegengesetzte Richtung, so heben sich bei gleicher Stärke die von ihnen ausgehenden Antriebe zu Schwingungen gegenseitig völlig auf und es verschwinden damit zugleich auch alle Stromwirkungen***); bei un-

---

*) Der in der Zeitschrift des Telegraphen-Vereins II. 7. S. 154 mitgetheilte vierte Versuch von Wheatstone zeigt, dass vom Pole erst dann eine neue Welle fortgeht, wenn die früheren weiter geleitet wurden. Es stand nämlich bei diesem Versuche das eine Ende einer 660 engl. Meilen langen Leitung in Verbindung mit dem einen Pole einer Batterie, deren anderer Pol mit der Erde verbunden war; wurde jetzt das andere Ende der Leitung mit der Erde in Verbindung gesetzt, so wurden die an verschiedenen Stellen in die Leitung eingeschalteten Galvanometer um so früher abgelenkt, je näher sie an diesem Ende der Leitung, je weiter sie also von dem Pole der Batterie entfernt waren. Ganz analog ist der zweite Theil des fünften Versuchs ebendaselbst.

**) Durch Zu- oder Abnahme der Intensität des Stromes, durch Verminderung oder Vergrösserung der Ferne, aus welcher er wirkt.

***) Das Ausbleiben jeder Erwärmung, wenn man durch die Spirale eines elektrischen Luftthermometers zwei gleich starke gleichnamige Ströme in entgegenge-

gleicher Stärke bleibt blos der Ueberschuss des stärkeren Stromes wirksam übrig; ähnlich ist es bei ungleichnamigen Strömen und gleicher Richtung; ungleichnamige Ströme in entgegengesetzter Richtung endlich müssen sich verstärken, und schon desshalb ist der Strom bei leitender Verbindung beider Pole im Schliessungsbogen kräftiger als jene Ströme, durch welche sich blos eine Elektricität fortpflanzt.

Bei dieser Anschauungsweise verliert der Einwand sein Gewicht, dass sich beim Volta'schen Fundamentalversuche die Elektricität ohne wahrnehmbare chemische Veränderung an der Verbindungsstelle der beiden Metallplatten entwickelt *), ein Einwand, welcher gegen die elektrochemische Theorie spricht, nach der man, wie Berzelius, Becquerel, Faraday u. A., die geweckte chemische Thätigkeit als Ursache der Elektricität bezeichnet. Im entgegengesetzten Falle aber, wenn man mit Volta die Berührung als Ursache und die chemische Wirkung als Folge der Elektricität betrachtet **), erlaubt uns unsere Anschauung noch einen Schritt weiter zu thun, indem sie den Grund hinzufügt, wesshalb die Berührung das elektrische Gleichgewicht aufhebt. Obschon ferner unsere Theorie das Auftreten der Elektricität nicht durch das Dasein eines chemischen Processes bedingt erscheinen lässt, so schliesst sie doch keineswegs die Möglichkeit aus, dass durch chemische Processe gelegentlich Elektricität hervorgerufen wird. Denn da bei den chemischen Processen der Austausch der Stoffe nicht ohne Bewegung der Theilchen erfolgen kann, so kann sich diese letztere unter Umständen wohl auch in elektrische Schwingungen umsetzen. Ein Gleiches müssen wir auch da voraussetzen, wo Elektricität durch Druck oder durch Lösung des Zusammenhanges erregt wird. In diesen drei Fällen würden also die Veränderungen in der gegenseitigen Lage der Theilchen desselben Körpers gegen einander und gegen die Aethertheilchen und die dabei etwa eintretende Veränderung der Beschaffenheit dieser Theilchen dieselbe Wirkung hervorbringen, welche bei der Berührung das Hinzutreten der Theilchen eines verschiedenartigen Körpers hervorbrachte. Von mehr Gewicht noch ist aber sicher der Umstand, dass sich auf ganz gleiche Weise nicht allein die Entstehung der Reibungselektricität und der Thermoelektricität, sondern sogar auch die Verschiedenheiten im Auftreten der verschiedenen Elektricitäten erklären lassen. Die kräftige Bewegung nämlich der sich berührenden Theilchen von zwei an einander geriebenen Körpern vermag selbst in Nichtleitern die Trägheit der Körpertheilchen (S. 134) zu überwinden, und es bekundet sich dann noch der gewaltsamere Ursprung durch das

---

setzten Richtungen zu leiten sucht, spricht deutlich genug für die Nichtexistenz solcher Ströme; Petrina, in der Zeitschrift des Telegraphen-Vereins III. 8. S. 170.

*) Vergl. ausserdem Zantedeschi, trattato di fisica elementare III. II. 457—465.

**) Wenngleich sich bei sehr vielen chemischen Processen auch nicht eine Spur von Elektricität nachweisen lässt, wofür freilich verschiedene Ursachen geltend gemacht werden können.

gewaltsamere Verhalten, durch die grössere Heftigkeit der entstehenden Schwingungen. Desshalb hat die Reibungselektricität eine so hohe Spannung, desshalb ist sie schwieriger zu isoliren als die Berührungselektricität. Und auch bei der Reibungselektricität ist ja die Substanz, welche gerieben wird, durchaus nicht gleichgiltig; ihre verschiedene Beziehung zum Aether macht vielmehr das Vorzeichen und (um so zu sagen) die Menge der gelieferten Elektricität von den zum Reiben gewählten Stoffen abhängig, welche namentlich auch nicht völlig gleichartig sein dürfen. Der Einfluss der Form der Reibung wäre aus der Art und Weise zu erklären, wie durch sie das Gleichgewicht gestört wird. Die Spannungsreihe für die Reibungselektricität wird also durch äussere Einflüsse sehr schwankend gemacht, so durch Wärme, Farbe, Lage der Fasern, Druck, Oberflächenbeschaffenheit u. s. w., und aus diesem Grunde ist es auch kein Wunder, dass sie von der Spannungsreihe für die Berührungselektricität so abweicht.

Temperaturdifferenzen zwischen den einzelnen Körpertheilchen oder allgemeine Bewegung der Wärme erzeugt endlich ebenfalls Elektricität und es wechselt deren Vorzeichen mit der Umkehrung der Bewegungsrichtung. Die Ursache der Elektricitätserregung kann hier eine mehrfache sein: es können zunächst die Wärmeschwingungen unmittelbar elektrische Schwingungen veranlassen, oder es kann die Reibung der durch die Wärme in Bewegung gerathenden, sich dabei ausdehnenden oder zusammenziehenden Körpertheilchen, oder endlich die durch die Wärme verursachte Ungleichartigkeit*) der sich berührenden Körpertheilchen und deren sich ändernde gegenseitige Entfernung den Anstoss zu elektrischen Schwingungen geben. Begünstigt doch eine sonst schon vorhandene Verschiedenartigkeit das Hervortreten der elektrischen Polarität wesentlich, mag dasselbe nun in einer Ungleichheit der Form, der Substanz oder der Dichte nach verschiedenen Richtungen (krystallographische Axen) bestehen. Auch das Licht vermag einen Körper zu elektrisiren und zu magnetisiren, besonders dann, wenn bloss ein Theil desselben dem Lichte ausgesetzt, der andere Theil aber ihm verschlossen wird**). Wenn aber eine blosse Aenderung des Aggregatzustandes (bei Ausschluss aller sonstigen Ursachen) keine Elektricität erzeugt, so macht diess noch keineswegs die Annahme von elektrischen Schwingungen unzulässig, sondern beweist bloss, dass die hier vorhandene Bewegung der Art ist, dass sich die dabei eintretenden Gleichgewichtsstörungen ausgleichen, ohne vorher in Schwingungen überzugehen, und es könnte diess möglicherweise eine Folge von zugleich mit eintretenden Aenderungen in den Beziehungen zwischen Körper- und Aethertheilchen sein.

---

*) Vergl. Zantedeschi III, II 145: Die entgegengesetzten (Thermo-) Elektricitäten entspringen aus dem Mangel an Symmetrie zwischen den beiden Krystallenden. (Hauy.)

**) Vergl. Zantedeschi III, II S. 199 ff. und Pouillet, übersetzt von Palmieri II § 187, S. 208.

Ausser der Erregung von Elektricität durch Magnetismus und durch Elektricität, die wir später berühren werden, bleiben uns jetzt bloss noch die organischen und atmosphärischen Processe als Elektricitätsquellen zu erwähnen. Diese Processe sind gemischter Natur, theils chemische, theils rein mechanische, und schon aus diesem Grunde könnten sie mannichfach Gelegenheit zur Erregung von Elektricität bieten, ganz abgesehen von der namentlich im organischen Leben so vielfältigen innigen Berührung der verschiedenartigsten Stoffe.

Schliesslich hätten wir noch darauf hinzuweisen, dass die magnetisirende Einwirkung von Magneten auf benachbarte, des Magnetismus fähige Körper durch eine erschütternde Bewegung der Körpertheilchen oder durch Reiben befördert wird*), ja dass man einen schwachen Magnetismus selbst durch blosses Reiben hervorzurufen vermag, wobei aber freilich der Erdmagnetismus wohl einen Einfluss ausüben könnte.

2) Während wir uns bis jetzt über die Entstehung der Elektricität Rechenschaft zu geben versuchten, wollen wir uns nunmehr mit dem Verhalten elektrischer Körper beschäftigen und die elektrostatischen und elektrodynamischen Erscheinungen zum Gegenstande unserer weitern Besprechung machen.

Mit Annahme der Undulationstheorie wird vor allem die Ansicht unhaltbar, dass die Elektricität bloss auf der Oberfläche**) und auf dieser wieder an den verschiedenen Punkten je nach deren Krümmungshalbmessern in wechselnder Dichte abgelagert sei. Da wir aber die Thatsachen, welche zur Annahme dieser Ansicht geführt haben, nicht wegleugnen können, so müssen wir sie auf eine andere Weise zu deuten trachten. Wenn nämlich auch alle Theilchen eines überall mit gleichnamiger Elektricität behafteten Körpers in gleichem Sinne schwingen, so werden doch schwerlich alle gleich heftig schwingen. Denn je weniger ein Theilchen in Folge seiner Lage und seines Zusammenhangs mit seinen Nachbartheilchen durch diese beeinflusst und um so zu sagen beengt ist, desto kräftiger kann sein Schwingen und somit seine Wirkung nach aussen sein, sofern dieselbe von der Heftigkeit der Schwingungen abhängt; desto leichter kann aber auch ein solches Theilchen, wenn es selbst noch nicht elektrisch ist, einem von aussen kommenden Antrieb zum Schwingen nachgeben und elektrisch werden. Nun haben aber die Theilchen an Kanten, Ecken und Spitzen offenbar die freieste Lage und eben desshalb müssen sie nicht nur am leichtesten, sondern auch am stärksten elektrisch werden und am besten dazu geschickt sein, ihre Elek-

---

*) Vergl. Pouillet, übersetzt von Palmieri II § 188. Becquerel, traité de physique I, S. 88. — Die Reibungscoefficienten der Bewegung sind kleiner als jene der Ruhe. — Im Status nascens ist die chemische Anziehung weit kräftiger.

**) Ohnehin setzt man ja schon jetzt von der galvanischen Elektricität voraus, dass sie sich im ganzen Querschnitt des Leiters und nicht bloss auf dessen Oberfläche fortpflanze.

tricität an andere unelektrische oder weniger stark elektrische Körper abzugeben*). Wenn ferner auch alle in gleichem Sinne schwingenden Theilchen eines elektrischen Körpers auf einen Prüfungskörper oder ein Elektroskop gleiche Wirkung äussern, so ist doch die Gesammtwirkung auf das Elektroskop die algebraische Summe der Einzelwirkungen und als solche ist sie nicht allein von der Anzahl der wirksamen Theilchen, sondern auch von deren gegenseitiger Lage abhängig und von der etwa durch die letztere abgeänderten Wirkungsfähigkeit der einzelnen Theilchen**). Auch in dieser Hinsicht sind wieder die Spitzen in einer weit günstigeren Lage, als die Flächen, und bringt man den Prüfungskörper gar in das Innere des zu prüfenden Körpers, so sind die auf ihn wirkenden Theilchen ringsum vertheilt und die einzelnen Wirkungen heben sich wegen ihrer entgegengesetzten Richtung gegenseitig auf***). Daher macht auch eine elektrische Hohlkugel eine andere in sie hineingesteckte Kugel nicht elektrisch †); und es können die Goldplättchen eines Elektroskops im Innern einer elektrisirten Hohlkugel nicht divergiren, wenn bei der Elektricität die Wirkung in die Ferne dem Quadrate der Entfernung umgekehrt proportional ist und zugleich von gleichgrossen Raumelementen gleichstarke Wirkungen ausgehen, weil ja das hierher bezügliche Gesetz der Statik nur unter diesen beiden Voraussetzungen gilt. Dass beide Bedingungen erfüllt sind, lässt sich experimentell nachweisen; wenn man aber zuvor durch das Experiment darthut, dass die Goldplättchen des Elektroskops in dem oben angeführten Falle wirklich nicht divergiren, so kann man entweder experimentell zeigen, dass eine Kugel an allen Punkten ihrer Oberfläche gleich stark elektrisch ist, und dann (wie Priestley) auf das Gesetz der Wirkung in die Ferne schliessen, oder man kann, da auch das letztere längst theoretisch und experimentell festgestellt ist, aus diesem Gesetze folgern, dass von allen in derselben Kugelschale gelegenen Punkten eine gleichstarke Wirkung ausgehen muss, was ja auch dem ersten Theile der gegebenen Erklärung gemäss der Fall sein müsste, weil alle Punkte derselben sich genau in derselben relativen Lage befinden.

---

*) Spitzen und Flächen bilden also einen ähnlichen Gegensatz wie Leiter und Nichtleiter.

**) Auf die Einstellung im magnetischen Felde ist die Dichtheit und die Gestalt von wesentlichem Einfluss.

***) Auf einem elektrischen Körper, bei welchem die Elektricität im Gleichgewichte ist, muss die Summe der Wirkungen auf einen innern Punkt $= 0$ sein, weil sonst durch Influenz in diesem Punkte die natürlichen Fluida zerlegt werden müssten und das Gleichgewicht gestört wäre. Vergl. Pouillet, übersetzt von Palmieri II § 203, S. 253.

†) Wenn eine massive und eine hohle Kugel von gleichem Durchmesser durch 2 gleiche und gleich stark elektrische Kugeln gleich stark geladen werden (Pouillet, übers. von Palmieri II § 203, S. 250), so sind wir versucht, diess als eine anderweite Bestätigung des schon früher über den Einfluss des Querschnitts Gesagten zu betrachten.

Wenn aber so die als Beweismittel für eine eigenthümliche und bloss oberflächliche Vertheilung der Elektricität gebrauchten Thatsachen andere zulässige Erklärung finden, dann können wir diese Vertheilung selbst eben so gut fallen lassen, wie Häcker („zur Theorie des Magnetismus," Nürnberg 1856, S. 190, 203 u. 229) die Ansicht von einer ungleichen Vertheilung des Magnetismus im Innern der Körper widerlegt hat.

Die Erscheinungen, welche wir beobachten, wenn ein elektrischer Körper mit einem unelektrischen in Berührung kommt, sind einfache Folgen der vorhin besprochenen Eigenschaften der Leiter und Nichtleiter. Wird ein elektrischer Nichtleiter mit einem unelektrischen Nichtleiter berührt, so tritt in dem Zustande beider eine merkliche Veränderung erst nach Verlauf einer längeren Zeit ein und es erstreckt sich auch dann die Einwirkung des elektrischen Körpers auf den unelektrischen, sofern sie nicht blosse Strahlung ist, nur bis zu einer nicht beträchtlichen Tiefe. Sind dagegen beide Körper gute Leiter, so findet sehr schnell eine Ausgleichung in ihrem gegenseitigen elektrischen Zustande statt, ganz ähnlich, wie wenn sich zwei gute Wärmeleiter von verschiedener Temperatur berühren. Dadurch, dass die schwingenden Theilchen die noch nicht schwingenden in Bewegung setzen, erleiden sie selbst einen Verlust an dem ihnen inne wohnenden Schwingungsmomente, und es stellt sich schliesslich ein durch die beiderseitigen Grössen- und Massenverhältnisse bedingter, beiden Körpern gemeinschaftlicher Gleichgewichtszustand heraus. Ist aber der unelektrische Körper gegen den elektrischen unendlich gross, so wird durch ihn das ganze Schwingungsmoment aufgezehrt und der elektrische Körper völlig entladen. Zwischen inne liegen die Erscheinungen bei der Berührung eines Nichtleiters mit einem Leiter; ein Nichtleiter wird durch den Leiter zunächst nur an der Berührungsstelle geladen oder entladen.

Sind ein elektrischer und ein unelektrischer Körper durch einen Leiter verbunden, so ist es nahezu ebenso, als wenn sie sich unmittelbar berührten. Befindet sich dagegen zwischen ihnen ein Nichtleiter, so gestattet dieser, wenn schon er selbst nicht elektrisch wird, doch durch sich hindurch eine Einwirkung des elektrischen Körpers $E$ (Taf. I, Fig. 6) auf den unelektrischen $U$, welche wir früher als Strahlung bezeichnet haben. Durch diese neue hinzukommende Einwirkung werden in $U$ zunächst die Aethertheilchen aus dem Gleichgewichte gebracht, gerathen in Schwingungen und übertragen dieselben auch so viel als möglich auf die Körpertheilchen. Ist nun $U$ ein Nichtleiter, so erstreckt sich wiederum die Einwirkung auf die Körpertheilchen nur auf eine geringe Tiefe in $U$ hinein*). Ist aber $U$ ein Leiter,

*) Wenn in diesem Falle bei kräftiger Wirkung von $E$ wiederholte Abwechselungen im Vorzeichen der Elektricität auf $U$ erscheinen, so sind die als Grenzen der einzelnen, entgegengesetzt schwingenden Zonen auftretenden Folgepunkte ebenfalls mit den akustischen Schwingungsknoten zu vergleichen. Magnete mit Folgepunkten erhält man durch gewisse Arten des Streichens, oder durch Abwechselungen in der Umwickelungsrichtung des Drahtes der Elektromagnete. Das Auftreten

so geräth er vollständig mit in Schwingungen und es bilden fortan beide Körper bloss ein einziges, durchweg gleichförmig schwingendes System. Auch in diesem Falle ist eine Indifferenzzone vorhanden und rückt um so näher an *E* heran, je kräftiger die von *E* ausgehende Wirkung ist, d. h. je stärker elektrisch und je näher *E* ist*); diese Indifferenzzone entspricht aber nicht einem Schwingungsknoten, sondern ist die Folge des schon S. 142 erwähnten Einflusses, den die Nachbartheilchen auf die nach aussen sich kund gebende Wirkung irgend eines Theilchens ausüben. Dem elektrisirenden Einflusse von *E* auf die Zwischenschicht arbeitet zwar der von *U* kommende gleichsinnige entgegen, weil seine Wirkungsrichtung die entgegengesetzte ist, wenn aber die Dicke der nichtleitenden Zwischenschicht klein genug ist, so werden doch in dieser ganzen Zwischenschicht auch die Körpertheilchen mit zu Schwingungen fortgerissen werden**), und in dem Momente***), wo diess geschieht, springt ein Funken über†), werden die elektrischen Schwingungen sichtbar††). Da aber durch das Ueberspringen des Funkens, gerade wie bei jeder andern Fortpflanzung durch Leitung, auf dem ursprünglich elektrischen Körper die elektrische Spannung vermindert wird, so ist nach dem Ueberspringen des Funkens die Zwischenschicht für die noch vorhandene elektrische Spannung zu dick, die Mittheilung der Elektricität dadurch unterbrochen, und es müssen die beiden Kör-

---

von Folgepunkten an elektrischen Körpern ist indessen noch zu wenig studirt, als dass wir hier weiter darauf eingehen möchten. Doch mag nicht unerwähnt bleiben, dass das Auftreten von Folgepunkten, wenn es sich nicht als eine durch die Natur der Nichtleiter bedingte Eigenthümlichkeit derselben darstellen lässt, aus der Undulationstheorie etwas schwierig zu erklären zu sein scheint und der gleich zu entwickelnden Ansicht über die elektrische Vertheilung widerspricht. — Bei den (Lippen-) Pfeifen finden wir, dass die Stärke des Hauchs und die Dimensionen der Mündung ein Schwingen in Unterabtheilungen herbeiführen können (Pouillet, übersetzt von Palmieri III, § 344, S. 104) und es sind dort die als Ganzes schwingenden Theile um so kleiner, je höher der Ton ist.

*) Aehnlich beim Magnetismus; Pouillet, übersetzt von Palmieri II § 161, S. 140: „Ein Eisencylinder von einem Magnet getragen, ist in Wirklichkeit selbst ein Magnet, zieht daher Eisenfeilspäne an und hat eine Indifferenzone und zwei Pole; die Indifferenzzone liegt indess nicht in der Mitte."

**) Dass in der Zwischenschicht sich stehende Wellen erzeugen, ist wenig wahrscheinlich, weil ja die aus der isolirenden Zwischenschicht zum Leiter gelangenden elektrischen Aetherschwingungen sich in diesem leichter fortpflanzen können.

***) Auch bei chemischen Wirkungen, die von Lichtentwickelung begleitet sind, dauert die letztere nur einen Moment.

†) Bei der Voltaischen Elektricität entwickelt sich das Licht nur, wenn sich die beiden Pole berührten und dann von einander getrennt werden (Trennungsfunken); ohne stattgehabte Berührung jedoch bei kleinem Abstande auch, wenn man vorher einen Funken aus einer Leydner Flasche durchgehen lässt. In beiden Fällen befördert und erleichtert also die schon vorhandene Bewegung im isolirenden oder doch mindestens weniger gut leitenden Mittel die Annahme der elektrischen Schwingungen. Nicht gleichgültig als Prüfstein für die Theorie ist die Gestalt und Richtung des Funkens nach dem früher Gesagten.

††) Aehnlich ist der Vorgang bei der Fluorescenz, vergl. Ettingshausen, die Principien der heutigen Physik, S. 13; hier in Licht umgesetzte Elektricität, dort in sichtbares Licht umgesetztes unsichtbares Licht.

per sich einander genähert werden, damit ein zweiter Funken überspringe, ein Nachschlag erfolge u. s. f.

Da die Wirkung in die Ferne bei der gestrahlten Elektricität dem Quadrate der Entfernung umgekehrt proportional ist, so muss die Intensität der auf *U* durch Vertheilung erzeugten Elektricität ausser von der Intensität der Elektricität auf *E* zunächst von der Entfernung abhängen, in welcher sich *U* von dem influenzirenden Körper *E* befindet. Je weiter *U* von *E* entfernt ist, desto schwächer ist der Anstoss, welchen die *E* zunächst liegenden Theilchen des influenzirten Körpers *U* überhaupt erhalten. Von der Gestalt, Beschaffenheit und Grösse des Körpers *U* hängt es dann ab, in welcher Weise und Stärke sich jener erste Anstoss weiter fortpflanzt und verbreitet.

Wir setzen also nicht erst auf den influenzirten Körper *U* ein ursprüngliches und gleichzeitiges Auftreten beider*) Elektricitäten voraus, um dann wieder die entgegengesetzte in dem *E* zugewandten Ende, weil sich ja durch kein Mittel ihre Anwesenheit nachweisen lässt, durch die Elektricität auf *E* binden zu lassen und ihr selbst die Bindung eines Theiles der auf *E* befindlichen Elektricität aufzutragen, um daraus zu erklären, warum *E* auf dem nach *U* gewandten Ende jetzt weniger stark elektrisch ist, und warum *E* nicht vollständig entladen werden kann, so lange *U* rückwärts darauf einwirkt**). Will man *E* entladen, so wird es ja gleich von *U* aus wieder durch Vertheilung geladen. Wohl aber kann auf *U* die gleichnamige Elektricität am abgewendeten Ende abgeleitet d. h. die ursprüng-

---

*) Das Auftreten beider Elektricitäten konnten wir gar nicht einmal beibehalten, weil wir vergeblich nach einem Grunde für das Auftreten der entgegengesetzten Schwingungsweise am zugewandten Ende und für das Umspringen derselben wieder in die gleichnamige Schwingung am abgewandten Ende suchten, und auch nirgends in dem weiten Gebiete der Lehre von den Schwingungen ein Analogon für diese Erscheinung fanden, ausser etwa den von Poisson nachgewiesenen Verlust einer Wellenlänge bei Grenzübergängen. Auch hier ist Robida anderer Ansicht, und die von ihm versuchte Erklärung spricht wirklich für das Auftreten beider Influenzelektricitäten; unsere Zweifel und Bedenken gegen seine Beweisführung werden wir ein ander Mal begründen. — Das Abweichende bei der magnetischen Vertheilung werden wir später zu erklären versuchen. — Nach den Mittheilungen von Faraday (vergl. Philos. Magazine Ser. IV vol. IX, p. 161 und daraus übersetzt in der Zeitschrift des deutsch-österr. Telegraphen-Vereins II 5, S. 103) hielt auch Melloni eine Modification des Fundamentaltheorems der elektrischen Vertheilung für nöthig „in dem Sinne, dass 2 durchaus verschiedene Wirkungen auseinander gehalten werden — der elektrische Zustand während der Vertheilung und der nach der Berührung und Entfernung von dem inducirenden Körper. Wir kennen den Vorgang im letztern Falle, nicht aber im erstern etc.“ Auch glaubte Melloni, dass die Resultate, zu denen Coulomb, Poisson und Andere ihrer Zeit gelangten, mit den wahren Naturgesetzen nicht in Einklang stünden.

**) Wenn man *E* ableitet, so sollte doch wohl (was ja auch bei der gänzlichen Entfernung von *E* geschieht) die Influenzelektricität erster Art auf dem *E* zugewandten Ende des Körpers *U* sich eher mit der gleichstarken Influenzelektricität zweiter Art auf dem abgewandten Ende ausgleichen, als mit der entfernteren auf *E*, welche letztere dann ungestört abfliessen könnte.

lich von $E$ ausgegangene Wirkung noch weiter fortgepflanzt werden. Dabei verschwinden die Schwingungen in $U$, während $E$ seiner Elektricität durch die Ableitung von $U$ nicht beraubt wird, weil es von $U$ durch einen Nichtleiter getrennt ist, also bloss durch Strahlung auf $U$ einwirkt, wobei, wie wir bereits festgestellt haben, nur wenig Schwingungsmoment verbraucht wird. Wird $E$ entfernt, so stellt sich in beiden Fällen mit dem Aufhören des störenden Einflusses auf $U$ das frühere Gleichgewicht wieder her; wurde aber zugleich mit der Entfernung von $E$ auf $U$ die Ableitung aufgehoben, so erscheint auf $U$ als Reaction die entgegengesetzte Elektricität, weil der durch die Wechselwirkung der Körper- und Aethertheilchen im ganzen abgeleiteten Systeme und durch die Anwesenheit und Wirksamkeit von $E$ bedingte und erhaltene Beharrungszustand mit der Entfernung des Körpers $E$ nothwendig unterbrochen und durch die in dem gleichzeitig durch Aufhebung der Ableitung verkürzten Systeme noch wirksam bleibenden Antriebe ein anderer Beharrungszustand herbeigeführt werden muss.

Versuchen wir gleich eine Anwendung des eben Vorgetragenen zur Erklärung der Vertheilungserscheinungen beim Condensator (Leydner Flasche) und dem Elektrophor. Die Erklärung der Wirkung des Condensators und der Leydner Flasche zunächst ist schon fast vollständig in dem Vorhergehenden enthalten und gestaltet sich sehr einfach (Fig. 7). Wird der leitende Deckel $d$ mit einem elektrischen Körper $k$ berührt, so wird er durch Mittheilung elektrisch und seine Elektricität elektrisirt durch die isolirende Zwischenschicht $z$ durch Strahlung die Basis $b$ und zwar bekommt die Basis durchweg dieselbe Elektricität wie der Deckel. Das Ganze: $k$, $d$, $z$, $b$ bildet nur ein elektrisches System. Wird dagegen $b$ ableitend berührt, so führt die Wechselwirkung der Theilchen und die gleichzeitige Einwirkung von $d$ auf $b$ einen Zustand der Beharrung herbei, in welchem $b$, so lange $d$ anwesend bleibt, unelektrisch erscheint, aber entgegengesetzt elektrisch wird, sobald $d$ entfernt wird. Rückwärts wirkt aber auch $b$ in seinem durch die Ableitung modificirten Zustande auf $d$ ein und auch auf $d$ entsteht dadurch, so lange es in der Nähe von $b$ befindlich ist, ein Zustand des Gleichgewichts, welcher $d$ befähigt, bei einer neuen Berührung mit dem nicht stärker als früher elektrisirten Körper $k$ von diesem eine neue Quantität Elektricität, einen neuen Theil seines Schwingungsmomentes zu übernehmen. So wirkt das Ganze als Condensator. Dass nach der Ableitung von $b$ der Zustand sowohl in $b$ als in $d$ ein erzwungener und wechselseitiger ist, deutet die Heftigkeit an, mit welcher die Ausgleichung zwischen beiden erfolgt, sobald man $b$ und $d$ leitend verbindet. Durch eine solche Verbindung wird $d$ seines Schwingungsmomentes beraubt und dieses dazu verwendet, um auf $b$ das Gleichgewicht herzustellen, welches ja durch eine von $d$ ausgegangene, also dessen Elektricität äquivalente Wirkung gestört worden war. — Beim Elektrophor ist der ursprünglich elektrische Körper selbst ein Isolator, nämlich der durch Reiben

mit dem Katzenfell negativ elektrisch gemachte Harzkuchen, welcher den Deckel und die Schüssel bei unmittelbarer Berührung durch Mittheilung und bei mittelbarer durch Vertheilung elektrisch macht. Zudem spielen hier auch Deckel und Schüssel keineswegs genau dieselbe Rolle, als der Deckel und die Basis des Condensators. Die mit dem Katzenfell geriebene Fläche des Harzkuchens ist negativ elektrisch; setzt man den Deckel auf, so wird er ebenfalls negativ elektrisch, so lange er auf dem Kuchen ruht; auch kann er als guter Leiter diese negative Elektricität weiter geben, und wenn er nach einer ableitenden Berührung von dem Kuchen abgehoben und zugleich die Berührung aufgehoben wird, so zeigt er sich positiv elektrisch. Dasselbe geschieht in der Schüssel oder Form, nur wirkt hier die auf der Oberfläche des Harzkuchens geweckte Elektricität aus grösserer Ferne und vorzugsweise durch Vertheilung; die Elektricität der Schüssel ist desshalb weniger intensiv. Werden daher in diesem Falle Deckel und Schüssel, ohne vorher ableitend berührt worden zu sein, leitend verbunden, so entsteht zwischen ihnen, obwohl sie gleichnamig elektrisch sind, ein Strom, durch welchen der Ueberschuss des Deckels der Schüssel zu Gute kommt.

An die Influenzerscheinungen schliessen sich eng die Inductionserscheinungen an. Die Induction steht genau in demselben Verhältnisse zu der dynamischen (bewegten) Elektricität, in welchem die Influenz zur statischen Elektricität steht*), und offenbart sich ungeschlossenen Leitern durch eintretende Spannungserscheinungen, während in geschlossenen Leitern momentane Ströme hervorgerufen werden. Indem wir übrigens an dem schon früher über die Induction Ausgesprochenen festhalten, haben wir hier bloss noch die Richtung der Inductionsströme aus der bisher entwickelten Ansicht über die Influenz herzuleiten. Stellen wir uns parallel zu dem Leiter $AB$ (Fig. 8) ein Stück $CD$ eines anderen geschlossenen Leiters vor und lassen durch $AB$ plötzlich sich Elektricität in der Richtung von $A$ nach $B$ bewegen; ist z. B. diese Elektricität in $a$ angekommen**), so stört sie das elektrische Gleichgewicht in $CD$ und zwar erhält das zunächst liegende Element $a_1$ den stärksten Anstoss, die entfernteren schwächere. Die dadurch in diesem Elemente entstehenden gleichsinnigen Schwingungen (gleichnamige Elektricität) haben das Bestreben sich nach beiden Seiten hin fortzupflanzen, allein nur in der Richtung nach $C$ können sie es ungehindert; in der Richtung nach $D$ stossen sie bereits auf die — durch das inzwischen erfolgte Auftreten der Elektricität in $b$ — in $b_1$ erzeugten, wegen der gleichen Entfernungen ($aa_1 = bb_1$ etc.) gleich starken, sich in der Richtung nach $C$ fortpflanzenden Schwingungen und werden von ihnen vernichtet; ebenso die von $b_1$ nach $D$ sich fortpflanzenden Schwin-

*) Doch muss nach S. 13 auch bei der Influenz meist schon ein Strom auftreten.

**) $a$ gelte als das erste Theilchen in $AB$, von welchem eine merkliche Einwirkung auf $CD$ erfolgt.

gungen durch jene, welche von $c$ aus in $c_1$ hervorgerufen wurden und sich gegen $C$ hin fortpflanzen wollen. Ein gleiches Resultat liefert die Einwirkung von $a$ auf $b_1$, von $b$ auf $c_1$ u. s. w.; von $a$ auf $c_1$, $b$ auf $d_1$ u. s. w. So bleiben in $CD$ beim Beginn des Stromes in $AB$ die in der Richtung nach $C$, beim Aufhören des Stromes, die in der Richtung nach $D$ sich fortpflanzenden Schwingungen übrig; erstere geben einen Strom in entgegengesetzter, letztere einen in gleicher Richtung mit dem in $AB$. Ist der Strom in $AB$ nicht momentan, sondern dauernd, so vernichten sich, so lange er unverändert bleibt, in $CDE$ die gleichzeitig in den Richtungen nach $C$ und nach $D$ fortgepflanzten Schwingungen. Bewegen sich endlich entgegengesetzte Elektricitäten in $AB$ in entgegengesetzter Richtung, so ist auf jede das eben Gesagte anzuwenden und der Erfolg genau derselbe.

Sind zwei elektrische Körper durch einen Leiter verbunden, so streben sie sich durch denselben hindurch ihre Antriebe zu Schwingungen mitzutheilen, genau in derselben Weise, als wenn sie sich unmittelbar berührten. Haben beide dieselbe Schwingungsweise, so findet bei der eintretenden Ausgleichung jeder in dem andern den Zustand schon vorhanden, den er selbst hervorrufen würde, und es vertheilt sich höchstens bei ungleicher Intensität der Schwingungen der einseitige Ueberschuss gleichmässig über das ganze System, in kürzerer oder längerer Zeit je nach der Leitungsfähigkeit der beiden elektrischen Körper. Haben beide Körper entgegengesetzte Elektricitäten, so findet jeder in dem andern den entgegengesetzten Zustand von dem, welchen er hervorrufen möchte, und es kommt jetzt auf die Stärke der Antriebe an; sind sie gleichstark, so müssen sie sich in ihren Wirkungen aufheben und keiner der beiden Körper zeigt sich nach der Vereinigung elektrisch; sind die Antriebe von verschiedener Stärke, so bleibt von dem stärkern ein Ueberschuss und vertheilt sich wiederum über das ganze System. Sind zwei gleichnamig elektrische Körper durch einen Nichtleiter getrennt, so lassen sich beide ebenfalls als ein einziges System betrachten, bei welchem sich wieder die Wirkung nach aussen z. B. auf ein Elektroskop an den beiden abgewandten Enden am stärksten zeigt, für welche sämmtliche wirksame Theilchen auf derselben Seite liegen, während sie für jeden mittlern Punkt zu beiden Seiten desselben vertheilt sind. Umgekehrt ist die Wirkung bei ungleichnamigen Elektricitäten, deren Wirkungen entgegengesetzt sind, also sich zum Maximum summiren müssen, da, wo sie nach entgegengesetzten Richtungen wirken d. h. an den einander zugewandten Enden der beiden entgegengesetzt elektrischen Körper. Die Schlagweite wird in diesem Falle weit grösser sein, weil ja die von beiden Seiten her kommenden Wirkungen auf den Nichtleiter sich gegenseitig unterstützen. Die Grösse der Schlagweite für einen elektrischen und einen nicht elektrischen Körper muss ferner in der Mitte liegen zwischen jenen beiden für zwei schon ursprünglich gleichnamig und für zwei entgegengesetzt elektrische Körper, da bei gleichnamig elektrischen Körpern die in

der S. 145 angedeuteten Weise zur Wirkung gelangende Differenz kleiner sein muss, als wenn der eine Körper ursprünglich unelektrisch war. Setzen wir nämlich voraus, dass die durch Influenz erzeugte Intensität $= \frac{1}{n}$ von der influenzirenden sei, und haben die beiden gleichnamig elektrischen Körper $A$ und $B$ die entsprechenden Intensitäten $a$ und $b$, so influenzirt $A$ auf $B$ mit $\frac{a}{n}$, $B$ auf $A$ mit $\frac{b}{n}$; diese Intensitäten zu den ursprünglichen gerechnet*), giebt am zugewandten Ende und bei guten Leitern von geeigneter Form überall

$$\text{auf } A \text{ die Intensität } A = a + \frac{b}{n}$$

$$\text{- } B \text{ - } \quad \text{ - } \quad B = b + \frac{a}{n}$$

$$\text{Differenz der Intensitäten } \varDelta = a + \frac{b}{n} - \left(b + \frac{a}{n}\right)$$

$$= \left(1 - \frac{1}{n}\right)(a - b) = \frac{n-1}{n}(a - b).$$

Um die Differenz positiv zu erhalten, setzen wir allgemein $a > b$, was offenbar erlaubt ist. $a = b$ giebt $\varDelta_0 = 0$; in diesem Falle wird auch kein Funken überspringen. Aus dem Falle $a > b$ erhalten wir den Fall der einfachen Influenz, wenn wir $b = 0$ setzen, und dann ist die Differenz der Intensitäten $\varDelta_1 = \frac{n-1}{n} a$; da aber $\varDelta : \varDelta_1 = \frac{a-b}{a} < 1$, so ist $\varDelta < \varDelta_1$. Für den Fall, dass die beiden Körper entgegengesetzt elektrisch wären, also der eine positiv, der andere negativ elektrisch, hätten wir nur $b$ negativ zu nehmen und finden dann die Differenz der Intensitäten $\varDelta_2 = \frac{n-1}{n}(a + b)$; da aber $\varDelta_1 : \varDelta_2 = \frac{a}{a+b} < 1$, so ist $\varDelta_1 < \varDelta_2$ und allgemein:

$$\varDelta < \varDelta_1 < \varDelta_2.$$

Somit kann auch für $\varDelta_2$ die Zwischenschicht am dicksten sein. Wir kommen also auch ohne die Influenzelektricität der ersten Art auf das vorstehende allgemeine Gesetz. Da $n$ aus der Rechnung wegfällt, so brauchen wir für den vorliegenden Zweck auf seine Bestimmung gar nicht weiter einzugehen.

Aehnlich verhält es sich beim Magnetismus, nur dass hier die Leitung wegfällt, also bloss Aetherschwingungen vorhanden zu sein scheinen. Häcker fand, dass bei der Wirkung eines Magnetes auf einen andern der Erfolg wesentlich von einem „Qualitätscoefficienten der Masse der Magnete" abhinge. Dieser Coefficient ist für uns der Ausdruck für das Verhältniss der anziehenden oder abstossenden Wechselwirkung zwischen den Massen

---

*) $a$ additiv wegen der S. 145 aufgestellten Ansicht; desswegen muss zugleich $n$ eine positive Zahl sein; übrigens ist auch jedenfalls $\infty > n > 1$, weil sonst bei der Influenz die Schlagweite $= 0$ sein müsste; in $n$ steckt auch der Einfluss der Entfernung zwischen $A$ und $B$, vergl. S. 145.

und Aetherthheilchen. Je stärker diese Wechselwirkung ist, desto leichter können sich zwar die Schwingungen eines Theilchens über den ganzen Körper verbreiten, in desto kürzerer Zeit müssen sie aber auch nach dem Aufhören der Einwirkung von aussen, durch welche sie eben in Schwingungen versetzt wurden, wieder zur Ruhe gelangen. So paart sich die schwerere Annahme des Magnetismus ganz naturgemäss mit dessen längerer Dauer, und es stellen sich die permanenten Magnete auf gleiche Stufe mit den die Elektricität gleichfalls auf längere Zeit behaltenden Nichtleitern der Elektricität; wird ja doch ihr Zusammengehören durch den jetzt leicht erklärlichen Umstand angedeutet, dass der mit stärkerer Coercitivkraft begabte Stahl besser durch Reibungselektricität elektrisirt wird, welche, wie wir schon sahen, besonders durch Nichtleiter erregt wird. Wenn nun in einem an sich zwar starken Magnete die Wechselwirkung zwischen den Massen- und Aethertheilchen ein Ummagnetisiren, ein Umkehren der Pole leicht zulässt, so kann dasselbe selbst durch einen übrigens schwächern Magnet bewirkt werden, und darin eben besteht Häcker's „Einwirkung eines Magnetes in die Masse eines andern" (vergl. P. W. Häcker, zur Theorie des Magnetismus, S. 185 und 191).

Nachdem wir bis jetzt das Verhalten der elektrischen Körper in Bezug auf die specifisch elektrischen Erscheinungen betrachtet haben, müssen wir noch einen Blick auf die Veränderungen werfen, welche durch die Elektricität in den Aeusserungen der Molekularkräfte der elektrischen Körper hervorgebracht werden. Als Ursache aller dieser Veränderungen möchten wir die Bewegung der Theilchen bezeichnen, also geradezu und unmittelbar die elektrischen Schwingungen. Wie durch die Wärme oder das Licht nicht selten Veränderungen in der Structur und Krystallform im Innern fester Körper herbeigeführt werden, so ändert sich auch im elektrischen Zustande und durch ihn die Anordnung der Körpertheilchen. So werden Stromleiter mit der Zeit spröde und brüchig*); häufig überwindet die Elektricität sogar die Cohäsion und löst den Zusammenhang. Wie ein leeres Glas auf dem heissen Ofen springt, wenn seine Theilchen nicht schnell und leicht genug die Wärmeschwingungen aufnehmen und weiter geben können**), so zertrümmert ein hinreichend kräftiger elektrischer Schlag die Nichtleiter, durch welche er sich Bahn bricht. An Leitern zeigen sich diese zerstörenden Wirkungen um so weniger, je leichter die Theilchen der Anregung zu Schwingungen folgen können. Wohl aber beobachtete man wiederholt an Blitzableitern, an denen heftige Blitze niedergingen, eine spiral-

*) Etwas Aehnliches finden wir bei den eisernen Wagenachsen, deren Festigkeit ausser den Stössen noch durch die Verdrehung bei der rotirenden Bewegung in Anspruch genommen wird.

**) Dessgleichen bei zu schneller Abkühlung des Glases. — Ausdehnung und Zusammenziehung durch die Wärme.

förmige Drehung*), ein Umstand, welcher auf die Beschaffenheit der elektrischen Schwingungen hindeuten dürfte**).

Ferner verstärkt oder schwächt der elektrische Strom die chemische Anziehung zwischen den Atomen eines und desselben oder auch verschiedener Körper und befördert oder hindert so chemische Zersetzungen und Verbindungen. Die Zersetzungen erfolgen nach den von Faraday aufgestellten Gesetzen mit solcher Regelmässigkeit und Gleichförmigkeit, dass Jacobi sogar als Maasseinheit für die elektrischen Ströme jenen Strom vorschlug, der in einer Minute ein Kubikcentimeter Knallgas liefert. Dennoch ist aber die Art und Weise, wie eigentlich der elektrische Strom chemisch wirkt, noch in ein tiefes Dunkel gehüllt. Da indessen Licht und Wärme ebenfalls chemisch wirken***), und beim Lichte wieder die stark brechbaren, am schnellsten schwingenden Stocker'schen Strahlen am besten, so liegt die Vermuthung gewiss nicht ferne, dass gerade das Bewegtsein und die Fortpflanzung des Bewegtseins auch die chemische Wirkung herbeiführt, indem es die Beschaffenheit †), Lage und Anordnung der Theilchen abändert. Veranlasst doch in einigen Fällen schon ein gewöhnlicher Stoss, eine Erschütterung des einschliessenden Gefässes eine chemische Wechselwirkung oder eine Krystallisation ††).

---

*) Aehnlich selbst an weniger guten Leitern; vergl. u. A. Zeitschrift des deutsch-österr. Telegraphen-Vereins II 10, S. 230 und 231: „Es zeigten sich dabei dieselben Erscheinungen, welche auch schon mehrfach beobachtet worden: das elektrische Fluidum ging meist aus der Leitung längs den Stangen in spiralförmigen Bahnen zur Erde, indem es die Stangen selbst bald spaltete oder gänzlich zersplitterte, bald nur spiralförmige Splitter aus denselben herausriss.“

**) Die weitere Ausführung davon folgt später S. 45. Hier nur eine Stelle aus Becquerel, traité de physique, I p. 70: „von Marum hatte beobachtet, dass sich die Länge eines Metalldrahtes von kleinem Durchmesser verkürzt, wenn man eine Leydner Flasche durch ihn entlädt; diess bestätigend erkannte Edmund Becquerel, dass der Draht einen welligen Zustand annahm (affectait une disposition ondulée), welcher anzudeuten scheint, dass die Elektricität in einer Art Wellenbewegung durch den Draht geht. Eine ähnliche Wirkung war an Glockensträngen beobachtet worden, welche der Blitz durchlaufen hatte.“

***) Robida sagt S. 17 der Vibrationstheorie: „Alle sogenannten chemischen Wirkungen des Lichts, darunter auch die Photographie, halte ich für Wirkungen der durch das Licht geweckten Elektricität. Zur Photographie präparirtes feuchtes Papier wurde zwischen zwei Platindrähte, welche die Pole des elektrischen Stroms vorstellten, gelegt, und es schwärzte sich in kurzer Zeit am intensivsten zwischen den Polen, schwächer seitlich von diesen wie von verfliessender schwarzer Tinte. Nach Unterbrechung des Stroms wurde ein einziger dieser Platindrähte auf das präparirte Papier gebracht, und er schwärzte es noch merklich; dagegen zeigte ein anderer im elektrischen Strome nicht gebrauchter Platindraht keine Einwirkung auf das Papier. Demnach haben die elektrischen Schwingungen im Drahte schwach fortgedauert. Die Versuche, welche Grove in Pogg. Annalen B. 100, S. 345 erzählt, scheinen meine Ansicht zu bestätigen.“ — Wir tragen diess nur als ein weiteres Beispiel für die Analogie zwischen den Wirkungen des Lichtes und der Elektricität nach; bei der obigen Anschauungsweise brauchen wir wenigstens nicht unsere Zuflucht zu einer so verwickelten und unklaren Hypothese über die Elektrochemie zu nehmen, wie Robida, der uns hier obendrein den Beweis dafür schuldig bleibt, wie die transversalen Lichtschwingungen longitudinale elektrische Schwingungen wecken.

†) Ueberführung des Sauerstoffs in Ozon durch Elektricität.

††) Nach Plücker nehmen auch die krystallinischen Axen bei der Krystal-

Endlich ändert sich im elektrischen Zustande auch die gegenseitige Anziehung oder Abstossung der verschiedenen Körpern angehörigen Massentheilchen. Die Ursache dieser Anziehung oder Abstossung wäre also keine neu hinzukommende Kraft*), sondern die in der Wirkungsweise der den Massentheilchen inne wohnenden anziehenden Kräfte eintretenden Veränderungen, welche eben durch den eigenthümlichen Zustand der Bewegung herbeigeführt werden, in welchem sich die Massentheilchen befinden**). Werden zwei (leichte) Körper gleichnamig elektrisirt, so streben sie sich von einander zu entfernen, stossen sich gegenseitig ab und werden auch von der Elektricitätsquelle abgestossen. Elektrisirt man dagegen das eine Körperchen positiv, das andere negativ, so ziehen sie sich gegenseitig an und streben sich gegen einander zu bewegen. Daraus floss das Gesetz: gleichnamige Elektricitäten stossen sich ab, entgegengesetzte ziehen sich an. Nun zieht ein elektrischer Körper jeden andern, auf welchem er durch Influenz Elektricität erzeugte, an, und desshalb setzte man auf demjenigen Ende des influenzirten Körpers, welches dem influenzirenden zugewandt ist, die entgegengesetzte Elektricität (als Influenzelektricität erster Art) voraus, nannte sie aber gebunden, weil sie sich nicht durch das Elektroskop nachweisen lässt. Da wir jedoch auf dem ganzen influenzirten Körper bloss die Erzeugung der gleichnamigen Elektricität annehmen konnten (vergl. S. 145); so nahmen wir dadurch zugleich dem Gesetze der elektrischen Anziehung und Abstossung seine Allgemeinheit. Indessen, wenn wir somit auch gezwungen sind, ein nicht unter allen Umständen gleiches Verhalten zweier mit Elektricität behafteter Körper voraus zu setzen, wenn wir dabei unterscheiden müssen, ob die Elektricität auf dem zweiten von dem ersten durch Vertheilung oder durch Mittheilung erzeugt wurde: so sind wir desswegen nicht etwa schlimmer daran, als die Dualisten, welche — um gerade bei aufrecht erhaltener Allgemeinheit des Anziehungsgesetzes zu erklären, wesshalb die positive und negative Elektricität einer galvanischen Säule sich trotz ihrer so starken Anziehung nicht über die elektricitäterregende Berührungsfläche vereinigen, während sie sich doch so leicht und mit so grosser Heftigkeit durch den Schliessungsbogen vereinigen — eben jene Berührungsfläche zwischen den beiden sonst recht gut leitenden Elektromotoren zu einer für die diesseits und jenseits abgelagerte Elektricität unüberspringbaren***) Grenze machen. Die Ursachen, welche das verschie-

---

lisation im magnetischen Felde eine bestimmte Lage gegen die magnetischen Pole an.

*) Nach der dualistischen Theorie ist diese Kraft vertreten durch die sich anziehenden oder abstossenden Fluida.

**) Ueber eine durch die Wärme hervorgerufene anziehende und abstossende Kraft vergl. Zantedeschi, trattato di fisica II, I S. 285ff.

***) Vergl. Pouillet, übersetzt von Palmieri II § 220, S. 297: „ohne je die Grenze überspringen und sich vermöge ihrer wechselseitigen Anziehung vereinigen zu können.“ — Wer erinnert sich dabei nicht an den abenteuerlichen Glau-

dene Verhalten in den einzelnen Fällen bedingen, sind freilich noch aufzusuchen und werden sich vielleicht in dem verschiedenen Verhalten der Leiter und Nichtleiter gegen die Elektricität, in den verschiedenen Wechselbeziehungen zwischen Aether- und Körpertheilchen finden lassen. Namentlich dürfte das Verhalten des zwischenliegenden Nichtleiters in Folge der auf ihn ausgeübten Einwirkung massgebend sein; S. 150 fanden wir ja $\varDelta < \varDelta_1 < \varDelta_2$ und es fällt

$\varDelta_2$ zusammen mit kräftiger Anziehung zwischen zwei entgegengesetzt elektrischen Körpern,

$\varDelta_1$ zusammen mit schwächerer Anziehung zwischen dem influenzirenden und influenzirten Körper,

$\varDelta$ zusammen mit Abstossung zwischen ursprünglich gleichnamig elektrischen Körpern.

Den Uebergang aber von der Abstossung zur Anziehung würde ein einfacher Zeichenwechsel in der Resultante der Abstossung andeuten. Ueberdiess steht jene Erscheinung auch keineswegs vereinzelt da; denn abgesehen davon, dass der Magnetismus nicht auf alle Substanzen in gleicher Art wirkt, sondern man paramagnetische und diamagnetische Substanzen unterscheiden muss, begegnen wir in der Elektrodynamik bei den Ampère'schen Gesetzen demselben Gegensatze nochmals und unter denselben äusseren Bedingungen in Bezug auf einen zwischenstehenden oder nicht zwischenstehenden Nichtleiter. Während sich nämlich die successiven Theile desselben Stromes abstossen, ziehen sich zwei parallele gleichgerichtete Ströme an*).

---

ben an einen — jedoch nur bis zu einer gewissen Höhe über der Erdoberfläche hinaufreichenden — horror vacui der Natur, wie er vor Torricelli gelehrt wurde? Bei der Annahme der Undulationstheorie hilft uns wohl der Satz von Fresnel über diese Schwierigkeit: dass bei von einem Punkte ausgegangenen Wellen eine Rückwirkung, eine Rückkehr nur da stattfinden kann, wo eine Verschiedenheit der Dichte und Elasticität vorhanden ist (Pouillet, übers. von Palmieri III § 437, S. 313). Die elektrischen Wellen entstehen aber in der Berührungsfläche selbst.

*) Hier wie dort sehen wir durch Mittheilung gleichnamig elektrische Theilchen sich entschieden abstossen. Die Abstossung zwischen zwei Theilchen wird proportional sein dem Produkte der Intensitäten beider Theilchen und umgekehrt proportional dem Quadrate der Entfernung. Dürfen wir nun annehmen, dass die S. 150 gefundene Differenz der Intensitäten der beiden elektrischen Körper $A$ und $B$ nicht allein die Einwirkung auf den zwischenliegenden Isolator $N$ bestimmen, sondern zugleich als Maass für die elektrische Intensität auf dem ganzen Isolator zu gelten habe, so ist

auf $A$ die Intensität $A = a + \frac{b}{n}$

" $B$ " " $B = b + \frac{a}{n}$

" $N$ " " $\varDelta = a + \frac{b}{n} - b - \frac{a}{n}$

Stellen wir uns nun $A$ und $B$ als elektrische Punkte von der Masse 1 vor, ist ihre Entfernung $= e$ und ist $k$ die abstossende Kraft zwischen 2 gleichnamig elektri-

**Warum ein nicht elektrischer Körper zwischen zwei gleichstarken gleichnamig oder ungleichnamig elektrischen Körpern und ein elektrischer**

---

schen Körpern von der Masse 1 und der Intensität 1 in der Entfernung 1, so wird $B$ von $A$ abgestossen mit der Kraft

$$R = AB\frac{k}{e^2} = \left[ab + \frac{a^2+b^2}{n} + \frac{ab}{n^2}\right]\frac{k}{e^2}.$$

Ein Theilchen in $N$ von der Masse $du$ in der Entfernung $u$ von $B$ stösst $B$ ab mit der Kraft $p = B\varDelta k\frac{du}{u^2}$, und die Summe aller Abstossungen der Theilchen von $N$ gegen $B$ ist:

$$P = \Sigma B\varDelta k\frac{du}{u^2} = B\varDelta k\Sigma\frac{du}{u^2} = B\varDelta S;\ S = k\Sigma\frac{du}{u^2};\ \infty > S > 0$$

$$= \left[ab - b^2 + \frac{a^2 - 2ab + b^2}{n} + \frac{ab}{n^2} - \frac{a^2}{n^2}\right]S.$$

Die Summe $P = R + P$ ist die Totalkraft, mit welcher $B$ abgestossen wird. Betrachten wir die Summanden etwas näher in den schon S. 150 herausgegriffenen Fällen:

1) $b = a$ liefert: $R_0 = \left(a^2 + \frac{2a^2}{n} + \frac{a^2}{n^2}\right)\frac{k}{e^2} = \left(1+\frac{1}{n}\right)^2\frac{a^2k}{e^2} > 0$

$$\frac{P_0 = 0}{P > 0}$$

d. h. die Abstossung wird nicht $= 0$, wenn auch $\varDelta_0 =$ war.

2) $b = 0$ liefert:

$$R_1 = \frac{a^2}{n}\cdot\frac{k}{e^2};\ \frac{R}{R_1} = \frac{n^2ab + n(a^2+b^2) + ab}{na^2} = 1 + \frac{n^2ab + nb^2 + ab}{na^2} > 1;\ R > R_1$$

$$P_1 = \left(\frac{a^2}{n} - \frac{a^2}{n^2}\right)S = \frac{a^2}{n}\left(1 - \frac{1}{n}\right)S;\ P - P_1 = \left(ab - b^2 - \frac{2ab}{n} + \frac{b^2}{n} + \frac{ab}{n^2}\right)S$$

$$= \left[ab\left(1 - \frac{1}{n}\right)^2 - b^2\left(1 - \frac{1}{n}\right)\right[S = \left(1 - \frac{1}{n}\right)\left[a\left(1 - \frac{1}{n}\right) - b\right]bS$$

So lange in $P$ der Werth $b < \left(1 - \frac{1}{n}\right)a$ ist, ist also $P > P_1$ und bestimmt $P > P_1$. Da aber $R$ so beträchtlich grösser ist, als $R_1$, so dürfte wohl allgemein $P > P_1$ d. h. die Abstossung bei blosser Influenz geringer sein, als wenn $B$ gleichnamig elektrisch mit $A$ ist.

3) $b = -b$ liefert:

$$R_2 = \left(\frac{a^2+b^2}{n} \cdot ab - \frac{ab}{n^2}\right)\frac{k}{e^2};\ R - R_2 = \left(2ab + \frac{2ab}{n^2}\right)\frac{k}{e^2} > 0;\ R > R_2$$

$$R_1 - R_2 = \left(-\frac{b^2}{n} + ab + \frac{ab}{n^2}\right)\frac{k}{e^2} > 0;\ R_1 > R_2$$

$$\frac{n > 1;\ a > b}{ab > \frac{ab}{n} > \frac{b^2}{n}} \qquad \frac{R > R_1}{R > R_1 > R_2}$$

$$P_2 = \left(-ab - b^2 + \frac{a^2 + 2ab + b^2}{n} - \frac{ab}{n^2} - \frac{a^2}{n^2}\right)S$$

$$P - P_2 = \left(2ab - \frac{4ab}{n} + \frac{2ab}{n^2}\right)S = 2ab\left(1 - \frac{1}{n}\right)^2 S > 0;\ P > P_2$$

$$P_1 - P_2 = \left(ab + b^2 - \frac{2ab}{n} - \frac{b^2}{n} + \frac{ab}{n^2}\right)S$$

$$= \left[ab\left(1 - \frac{1}{n}\right)^2 + b^2\left(1 - \frac{1}{n}\right)\right]S > 0;\ P_1 > P_2.$$

zwischen zwei gleichstarken unter sich gleichnamigen weder angezogen, noch abgestossen wird, während ein elektrischer zwischen zwei unter sich ungleichnamig elektrischen Körpern mit der Summe der beiden Wirkungen abgestossen oder angezogen wird, das erklärt sich jetzt von selbst aus der Wirkungsweise gleicher oder entgegengesetzter Kräfte, deren Wirkungsrichtungen in dieselbe gerade Linie fallen.

---

So hätten wir denn das weite Feld der elektrischen Erscheinungen mannigfach durchkreuzt und gefunden, dass uns nicht allein eine sehr bestimmt ausgeprägte vielseitige Uebereinstimmung in dem Auftreten und in dem Wesen der Elektricität, des Lichtes und der Wärme die Anwendung der Undulationstheorie auf die Elektricität an die Hand giebt, sondern dass auch, wenn man in der Elektricitätslehre diese Theorie zu Grunde legt, zunächst eine für alle Elektricitätsquellen gleichförmige Erklärung für die Erregung der Elektricität gewonnen wird, und dass in der Erklärung der elektrischen Erscheinungen selbst durchaus nicht mehr Schwierigkeiten zu überwinden bleiben, als auch die dualistische Theorie noch unbeseitigt lässt, ja dass vielmehr so mancher gewichtige Einwand verschwindet. Zudem finden wir die Elektricitätserregung in der Regel von einer gleichzeitig auftretenden Bewegung begleitet und sehen die meisten Wirkungen des elektrischen Stroms anderwärts häufig durch eine vorhandene Bewegung hervorgebracht und namentlich auch gerade durch schwingende Bewegungen. Ein eben so wichtiges als schwieriges Gebiet, das des Elektromagnetismus, haben wir in unseren Betrachtungen nur wenig berührt und wollen desshalb hier noch einige Bemerkungen aus demselben einfügen, um an diese unsere Schlussbetrachtung anzuknüpfen.

---

Es ist also: $R > R_2$ und $P > P_2$; $P > P_2$ d. h. die Abstossung ist stets geringer, wenn $B$ entgegengesetzt, als wenn es mit $A$ gleichnamig elektrisch ist.

$R_1 > R_2$ und $P_1 > P_2$; $P_1 > P_2$ d. h. die Abstossung ist stets geringer, wenn $B$ entgegengesetzt, als wenn es gar nicht elektrisch war und bloss influenzirt wurde.

4) $\dfrac{b = -a}{b^2 = a^2}$ liefert:

$$R_3 = \left(-a^2 + \frac{2a^2}{n} - \frac{a^2}{n^2}\right)\frac{k}{e^2} = -a^2\left(1 - \frac{1}{n}\right)^2\frac{k}{e^2} < 0$$

$$P_3 = \left(-a^2 - a^2 + \frac{a^2 + 2a^2 + a^2}{n} - \frac{a^2}{n^2} - \frac{a^2}{n^2}\right)S = -2a^2\left(1 - \frac{1}{n}\right)^2 S < 0$$

$$P_3 < 0$$

d. h. wenn $B$ eben so stark, aber entgegengesetzt elektrisch ist, wie $A$, so wird es nicht abgestossen, sondern angezogen mit einer Kraft, welche

$$= \left(1 - \frac{1}{n}\right)^2 a^2 \left[\frac{1}{e^2} + 2\Sigma\frac{du}{u^2}\right] k.$$

Der Schliessungsdraht*) eines elektrischen Stromes wird durch den Strom kräftig transversal magnetisch und tritt dann nicht nur mit anderen fertigen Magneten in Wechselwirkung, sondern er vermag auch in Körpern, welche magnetisch werden können, Magnetismus hervorzurufen, und zwar liegt die magnetische Axe des entstehenden Magnetes senkrecht zur Stromrichtung**). Umgekehrt zeigte Ampère, wie sich jeder Magnet als ein Träger elektrischer Ströme betrachten lässt, die sich um ihn herum in Ebenen bewegen, welche senkrecht auf seiner magnetischen Axe stehen. Desshalb muss denn auch plötzlich auftretender oder verschwindender, oder überhaupt seinen relativen Ort verändernder Magnetismus in seinem Wirkungskreise ganz in derselben Weise störend auf das elektrische Gleichgewicht einwirken, wie es Elektricität unter eben diesen Verhältnissen und Bedingungen thun würde. Unter Umständen überträgt sich bei diesen interessanten Erscheinungen die Bewegung des Magnetes, oder des Stromleiters durch Rückwirkung auf den andern, oder hemmt dessen schon vorhandene Bewegung, sodass also selbst die Trägheit der Materie überwunden wird.

Wir hätten nun zum Schluss bloss noch einige Andeutungen über die Stellung des Magnetismus zur Elektricität und über die Stellung der beiden Elektricitäten gegeneinander zu geben, und zu diesem Behufe gehen wir nochmals auf die Polarisation***) des Lichtes zurück. Wenn ein gewöhnlicher Lichtstrahl unter einem schiefen Winkel an die Grenze zweier Mittel kommt, so wird er reflectirt und gebrochen†), und es stehen die transversalen geradlinigen Schwingungsbahnen des reflectirten Antheils senkrecht auf denen des gebrochenen Antheils. Aus den in einem Strahle des gemeinen Lichts angehäuften Schwingungen werden also bloss jene reflectirt, welche in der Reflexionsebene (= polarisirende Ebene) lagen, und blos jene durch Brechung fortgepflanzt, welche senkrecht zur Reflexions-

---

*) Gleichgiltig, aus welchem Metall; der Magnetismus wirkt nur auf wenige Metalle kräftig anziehend und magnetisirend.

**) Auf die Stärke des durch eine Spirale erzeugten Elektromagnetismus ist ausser der Stromstärke und der Zahl der magnetisirenden Windungen die Masse des magnetisirten Körpers von wesentlichem Einfluss, und es lässt sich für jeden Querschnitt des Elektromagnets ein Maximum des Magnetismus durch eine noch so grosse Vermehrung der Stromstärke nicht überschreiten. Vergl. Dub, die Gesetze des Elektromagnetismus, in der Zeitschrift des deutsch-österr. Telegraphen-Vereins IV Hft. 2 ff.

***) Fresnel: ein polarisirtes Bündel ist jenes, für welches die Schwingungen immer dieselbe Richtung haben, und dabei ist seine Polarisationsebene jene Ebene, zu welcher die kleinen schwingenden Bewegungen der Aethertheilchen immer perpendikular bleiben. Vergl. Pouillet, übersetzt von Palmieri III § 465, S. 396.

†) Ausserdem tragen die von dem reflectirenden Punkte ausgehenden Kugelwellen in beide Mittel das Bild dieses Punktes und machen ihn dadurch von allen Seiten sichtbar.

ebene lagen (die zugleich auch die brechende Ebene ist). Kommt jetzt der reflectirte oder der gebrochene Antheil an eine zweite Grenze des fortpflanzenden Mittels, so wiederholt sich das eben Gesagte, und es kann hier keine zweite Reflexion oder Brechung eintreten, wenn die Schwingungen des ankommenden Strahls senkrecht stehen auf den Schwingungen, welche für diese Reflexion oder Brechung aus einem gemeinen Lichtstrahle herausgenommen werden würden; in allen andern Fällen wird reflectirt und gebrochen zugleich, indem sich die vorhandenen Schwingungen z. B. in der Richtung *cb* (Fig. 9) nach zwei auf einander senkrecht stehenden Richtungen *cb* und *cd* zerlegen. Aber die Intensität des reflectirten und die des gebrochenen Strahles sind im allgemeinen nicht gleich; wenn der eine Strahl im Maximum seiner Intensität ist, so ist der andere im Minimum; das Maximum geht in das Minimum über bei einer Drehung des Analyseurs um 90 Grad. Bei zweimaliger Reflexion und ebenso bei zweimaliger Brechung tritt das Minimum bei senkrechter, das Maximum bei paralleler Stellung der beiden polarisirenden Ebenen auf; umgekehrt ist es, wenn Reflexion und Brechung mit einander abwechseln. Eine Ausnahme davon zeigt der Bergkrystall (für in Richtung der optischen Axe durchgehende Strahlen) und alle doppelt brechende Mittel, von denen man daher sagt, dass sie die Polarisationsebene um eben jenen Winkel drehen, um welchen man die eine der beiden polarisirenden Ebenen aus der eben angegebenen parallelen oder senkrechten Stellung herausdrehen muss, damit das Maximum oder Minimum der Intensität erlangt werde. Die Ursache dieser Drehung der Polarisationsebene ist nach Fresnel das Vorhandensein zweier mit ungleicher Geschwindigkeit entgegengesetzt rotirender circular polarisirender Strahlen. Circular polarisirte Strahlen entstehen aber bei der Interferenz zweier geradlinig und senkrecht auf einander polarisirter Strahlen von gleicher Amplitude und $^1/_4$ Wellenlänge Gangunterschied.

Weil man nun eine Drehung der Polarisationsebene beim Durchgange des polarisirten Lichtes durch durchsichtige Mittel auch durch Magnetismus herbeiführen kann, und weil hier die Drehung noch überdiess in Richtung der Ampère'schen Ströme erfolgt, welche in einem weichen Eisenstück vorauszusetzen wären, wenn es an die Stelle der durchsichtigen Substanz gebracht und durch die auf diese Substanz wirkenden Pole magnetisirt würde: so liegt es doch gewiss nicht fern, im Magnetismus selbst eine ähnliche rotirend polarisirte Schwingungsweise zu suchen, wie sie im Bergkrystalle vorhanden ist. Die in einem circular polarisirten Strahle hintereinander liegenden Theilchen, welche nach einander in dieselbe Phase treten und im Gleichgewichtszustande in einer dem Strahle parallelen Linie lagen, bilden ferner, wenn man sie in ein und demselben Zeitmomente betrachtet und durch eine Linie verbunden denkt, eine Schraubenlinie *abcdef* (Fig. 10); die Höhe eines Schraubenganges ist dabei der Wellenlänge gleich, und es erfolgt während einer jeden Undulation scheinbar ein gan-

zer Umgang der Schraube*). Nun haben wir bereits früher Spirallinien auch durch Elektricität beschrieben gefunden, und wenn wir für diese Spirallinien eine gleiche Ursache gelten lassen wollen**), so führen sie uns zur Annahme einer der magnetischen Schwingungsweise ähnlichen Beschaffenheit der elektrischen Schwingungen. Der Magnetismus ist endlich ein beständiger Begleiter der (dynamischen) Elektricität, und Humboldt bezeichnet schon im Kosmos (Bd. I. S. 194) den Magnetismus nur als eine der vielfachen Formen, in welchen sich die Elektricität offenbart. Gehen wir noch einen Schritt weiter, nennen wir beide, Magnetismus und Elektricität, „Modalitäten einer und derselben Undulation," aus welcher sie sich in ähnlicher Weise herausnehmen lassen, wie die polarisirten Lichtstrahlen aus den Strahlen des gemeinen Lichtes. Stehen doch die Axenrichtungen der gleichzeitigen Wirkung der Elektricität und des Magnetismus ebenso senkrecht auf einander, wie die Schwingungsbahnen des reflectirten und des gebrochenen Lichtstrahls, wie die Schwingungsbahnen des ordentlichen und ausserordentlichen Strahls bei der Doppelbrechung. Wenn wir aber hiernach die Schwingungsbahnen bei der Elektricität und beim Magnetismus nicht als gerade, sondern als in sich zurückkehrende krumme Linien voraussetzen, so wird sich das Auftreten des positiven und negativen Elementes aus der Möglichkeit einer Rotation nach rechts, oder nach links entwickeln lassen***).

Während nun der elektrische Zustand eben das Vorhandensein einer oder der andern jener rotirenden Schwingungen bezeichnet, so erscheint der Magnetismus, und zwar beide Magnetismen zugleich, erst da, wo sich jene elektrischen Schwingungen von Theil zu Theil weiter fortpflanzen, entweder bloss die eine Art oder beide zugleich, und senkrecht zu der Fortpflanzungsrichtung liegt die magnetische Axe. Desshalb magnetisirt ein einfach elektrischer Körper nicht, sondern erst die elektrischen Ströme,

---

*) Ueber spiralförmige akustische Knotenlinien vergl. Pouillet, übersetzt von Palmieri III § 337, S. 79 ff.

**) Indem wir sie gewissermassen als ein daguerreotypes Bild eines momentanen Zustandes betrachten.

***) Der Erfahrung und der Rechnung bleibt es vorbehalten, diese Andeutungen zu bestätigen oder zu widerlegen. Wichtige Momente bei der entscheidenden weitern Durchführung dürften sich aus den Interferenzerscheinungen des circular polarisirten Lichtes verglichen mit denen bei der Elektricität und aus den Verschiedenheiten ergeben, welche sich zwischen der positiven und negativen Elektricität z. B. durch das Licht und die Lichtenberg'schen Figuren offenbaren. — Da wir hier keineswegs schon eine bereits abgeschlossene Undulationstheorie der Elektricität zu geben beabsichtigten, sondern durch die Untersuchung über die Berechtigung und Zulässigkeit der Anwendung der Undulationstheorie für die Elektricitätslehre mehr nur zur Erledigung einer Vorfrage beitragen wollten, so durften wir wohl auch nach der Feststellung der allgemeinsten Beschaffenheit der elektrischen Schwingungen uns mit einigen Andeutungen begnügen und die eigentliche gründliche Untersuchung über die Natur der elektrischen Schwingungen für eine spätere ausführlichere Bearbeitung des Gegenstandes aufgespart lassen.

in welchen eben eine oder beide Arten der rotirenden Schwingungen fortgepflanzt werden; desshalb hat beim Zerbrechen eines Magnetes jedes Stück seine zwei Pole, weil eben das Hervortreten der magnetischen Polarität die Folge der um jeden Theil circulirenden elektrischen Ströme ist; darin kann es auch begründet sein, dass die magnetische Vertheilung von der elektrischen wesentlich verschieden ist, dass bei ihr wirklich beide Magnetismen zugleich erregt werden, und zwar in Folge einer Art von Induction mit umgekehrter Lage der Pole gegen die Pole des vertheilenden Magnetes. Dazu gesellt sich als weiterer Unterschied, dass es beim Magnetismus keine Leitung giebt, wesshalb wir schon früher die Annahme magnetischer Schwingungen der Körpertheilchen etwas bedenklich nannten; damit fiele dann auch die Herabstimmung der Schwingungszahl bis zu sichtbaren Schwingungen durch den Widerstand eines Nichtleiters weg, und in der That wurden auch noch keinerlei leuchtende Erscheinungen an Magneten beobachtet.

---

# Kleinere Mittheilungen.

---

**IV. Ueber vollkommene Zahlen.** In meiner Abhandlung über Ramus, Stifel und Cardanus habe ich (Bd. II S. 375 dieser Zeitschrift) einige Sätze über sogenannte vollkommene Zahlen zusammengestellt, d. h. über solche Zahlen, welche der Summe ihrer aliquoten Theile gleich sind, z. B.

$$6 = 1 + 2 + 3, \quad 28 = 1 + 2 + 4 + 7 + 14.$$

Schon Euclid zeigte, wie solche vollkommene Zahlen aus der Formel $(2^{n+1} - 1) . 2^n$ hervorgehen, so oft $2^{n+1} - 1$ eine Primzahl ist. Unter der Voraussetzung, dass diese Euclidische Entstehungsweise die einzige mögliche ist, erwies schon Cardanus, dass alle vollkommenen Zahlen mit 6 oder 8 schliessen. Dieser letzte Satz lässt sich nun, wie Herr Staatsrath Maedler mir gelegentlich bemerkte, dahin ausdehnen, dass die vollkommenen Zahlen mit 6 oder mit 28 schliessen.

Der Beweis dieser Erweiterung ergiebt sich wohl am Einfachsten nach folgender Methode. Damit die vollkommene Zahl mit 8 schliesse, muss $2^n$ mit 4 und $2^{n+1} - 1$ mit 7 schliessen. Alle Potenzen von 2, welche mit 4 schliessen, haben aber eine grade Zahl an der Stelle der Zehner, weil sie nur durch fortgesetzte Multiplication der 4 mit 16 entstehen. Diese Potenzen können desshalb in den zwei letzten Ziffern durch $20m + 4$ dargestellt werden, wo $m$ einziffrig ist. Für den Factor $2^{n+1} - 1$ sind daher die beiden

**Endziffern** $40m + 7$ und die Multiplication der beiden Factoren liefert $800m^2 + 300m + 28$, d. h. für die beiden Endziffern: 28 *).

CANTOR.

---

**V. Ueber die Discontinuität gewisser unendlicher Reihen.** Wenn eine unendliche Reihe

$$y = u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + \ldots,$$

deren Glieder bekannte Functionen einer Variabelen $x$ sind, für alle, ein bestimmtes Interwall $x = a$ bis $x = b$ nicht überschreitenden $x$ convergirt, so scheint es unzweifelhaft, dass auch die Reihe

$$\int_a^b u_1\,dx + \int_a^b u_2\,dx + \int_a^b u_3\,dx + \ldots$$

convergiren und

$$\int_a^b y\,dx$$

zur Summe haben müsse. Man könnte nämlich sagen: Die Summe der Reihe $u_1 + u_2 +$ etc. lässt sich als Function von $x$, etwa $f(x)$, und $y = f(x)$ als Gleichung einer Curve betrachten; wegen der vorausgesetzten Convergenz der Reihe sind alle von $x = a$ bis $x = b$ vorkommenden Ordinaten jener Curve endliche Grössen, mithin ist auch ihre Fläche, d. h. $\int y\,dx$, zwischen denselben Grenzen genommen, eine endliche Grösse. Diese Argumentation unterliegt allerdings solange keinem Einwurfe, als die Gleichung $y = f(x)$ continuirlich bleibt; da man aber die Continuität oder Discontinuität einer Reihensumme nicht aus dem blossen Anblicke der Reihe erkennen kann, sondern erst bei deren wirklicher Summirung gewahr wird, so bleibt die Anwendung des obigen Satzes sehr misslich. Wie leicht man sich hierin täuschen kann, mag folgendes Beispiel zeigen.

Die unendliche Reihe

$$y = x(1-x) + x^2(1-x^2) + x^3(1-x^3) + \ldots$$

convergirt für alle positiven ächt gebrochenen $x$ auch für $x = 0$ und für $x = 1$, in welchen beiden Fällen $y$ verschwindet; man wird demnach erwarten, dass die durch obige Gleichung repräsentirte Curve die Gestalt von $APB$ (Fig. 11) habe, worin $AB = 1$ ist, und dass die Fläche

$$APBMA = \int_0^1 y\,dx$$

---

*) Ich benutze diese Gelegenheit, um auf eine mir erst kürzlich bekannt gewordene Abhandlung von Terquem über die Elemente der Zahlentheorie aufmerksam zu machen. In derselben finden sich (N. ann. math. III. 219 und 337) auch mehrere interessante Sätze über vollkommene Zahlen. C.

von endlicher Grösse sein werde. Die Ausführung der Integration giebt aber

$$\int_0^1 y\,dx = \frac{1}{2\,.\,3} + \frac{2}{3\,.\,5} + \frac{3}{4\,.\,7} + \ldots + \frac{n}{(n+1)(2n+1)} + \ldots$$

und da für $n > 1$

$$\frac{n}{(n+1)(2n+1)} > \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{n+2}$$

ist, so folgt, dass die Summe der vorigen Reihe mehr beträgt als

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \ldots\right),$$

mithin der Werth des Integrales unendlich gross ist. Das Paradoxon, dass eine geschlossene Curve einen unendlich grossen Flächeninhalt haben soll, klärt sich durch eine genauere Untersuchung sofort auf. Nimmt man die Reihe zuerst als $n$-gliedrige und bezeichnet deren Summe mit $y_n$, so ist

$$y_n = x + x^2 + \ldots + x^n - (x^2 + x^4 + x^6 + \ldots + x^{2n})$$

$$= x\,\frac{1-x^n}{1-x} - x^2\,\frac{1-x^{2n}}{1-x^2} = \frac{x - x^{n+1} - x^{n+2} + x^{2n+2}}{1-x^2}.$$

Bei unendlich wachsenden $n$ giebt diess unter Voraussetzung eines positiven, ächt gebrochenen $x$

$$y = Lim\; y_n = \frac{x}{1-x^2},\quad 1 > x \geqq 0;$$

für $x = 1$ dagegen erhält $y_n$ die Form $\frac{0}{0}$ und als wahren Werth hiervon findet man nach dem gewöhnlichen Verfahren

$$y_n = 1 - (n+1) - (n+2) + (2n+2) = 0,$$

wobei die Grösse von $n$ gleichgültig bleibt; es ist daher auch $y = Lim\; y_n$ in diesem Falle $= 0$, wie man ohnehin wusste. Zufolge der Gleichungen

$$y = \frac{x}{1-x^2},\ \text{für } 0 \leqq x < 1,$$

$$y = 0\quad,\ \text{für}\quad x = 1,$$

hat nun die Curve eine ganz andere als die ursprünglich vermuthete Gestalt; die Ordinaten wachsen nämlich fortwährend und können jede beliebige Grösse übersteigen, wenn man $x$ nahe genug bei der Einheit wählt; wird aber $x = 1$, so ändert sich die Curve sprungweis und liefert den isolirten Punkt $B$ auf der Abscissenachse (Fig. 12). Dass eine solche Curve einen unendlichen Flächeninhalt besitzt, wird Niemanden befremden, auch ergiebt er sich unmittelbar, wenn man das Integral

$$\int y\,dx = \int \frac{x}{1-x^2}\,dx$$

zwischen den Grenzen $x = 0$ und $x = 1 - \delta$ nimmt, wo $\delta$ eine unendlich kleine Grösse bezeichnet.

Die vorhin bemerkte Discontinuität scheint übrigens den meisten Reihen von der Form

$$A_1\, x\,(1-x) + A_2\, x^2\,(1-x^2) + A_3\, x^3\,(1-x^3) + \ldots.$$

eigen zu sein. So ist z. B.

$$\frac{1}{2}\, x\,(1-x) + \frac{1\,.\,3}{2\,.\,4}\, x^2\,(1-x^2) + \frac{1\,.\,3\,.\,5}{2\,.\,4\,.\,6}\, x^3\,(1-x^3) + \ldots.$$

$$= \frac{\sqrt{1+x}-1}{\sqrt{1-x^2}} \text{ für } 0 \leqq x < 1,$$

dagegen verschwindet die Summe für $x = 1$; die entsprechende Curve hat daher eine ganz ähnliche Gestalt wie die vorige. Ferner ist

$$\frac{1}{1}\, x\,(1-x) + \frac{1}{2}\, x^2\,(1-x^2) + \frac{1}{3}\, x^3\,(1-x^3) + \ldots.$$

$$= l\,(1+x) \text{ für } 0 \leqq x < 1,$$

für $x = 1$ dagegen ist die Summe der Reihe nicht $= l2$, wie es die Continuität verlangen würde, sondern $= 0$.

Der eigentliche Grund dieser Discontinuitäten liegt jedenfalls in dem einfachen Satze, dass schon die Gleichung

$$y = Lim\,(x^{\omega}),\ (\omega = \infty)$$

eine discontinuirliche Curve giebt. Für $0 \leqq x < 1$ fällt letztere mit der Abscissenachse zusammen; an der Stelle $x = 1$ hat sie einen isolirten Punkt in der Höhe $y = 1$; für $x > 1$ wird sie zu einer unendlich entfernten parabolischen Linie.

Wie man sieht, haben die betrachteten Reihen eine gewisse Aehnlichkeit mit den Reihen von der Form

$$B_1 \sin x + B_2 \sin 2x + B_3 \sin 3x + \ldots,$$

deren Summen für $x = 0$ und $x = \pi$ verschwinden, aber innerhalb dieses Intervalles jeder gegebenen Function von $x$ gleich gemacht werden können und daher an jenen Stellen discontinuirlich sind, wenn nicht zufällig $f(0) = f(\pi) = 0$ ist. Bisher lieferten diese periodischen Reihen das erste, elementar nicht wohl behandelbare Beispiel von discontinuirlichen Reihensummen; die vorhergehenden Betrachtungen zeigen dagegen, dass solche Fälle von Discontinuität schon in den Anfängen der Reihentheorie vorkommen können, und dass ebendesswegen bei der Behandlung unendlicher Reihen sowie überhaupt bei allen in's Unendliche fortgesetzten Operationen eine scrupulöse Genauigkeit ganz am Platze ist.

Schl.

---

**VI. Ueber einen allgemeinen Satz von den Flächen ebener Curven.** In Heft 4, Theil XXXI des Grunert'schen Archivs d. Math. findet man folgenden, von Dr. Völler in Saalfeld angegebenen Satz:

Zieht man in einer ebenen Curve eine Sehne und legt durch deren Endpunkte Tangenten an die Curve, so nähert sich das Verhältniss des von der Sehne abgeschnittenen Flächensegmentes zu dem aus

der Sehne und den Tangenten gebildeten Dreiecke mehr und mehr der Grenze $^2/_3$, wenn die Sehne unendlich abnimmt.

Der Verf. ist durch die Parabel auf seinen Satz gekommen; für diese gilt nämlich das Verhältniss 2 : 3 bei jeder beliebigen Grösse der Sehne; da man nun immer eine Parabel construiren kann, welche mit einer gegebenen Curve eine Sehne und die Tangenten an deren Endpunkten gemein hat, so war zu erwarten, dass jenes Theorem für beliebige Curven in soweit bestehen würde, als deren Bögen für Parabelbögen gelten können, woraus die Beschränkung auf unendlich kleine Sehnen und Bögen sogleich folgt. Was den Beweis des Satzes anbetrifft, so ist derselbe sowohl bei dem Verf. als in der Grunert'schen Nachschrift ziemlich weitläufig ausgefallen; es bedarf aber hierzu weder analytischer Geometrie, noch der Integralrechnung, noch endlich des Taylor'schen Satzes, sondern nur folgender zwei bekannter Theoreme (s. Fig. 13).

Bezeichnet $\varphi(x)$ die Fläche zwischen der Abscissenachse, der Curve, der festen Ordinate $AB$ und der beweglichen, zur Abscisse $OM = x$ gehörenden Ordinate $MP$, so ist der Differentialquotient

$$\varphi'(x) = Lim\,\frac{\varphi(x+h) - \varphi(x)}{h} \qquad (h = MM_1 = \Delta x)$$

einerlei mit der Ordinate $MP$, welche $y$ oder $f(x)$ heissen möge; der Differentialquotient

$$f'(x) = Lim\,\frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

bedeutet geometrisch die trigonometrische Tangente des Winkels $MTP = \tau$, welchen die berührende Gerade am Punkte $P$ mit der Abscissenachse einschliesst.

Hiernach betrachten wir drei verschiedene Grenzwerthe, aus denen der Völler'sche Satz sehr leicht herzuleiten ist.

a. Das von der Sehne abgeschnittene Segment, welches $S$ heissen möge, ist der Unterschied zwischen dem Trapez $MM_1P_1P$ und der gleichnamigen Curvenfläche, mithin

$$S = \frac{1}{2}\,[f(x) + f(x+h)]\,h - [\varphi(x+h) - \varphi(x)],$$

folglich wenn $\varphi'$ für $f$ gesetzt wird,

$$\frac{S}{h^3} = \frac{[\varphi'(x) + \varphi'(x+h)]\,h - 2\,[\varphi(x+h) - \varphi(x)]}{2\,h^3};$$

nach der bekannten Methode, die zur Ermittelung des wahren Werthes unbestimmt scheinender Brüche dient, erhält man für verschwindende $h$

$$1) \qquad Lim\,\frac{S}{h^3} = \frac{1}{12}\,\varphi'''(x) = \frac{1}{12}\,f''(x) = \frac{1}{12}\,y''.$$

b. Der Winkel $PSM$, welchen die Sehne $PP_1$ mit der $x$-Achse einschliesst, heisse $\sigma$; es ist dann $\angle\,SPT = \sigma - \tau$ und

$$tan\,(\sigma-\tau)=\frac{tan\,\sigma-tan\,\tau}{1+tan\,\sigma.\,tan\,\tau}=\frac{\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}-f'(x)}{1+\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}f'(x)}$$

$$\frac{tan\,(\sigma-\tau)}{h}=\frac{f(x+h)-f(x)-hf'(x)}{h^2}\cdot\frac{1}{1+\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}f'(x)}$$

woraus man nach demselben Verfahren findet

$$Lim\,\frac{tan\,(\sigma-\tau)}{h}=\frac{f''(x)}{2}\,\frac{1}{1+f'(x)\,f'(x)}=\frac{1}{2}\,\frac{y''}{1+y'^2}$$

Für $\angle SP_1T_1=\tau_1-\sigma$ ergiebt sich auf die nämliche Weise

$$Lim\,\frac{tan\,(\tau_1-\sigma)}{h}=\frac{1}{2}\,\frac{y''}{1+y'^2}.$$

Zerlegt man die Tangente in Sinus und Cosinus und beachtet, dass bei verschwindenden $h$ sowohl $\sigma-\tau$ als $\tau_1-\sigma$ in Null übergeht, so hat man auch

2) $$Lim\,\frac{sin\,(\sigma-\tau)}{h}=Lim\,\frac{sin\,(\tau_1-\sigma)}{h}=\frac{1}{2}\,\frac{y''}{1+y'^2}.$$

c. Für den Winkel $TQT_1=\tau_1-\tau$ ist

$$tan\,(\tau_1-\tau)=\frac{tan\,\tau_1-tan\,\tau}{1+tan\,\tau_1\,tan\,\tau}=\frac{f'(x+h)-f'(x)}{1+f'(x+h)\,f'(x)}$$

hieraus folgt

$$Lim\,\frac{tan\,(\tau_1-\tau)}{h}=\frac{f''(x)}{1+f'(x)\,f'(x)}=\frac{y''}{1+y'^2}$$

ebenso auch

3) $$Lim\,\frac{sin\,(\tau_1-\tau)}{h}=\frac{y''}{1+y'^2}.$$

d. In dem Dreiecke $PP_1Q$, dessen Fläche $T$ heissen möge, kennt man die Seite $PP_1=\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}$ und die Winkel $P=\sigma-\tau$, $P_1=\tau_1-\sigma$, $Q=180^0-(\tau_1-\tau)$; daher ist

$$T=\frac{1}{2}\,\frac{(\Delta x^2+\Delta y^2)\,sin\,(\sigma-\tau)\,sin\,(\tau_1-\sigma)}{sin\,(\tau_1-\tau)}$$

$$\frac{T}{h^3}=\frac{1}{2}\left[1+\left(\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\right)^2\right]\frac{\dfrac{sin\,(\sigma-\tau)}{h}\cdot\dfrac{sin\,(\tau_1-\sigma)}{h}}{\dfrac{sin\,(\tau_1-\tau)}{h}}.$$

Durch Uebergang zur Grenze für verschwindende $h$ ergiebt sich sofort, wenn man die Gleichungen 2) und 3) beachtet,

4) $$Lim\,\frac{T}{h^3}=\frac{1}{8}\,y''.$$

e. Aus den Formeln 1) und 4) erhält man endlich

5) $$Lim\,\frac{S}{T}=Lim\left(\frac{S}{h^3}:\frac{T}{h^3}\right)=\frac{1}{12}\,y'':\frac{1}{8}\,y''=\frac{2}{3},$$

welches der zu beweisende Satz ist.

f. Durch gleich einfache Mittel können viele ähnliche Grenzwerthe bestimmt werden, was wir en détail nicht auseinanderzusetzen brauchen.

Nur möge hier noch die Bemerkung Platz finden, dass sich aus der Gleichung 3) die Formel für den Krümmungsradius herleiten lässt.

Die Sehne $PP_1$ bildet nämlich mit den Normalen in $P$ und $P_1$ ein Dreieck $PRP_1$, wovon eine Seite $PP_1$ und die Winkel $RPP_1 = 90^0 - (\sigma - \tau)$, $RP_1P = 90^0 - (\tau_1 - \sigma)$, $PRP_1 = \tau_1 - \tau$ bekannt sind; man hat daher nach dem Sinussatze und für $PR = r$, $P_1R = r_1$

$$\frac{r}{\cos(\sigma - \tau)} = \frac{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}}{\sin(\tau_1 - \tau)}, \quad \frac{r_1}{\cos(\tau_1 - \sigma)} = \frac{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}}{\sin(\tau_1 - \tau)}$$

folglich

$$\frac{r r_1}{\cos(\sigma - \tau)\cos(\tau_1 - \sigma)} = \frac{\Delta x^2 + \Delta y^2}{\sin^2(\tau_1 - \tau)}$$

oder besser

$$r r_1 = \frac{1 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2}{\left(\frac{\sin(\tau_1 - \tau)}{\Delta x}\right)^2} \cos(\sigma - \tau)\cos(\tau_1 - \sigma).$$

Beim Uebergange zu verschwindenden $\Delta x = h$ wird $\tau = \sigma = \tau_1$, gleichzeitig nähern sich $r$ und $r_1$ einem gemeinschaftlichen Grenzwerthe, der $\varrho$ heissen möge, mithin ist

$$\varrho^2 = \frac{1 + y'^2}{\left(\frac{y''}{1 + y'^2}\right)^2} = \frac{(1 + y'^2)^3}{y''^2}.$$

Unter den strengen Ableitungen der Formel für $\varrho$ dürfte diess wohl eine der kürzesten sein und sich beim Unterrichte vielleicht dadurch empfehlen, dass sie weder analytische Geometrie noch Doppelschnittsverhältnisse, sondern nur die einfachste trigonometrische Formel in Anspruch nimmt.

Schl.

---

**VII. Ueber confocale Ellipsoide.** Den neulich mitgetheilten Sätzen über confocale Ellipsoide liessen sich meiner Ansicht nach die Beweise einiger bekannten Sätze anschliessen. Es werden nämlich in der Theorie der Attraction der Ellipsoide folgende zwei Sätze gebraucht (s. z. B. Duhamel's Analytische Mechanik):

1) „Die zwischen zwei ähnlichen und ähnlichliegenden Ellipsoiden eingeschlossenen Stücke einer geraden Secante sind einander gleich.“

2) „Sind $m, n$ zwei Punkte der Oberfläche eines Ellipsoides, und $M, N$ die ihnen correspondirenden Punkte der Oberfläche eines demselben confocalen Ellipsoides, so sind die Entfernungen $Mn$ und $Nm$ einander gleich.“

Der erste Satz beweist sich wohl am einfachsten mit Zuziehung einer zur Secante durch das Centrum $C$ des einen Ellipsoides gelegten conjugirten Diametralebene. Es hängt nun die Richtung eines conjugirten Diameters nur von der Richtung der zugehörigen Diametralebene und dem Verhältnisse der Hauptachsen ab. Da dieses in beiden ähnlichen Ellipsoiden dasselbe ist, so fallen in beiden Ellipsoiden die zur fraglichen Ebene conjugir-

ten Diameter in dieselbe Gerade, was auch schon aus dem reinen Begriffe der Aehnlichkeit hervorgeht, und werden, wie alle ihnen parallele Sehnen, durch diese Ebene halbirt. Sind also $M, N$ die Schnittpunkte der Secante und des ersten Ellipsoides, $m, n$ diejenigen der Secante mit dem zweiten Ellipsoide, $c$ der Begegnungspunkt der Secante mit der conjugirten Diametralebene, so ist $Mc = Nc$, $mc = nc$, woraus durch Subtraction folgt $Mm = Nn$.

Um den anderen Satz zu beweisen, mache ich die Bemerkung, dass die Feststellung der correspondirenden Punkte, d. h. derjenigen, deren auf das Hauptachsensystem bezogene rechtwinklige Coordinaten sich verhalten, wie die ihnen parallelen Hauptachsen beider Ellipsoide, am einfachsten wohl geschehen könne dadurch, dass man

$$X = A\cos\lambda, \quad Y = B\cos\mu, \quad Z = C\cos\nu$$
$$x = a\cos\lambda, \quad y = b\cos\mu, \quad z = c\cos\nu$$

setzte, wo $\lambda$, $\mu$, $\nu$ drei Hilfswinkel sind, die die Richtung eines gewissen Radius concentrischer Kugeln bestimmen, was ich hier nicht weiter ausführen will, weil die Sache vollkommen analog einer bekannten Construction der Ellipsenpunkte mittelst über den Hauptachsen beschriebener concentrischer Kreise ist. — Jedenfalls folgt aber, da $\cos^2\lambda + \cos^2\mu + \cos^2\nu = 1$ ist:

$$\frac{X^2}{A^2} + \frac{Y^2}{B^2} + \frac{Z^2}{C^2} = 1; \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1,$$
$$X : x = A : a; \quad Y : y = B : b; \quad Z : z = C : c,$$

d. h. die Punkte $X$, $Y$, $Z$; $x$, $y$, $z$ sind correspondirende Punkte zweier Ellipsoide. Bezeichnen wir sie durch $M$ und $m$, und nennen $X'$, $Y'$, $Z'$; $x'$, $y'$, $z'$ ein anderes System correspondirender Punkte $N$, $n$, so dass

$$X' = A\cos\lambda', \quad Y' = B\cos\mu', \quad Z' = C\cos\nu',$$
$$x' = a\cos\lambda', \quad y' = b\cos\mu', \quad z' = c\cos\nu',$$

so ergiebt sich augenblicklich, dass die Quadrate der Entfernungen $Mn$ und $Nm$ gleich sind, aus der Gleichung

$$(A\cos\lambda - a\cos\lambda')^2 + (B\cos\mu - b\cos\mu')^2 + (C\cos\nu - c\cos\nu')^2 =$$
$$(A\cos\lambda' - a\cos\lambda)^2 + (B\cos\mu' - b\cos\mu)^2 + (C\cos\nu' - c\cos\nu)^2,$$

sobald man dabei, da die Hauptschnitte beider Ellipsoide confocal sein sollen, berücksichtigt, dass

$$A^2 - B^2 = a^2 - b^2, \quad A^2 - C^2 = a^2 - c^2, \quad B^2 - C^2 = b^2 - c^2, \text{ oder}$$
$$A^2 - a^2 = B^2 - b^2 = C^2 - c^2, \text{ und}$$
$$\cos^2\lambda + \cos^2\mu + \cos^2\nu = \cos^2\lambda' + \cos^2\mu' + \cos^2\nu' = 1 \text{ ist.}$$

(Aus einem Briefe des Herrn Dr. Zehfuss in Darmstadt.)

---

**VIII. Teleskope von versilbertem Glas und Spiegel mit ellipsoidischen und paraboloidischen Umdrehungsflächen.** Von Léon Foucault. Die Anwendung des versilberten Glases statt metallischer Legirungen in der Construction der Spiegelteleskope hat recht deutlich die Schwierigkeit gezeigt, Flächen zu erzeugen, die fähig sind, durch Reflexion einen genauen Brennpunkt

zu bilden. Wenn man sich auf die Anwendung sphärischer Oberflächen beschränkt, so ist man wegen der daraus entstehenden Aberration genöthigt, die spiegelnde Fläche auf einen Umfang zu beschränken, welcher in dem Maasse relativ kleiner wird, als man die Grösse der Instrumente vermehrt. Wenn man aber die Sache näher untersucht, erkennt man, dass die durch den Optiker verfertigte sphärische Oberfläche selbst nicht so genau ist, um die Controle optischer Versuche auszuhalten.

Wenn man z. B. im Krümmungsmittelpunkt eines Hohlspiegels einen leuchtenden Punkt anbringt, welcher in demselben Mittelpunkte ein Bild ohne Aberration geben sollte, so findet man am häufigsten, dass dieses Bild von einem Lichtschein umgeben ist, dessen Wahrnehmung auf Fehler in der Oberfläche schliessen lässt. Durch diese Untersuchungsweise erkennt man übrigens, dass sich eine Fläche während der Dauer des Polirens auf merkliche Weise modificirt. Diese Bemerkung hat Foucault den Gedanken eingegeben, die polirten Flächen noch einmal zu überarbeiten und durch locale Verbesserungen zu verändern, bis sich das Bild im Krümmungsmittelpunkt ohne Tadel erweist. Da diese Operation auf einer schon grossen Oberfläche gelang, so beweist Foucault, dass man auch sehr wohl die Kugel in ein Ellipsoid und hierauf in ein Paraboloid allmählich nach folgender Methode verwandeln könne.

Wenn man die Oberfläche des Glases genau sphärisch gemacht hat und man lässt einen leuchtenden Punkt, der sich ursprünglich im Krümmungsmittelpunkt befand, stetig nach dem Hauptbrennpunkte rücken, so wird das Bild in entgegengesetzter Richtung ins Unendliche rücken und die Aberration, welche anfänglich Null war, wird sich mit der Entfernung vergrössern. Nimmt man nun zuerst an, dass der leuchtende Punkt sich so wenig verrücke, dass das in einer benachbarten Stelle vom Mittelpunkte entstehende Bild bei der Untersuchung eine eben beginnende Aberration zeige, so kann man alsdann den Spiegel mittels eines Polirstahles von geeigneter Form so corrigiren, dass diese Abweichung verschwindet, und folglich ist aus dem sphärischen Spiegel durch die Trennung des ursprünglichen Mittelpunktes in zwei entsprechende Brennpunkte, welche durch den leuchtenden Punkt und dessen Bild eingenommen werden, ein ellipsoidischer geworden. Hat man diese Correction für die erste Entfernung der Brennpunkte ausgeführt, so vergrössert man diese Entfernung, indem man den leuchtenden Punkt dem Spiegel nähert, wodurch neue, ebenfalls zu corrigirende, Aberrationen erscheinen.

Durch dasselbe Verfahren wie beim ersten Male vernichtet man sie abermals, und folglich vergrössert man die Länge des Ellipsoides, welchem die Oberfläche des Spiegels angehört. Setzt man diess allmählig von Stelle zu Stelle fort, so verlängert man progressiv das Ellipsoid, bis es endlich in ein Umdrehungsparaboloid verwandelt worden ist, nämlich bis der Spiegel fähig gemacht ist, ohne merkliche Aberration auf unendliche Entfernung zu functioniren.

Diese Methode ist bei einem Spiegel von 33 Centimetern Durchmesser und von 2,25 Metern Brennweite in Anwendung gebracht worden und dessen Oberfläche ist dadurch schnell so umgeformt, dass dieser Spiegel jetzt, zu einem parabolischen geworden, in seinem Brennpunkte das Intervall einer halben Secunde noch angiebt. Um übrigens über den Werth des Instrumentes, welches von einem solchen Spiegel gebildet wird, nicht in Zweifel zu bleiben, hat Foucault dasselbe nach dem wohlbekannten Stern $\gamma$ in der Andromeda am Himmel gerichtet. In der Nacht vom 21. zum 22. Juli hat sich dieser Fixstern als Doppelstern gezeigt, so wie er in den Fernröhren von mittlerer Dimension erscheint; gegen 3 Uhr Morgens, bei den ersten Strahlen des Tages, als die Luft ruhiger geworden war, theilte sich derjenige der beiden Sterne, der sich blau gefärbt darstellt, seinerseits in zwei sehr kleine Punkte, welche ausserordentlich nahe bei einander waren. Die relativen Lagen, wie sie sich dem Gesichte dreier verschiedener Personen bemerklich machten, fanden sich in Uebereinstimmung mit den Angaben der Kataloge. Das ist genau das nämliche Resultat, welches Struve nur mit dem grossen Teleskop in Pulkawa erhalten hat. Es ergiebt sich aus dieser Erfahrung, dass der blaue Stern $\gamma$ im Sternbilde Andromeda durch ein parabolisches Teleskop von versilbertem Glas von 33 Centimetern Durchmesser und 2,25 Metern Brennweite aufgelöst worden ist.

(Compt. rend., T. 47, p. 205.)

---

**IX. Das Stereomonoskop** von Claudet. Claudet hat ein Instrument erfunden, welches er Stereomonoskop nennt und durch dessen Anwendung ein einfaches Bild eine stereoskopische Täuschung hervorbringt. Im Mittelpunkt eines grossen schwarzen Schirmes hat man eine viereckige Oeffnung angebracht, die durch ein mattgeschliffenes Glas eingenommen wird, auf welches man, mittels einer optischen Vorrichtung, die hinter dem Schirme angebracht ist, das vergrösserte photographische Bild einer Landschaft, eines Portraits oder irgend eines anderen Gegenstandes fallen lässt. Wenn man dieses Bild betrachtet, natürlich mit beiden Augen und ohne Anwendung eines Instrumentes, sieht man ein ausserordentliches Phänomen entstehen. Das Gemälde erscheint mit vollkommenem Relief; als wenn man mit beiden Augen die beiden auf gewöhnliche Weise in dem Stereoskop verbundenen Bilder betrachtet. Man kann es in einer Entfernung von 30 Centimetern oder in einer Entfernung von 3 Metern betrachten, wie man es mit einem gewöhnlichen Gemälde macht, ohne die geringste Ermüdung der Augen. Obgleich dieses Bild durch die Projection auf den Schirm schon vergrössert worden ist, so kann man es doch noch mehr vergrössern, wenn man es durch grosse Sammellinsen betrachtet. Diese neue Thatsache besteht darin, dass das Bild auf dem mattgeschliffenen Glas der dunklen Kammer die Täuschung des Relief hervorbringt, während die Empfindung des

Relief nicht existiren würde, wenn das Bild auf Papier aufgefangen würde. Wenn der Recipient des Bildes ein mattgeschliffenes Glas ist, so sind die durch die verschiedenen Punkte der Linse gebrochenen Strahlen, die das Glas erleuchten, nur dann sichtbar, wenn ihre Richtung mit der optischen Axe der Augen zusammenfällt, so, dass die vom mattgeschliffenen Glas austretenden Lichtstrahlen, welche das rechte Auge erleuchten, nur diejenigen sind, welche in dieser Richtung durch die linke Seite des Objectives schief gebrochen worden sind, und dass die für das linke Auge sichtbaren Strahlen einzig diejenigen sind, welche durch die rechte Seite der Linse gebrochen worden sind. Die beiden Augen erhalten folglich ein verschiedenes perspectivisches Bild des auf dem mattgeschliffenen Glas dargestellten Gegenstandes, und das einfache Sehen ist in der That das Resultat der Wahrnehmung zweier verschiedener Bilder, von denen jedes nur sichtbar für das eine und unsichtbar für das andere Auge ist. Das ist der Hauptpunkt der Entdeckung Claudet's.

Das Stereomonoskop ist auf das nämliche Princip gegründet; es ist in Wirklichkeit nur eine dunkle Kammer, vor der man eine doppelte stereoskopische Platte angebracht hat. Mittels zweier Objective, die passend getrennt und von einander entfernt sind, werden die beiden Bilder durch Brechung auf demselben Theil des mattgeschliffenen Glases projicirt. Vermöge des so eben erwähnten Gesetzes wird das rechte Bild nur durch das linke und das linke Bild nur durch das rechte Auge gesehen, so dass, obwohl es auf dem mattgeschliffenen Glas, wenigstens dem Anscheine nach, nur ein Bild giebt, die beiden Augen, indem sie auf denselben Punkt sehen, in Wirklichkeit verschiedene Bilder sehen, welche, da sie aus verschiedenen Gesichtspunkten aufgenommen sind, ihre individuelle Perspective besitzen. Es werden folglich die optischen Axen, wegen ihrer unbesiegbaren Tendenz zum einfachen Sehen und bei ihrer natürlichen Anstrengung, die beiden correspondirenden Bilder eines nämlichen Punktes des Gegenstandes auf die Mittelpunkte der beiden Netzhäute zu bringen, mehr oder weniger convergiren, je nachdem die Entfernungen zweier Bilder eines nämlichen Punktes auf dem mattgeschliffenen Glas in horizontaler Richtung mehr oder weniger gross sind; diese horizontalen Entfernungen sind übrigens, wie man weiss, den bezüglichen Entfernungen proportional, welche die Punkte des Objectives von dem Orte trennen, wo die Bilder aufgenommen worden sind; und die Veränderung der Convergenz der optischen Axen in dem Uebergange von einer Ebene zur anderen der Landschaft, wird dieselbe Empfindung des Reliefs hervorbringen, als wenn wir die Landschaft oder den Gegenstand mit unsern beiden Augen oder als wenn wir die im Stereoskop verbundenen Bilder betrachten.

(Cosmos, Vol. XII, p. 493.)

---

VII.

# Ueber den geometrischen Zusammenhang der Maschinen.

Von EDUARD NOEGGERATH.

---

§. 1.

Die Bewegungen, welche an Maschinen vorkommen, sind äusserst regelmässig und unterscheiden sich auf den ersten Blick von den Bewegungen, welchen die Körper im Allgemeinen unterworfen sind. Immer sind es Wiederholungen in denselben Bahnen mit denselben oder bestimmt geänderten Geschwindigkeiten, und stets ist der Zusammenhang der einzelnen Bewegungsmechanismen ein derartiger, dass die Bewegungsübertragung von den einen auf die andern erfolgt, ohne dass das Geschwindigkeitsverhältniss derselben geändert wird, welche Veränderungen die Geschwindigkeiten selbst auch erleiden. Man hat den Zusammenhang der Theile einer Maschine, welcher in der Nöthigung derselben besteht, nur innerhalb gewisser Grenzen Bewegungen vornehmen zu können, den geometrischen Zusammmenhang der Maschine genannt und die Bewegungen der Körper im Allgemeinen in freie und nicht freie Bewegungen eingetheilt. Die freie Bewegung ist von den treibenden Kräften, den Bewegungswiderständen und der Trägheit der Körper, die nicht freie Bewegung dagegen ausserdem noch von der Beziehung des bewegten Körpers zu nicht bewegten, welche seine Bahn bestimmen, d. h. also von dem geometrischen Zusammenhange, abhängig.

Der geometrische Zusammenhang tritt demnach als vierte Bestimmungsgrösse zu den dreien, denen die Bewegungen im Allgemeinen gehorchen müssen. Er ist das Wesentlichste der Maschine, indem er der Mannigfaltigkeit der Bewegungsveränderungen enge Grenzen zieht und gleichsam als Zaum auftritt, mit Hülfe dessen die Kraftthätigkeit in der Maschine so gezügelt wird, dass sie nur in der beabsichtigten Weise mittelst des Werkzeugs, gegenüber dem bearbeitenden Stoffe zur hauptsächlichsten Aeusserung gelangt. Eine Verbindung gegliederter starker Linien, die sich um Axen drehen oder zwischen festen Punkten hin- und herschieben, während sie ihre Bewegungen einander mittheilen, kann gleichsam als Rip-

penwerk der Maschine angenommen werden, aus dem diese selbst hervorgeht, wenn man an Stelle der starren Linien feste Körper mit Formen treten lässt, welche den vorliegenden Bewegungsbedingungen in derselben Weise, wie die Linien, Genüge leisten, ausserdem aber den Anforderungen der Festigkeit, die in jedem Maschinentheil fortwährend berührt wird, entsprechend gebildet sind. Der Entwurf einer Maschine stellt deshalb zunächst jedesmal den geometrischen Zusammenhang durch Linien fest, deren Formen und Dimensionen den Bewegungen angepasst sind, und erst nachdem dies geschehen, werden die Linien gleichsam mit Masse bekleidet, indem man die Maschinentheile, in dem Constructionsmaterial sie ausgeführt annehmend, in vollen körperlichen Formen aufzeichnet und dabei allen Bedingungen Rechnung zu tragen sucht, welche die Festigkeit des Materials erheischt. Dass dieser zweite Act des Entwurfs, die Formbildung, in den ersten, die Planbildung, nicht hinein greifen darf, liegt auf der Hand, und ebenso, dass in der ausgeführten Maschine die Bewegungen so stattfinden, wie in der Gliederung starrer Linien, die den geometrischen Zusammenhang repräsentirt, wenn dieselbe realisirt und bewegt werden könnte. Das Letztere ist darin begründet, dass alle Punkte der Maschine, welche mit den Punkten ihrer Gliederung zusammenfallen, wie diese sich bewegen, die Bewegungen aller andern aber in Curven vorgehen, die den Curven, welche die Punkte der Gliederung beschreiben, parallel oder äquidistant sind. Daraus erhellt dann, dass alle Gesetze, welche für die Bewegung von Liniengliederungen aufgestellt werden können, auch für die Bewegungen von Maschinen gelten, welche nach diesen Gliederungen gebildet sind.

Während die Formbildung der Maschinentheile, soweit sie sich auf die Verkörperung der festgestellten Linien des geometrischen Zusammenhangs bezieht, von einheitlichen Gesichtspunkten aus vorgenommen werden kann und wiederum erst in neuester Zeit durch die Einführung der Verhältnisszahlen auf allgemeineren Standpunkt gehoben worden ist, stehen bei der Planbildung wenige Gesetze zu Gebot, deren gemeinsame Ausgangspunkte klar vorliegen. Nur wenige Maschinentheile, z. B. die Zähne der Räder und die Daumen einer Daumenwelle, erfreuen sich in dieser Beziehung durchgehends begründeter Bildungsgesetze. Im Allgemeinen aber stehen die Gesetze des geometrischen Zusammenhangs noch ohne verbindende Ideen neben einander und man ist genöthigt, um eine Maschine kennen und demnächst construiren zu lernen, Theil um Theil zu studiren und jeden einzeln in seinen Beziehungen zu allen andern zu betrachten. Und dennoch liegt es nahe, der tiefen Gesetzmässigkeit halber, die im Spiele aller Maschinen, wie ihre Theile auch zusammengesetzt sind, stattfindet, anzunehmen, dass allgemeine Bildungsgesetze für dieselben vorhanden sein müssen, und dass diese es sind, denen man bei der Planbildung allein zu folgen hat. Diese zu finden und zu begründen, werde analytisch vorgegangen, indem man

in dem allgemeinen Bilde der Maschine eine eingehende Zerlegung der Bewegungen und der bewegten Theile unternimmt, Gruppen bildet, und demnächst die Bestimmungsgesetze dieser ermittelt.

## §. 2.

Die Bewegung eines jeden Punktes einer Maschine ist eine in sich zurückkehrende, d. h. jeder Punkt beschreibt eine geschlossene Curve oder läuft in der ungeschlossenen alternirend hin und her. Die Bewegungen sind entweder gradlinig oder kreislinig oder gehen aus grad- oder kreislinigen Bewegungen hervor, indem zwei Punkte des bewegten Theils in Graden, oder ein Punkt desselben in einer Graden und ein anderer in einem Kreise, oder endlich zwei Punkte desselben in Kreisen geführt werden. Andere Ausgangsbewegungen, als die in graden Linien und Kreisen, pflegen bei Maschinen nicht vorzukommen, und im Allgemeinen liegen diese Führungslinien in einer Ebene. Dies wird auch hier zunächst angenommen, und soll es hervorgehoben werden, wenn Ausnahmen auftreten.

Ist der bewegte Maschinentheil durch eine Grade *CD* repräsentirt, so wird, wenn zwei Punkte derselben in Graden geführt werden, unterschieden werden müssen, ob diese Führungslinien zusammenfallen, parallel sind oder sich schneiden. Im ersten Falle wird jeder Punkt der bewegten Linie eine Grade beschreiben, die mit dieser Linie und den Führungslinien zusammenfällt (s. Taf. II, Fig. 1), im andern Falle werden alle Punkte der bewegten Linie Parallelen mit den parallelen Führungslinien beschreiben (s. Taf. II, Fig. 2) und im letzten Falle endlich Curven eigenthümlicher Art (s. Taf. II, Fig. 3).

In dem Falle, dass ein Punkt der bewegten Graden *CD* in einer Graden, ein anderer aber in einem Kreise geführt wird (s. Taf. II, Fig. 4), beschreibt der erstere Punkt eine Grade, der andere einen Kreisbogen, während die übrigen in Curven vorschreiten, die sich der Graden um so mehr nähern, d. h. um so zusammengedrückter sind, je näher der beschreibende Punkt an der graden Führungslinie liegt. Dabei kann die grade Führung den Kreis schneiden oder tangiren oder keinen Punkt mit ihm gemein haben.

Wenn zwei Punkte der bewegten Linie *CD* in Kreisen geführt werden, so beschreiben alle Punkte derselben Curven, welche zwischen beiden Kreisen liegen und in der Lage ihrer Krümmungsradien mit dem einen oder andern übereinstimmen, je nachdem der beschreibende Punkt dem einen oder andern Kreise näher liegt (s. Taf. II, Fig. 5).

Die beiden Punkte *C* und *D* der Linie *C D*, welche dadurch, dass sie in Graden oder Kreislinien geführt werden, die Bewegung der Linie bestimmen, mögen Hauptpunkte oder bestimmende Punkte, alle übrigen Punkte der Linie *CD* aber Nebenpunkte oder abhängige Punkte genannt werden. Die Bewegungen der Hauptpunkte mögen primäre oder ursprüngliche Bewegungen, die Bewegungen der Nebenpunkte se-

cundäre oder abgeleitete Bewegungen heissen, und dem entsprechend können die Grade und der Kreis primäre oder ursprüngliche Wege, alle anderen Curven aber, insofern sie sich auf die angegebene Art mittelst der Graden und des Kreises erzeugen lassen, secundäre oder abgeleitete Wege genannt werden. Und da die Grade als ein Kreis mit unendlich grossem Radius angesehen werden kann, so ergiebt sich die Bewegung im Kreise als die einzige primäre und der Kreis als die primäre Curve aller andern.

Von der secundären Bewegung eines Punktes ist die zusammengesetzte zunächst zu unterscheiden, welche derselbe annimmt, wenn ihm unmittelbar Bewegungen nach verschiedenen Richtungen ertheilt werden. Durch Zusammensetzung zweier Bewegungen in einer Ebene können alle ebenen Curven erzeugt werden. Die Zusammensetzung einer gradlinigen und einer kreisförmigen Bewegung liefert unter Anderem ebene Spiralen und die Cycloiden, die Zusammensetzung zweier kreisförmigen Bewegungen die Epicycloiden und Hypocycloiden. Die Zusammensetzung dreier Bewegungen, welche in verschiedenen Eben erfolgen, gewährt jede Curve im Raume und Flächen aller Krümmungen, wie das Abdrehen der Körper mittelst des Drehstahls auf der Drehbank zeigt. Alle Bewegungen aber erscheinen dadurch, dass man ihre Wege als aus unendlich kleinen gradlinigen Elementen von verschiedener Richtung zusammengesetzt denkt, selbst als die unmittelbare Aufeinanderfolge unendlich kleiner gradliniger Bewegungen von verschiedener Richtung. Auch die secundäre Bewegung eines Punktes muss so betrachtet und dadurch auf die primäre Bewegung eines andern damit zusammenhängenden Hauptpunktes zurückgeführt werden, dass man jedes secundäre Wegelement bei den Bewegungen in der Ebene nach zweien Richtungen zerlegt und dann in Beziehung setzt zu den gleichgerichteten Seitenwegen der zugehörigen primären Wegelemente. Die Seitenwege der secundären Bewegung werden also aus den zugehörigen primären Seitenwegen zusammengesetzt und demnächst unter sich vereinigt, so dass das secundäre Wegelement selbst mittelst zweifacher Zusammensetzung erhalten wird.

## §. 3.

Die primären Bewegungen der Maschine erfolgen, da die Wege des Punktes stets in sich zurückkehren müssen, entweder in einer vollen Kreislinie nach einer Richtung oder wechselnd nach verschiedenen Richtungen in einem Kreisbogen oder einer Graden. Erfolgt die Bewegung in einem Kreise nach einer Richtung, so wird sie eine drehende oder rotirende Bewegung genannt, erfolgt sie in einem Kreisbogen mit wechselnder Richtung, so heisst sie eine schwingende oder oscillirende Bewegung, und erfolgt sie in einer Graden hin- und hergehend, so heisst sie eine hin- und hergehende oder alternirende Bewegung. Die primären Bewegungen sind daher einzutheilen in

1) kreisförmig drehende (rotirende) Bewegungen,

2) kreisförmig schwingende (oscillirende) Bewegungen,

3) gradlinig hin- und hergehende (alternirende) Bewegungen,

und die Aufgabe der activen Maschinentheile ist es, diese Bewegungen der Art nach ungeändert, oder der Art nach geändert auf einander zu übertragen. Geschieht die Uebertragung ohne Aenderung der Bewegungsart, wie z. B. bei einem Rade, das seine Bewegung einem andern Rade mittheilt, so sagt man, die Bewegung werde fortgepflanzt, wohingegen, wenn die Uebertragung unter Aenderung der Bewegungsart erfolgt, wie z.B. bei einer Kurbel, die ihre drehende Bewegung mittelst der Schubstange an eine Kolbenstange, in eine gradlinige umgewandelt, überträgt, man sagt, die Bewegung werde umgeändert. Die activen Maschinentheile zerfallen demnach in Fortpflanzungs- und Umänderungsorgane, und es sind einzutheilen:

**die Fortpflanzungsorgane**

in Maschinentheile zur Fortsetzung

1) der drehenden Bewegung
   (Zahnräder, Kettenräder, Riemscheiben, Frictionsräder, Schraube ohne Ende, Parallelogrammverbindungen),

2) der schwingenden Bewegung
   (Vierecksverbindungen),

3) der gradlinigen Bewegung
   (Keil, Gestänge, Ketten, Seile);

dagegen

**die Umänderungsorgane**

in Maschinentheile zur Umänderung

1) der drehenden Bewegung in
   α) schwingende Bewegung
      (Vierecksverbindungen, wie Kurbel mit Schubstange und Balancier, Hebedaumen und Hebearm, conische Räder mit unterbrochener Zahnstellung),
   β) gradlinige Bewegung
      (Vierecksverbindungen, Zahnrad und Zahnstange, excentrische Scheibe, Hebedaumen und Hebelatte, Schraubenmutter und Schraube),

2) der schwingenden Bewegung in
   α) drehende Bewegung
      (Vierecksverbindungen, Sperrhaken und Sperrrad),
   β) gradlinige Bewegung
      (Vierecksverbindungen mit Gradführung, bewegliche Dreiecksverbindungen, Schraubenmutter und Schraube),

3) der gradlinigen Bewegung in
   α) drehende Bewegung
      (Viereckverbindungen, Schraube und Schraubenmutter),
   β) schwingende Bewegung
      (Viereckverbindungen, Schraube und Schraubenmutter).

Die Anzahl der activen Maschinentheile ist indessen nicht so gross, als diese Uebersicht erwarten lassen könnte. Die Mehrzahl der Organe ist geeignet, entweder die Bewegungen nach der einen oder andern Richtung fortzupflanzen oder dieselben aus der einen Art in die andere und zurück umzusetzen. Maschinentheile dieser Gattung wollen wir Maschinentheile mit vollständigem geometrischen Zusammenhange nennen. Zu denselben werden Räder aller Arten, Schraube und Schraubenmutter, sowie sämmtliche geschlossene Stangenverbindungen zu zählen sein Die andern Organe dagegen gestatten nur Fortpflanzung und Umänderung der Bewegungen nach einer Hinsicht. Diese mögen Maschinentheile mit unvollständigem geometrischen Zusammenhange genannt werden. Innerhalb gewisser Grenzen gehören zu denselben der Keil, die excentrische Scheibe, Hebedaumen und Hebearm, Sperrhaken und Sperrrad.

## §. 4.

Die vorstehende Uebersicht ergiebt, dass die Mehrzahl der Maschinentheile zur Fortpflanzung und Umänderung der Bewegungen bewegliche Stangenverbindungen sind. Die andern, wie Räder, Schraube, Hebedaumen und Keil, sind in ihrer Theorie hauptsächlich auf derjenigen der einfachen Maschinen begründet und deshalb in allen Punkten vollständig entwickelt.

Die Stangenverbindungen lassen sich, wie bei näherem Eingehen leicht erhellt, auf folgende einzelne Fälle beschränken.

1) Zwei Arme $AD$ und $BC$ (s. Taf. II, Fig. 5) drehen sich um die festen Punkte $A$ und $B$ und theilen einander die Bewegung vermittelst der um die Punkte $D$ und $C$ drehbaren Verbindungsstange $DC$ mit. In diesem Falle ist die Verbindung durch ein Viereck $ABCD$ repräsentirt, von dem drei Seiten beweglich, die vierte aber unverrückbar ist. Derselbe liegt in der Praxis bei der Bewegungsübertragung in einer zusammengesetzteren Dampfmaschine vor, indem hier das als Gradführung dienende Parallelogram und der Balancier ein derartiges Viereck bilden. Ferner kommt derselbe bei der Verbindung von Balancier, Schubstange und Kurbel, wie überhaupt bei allen Stangenverbindungen vor, mittelst derer schwingende und drehende Bewegungen fortgepflanzt oder in einander umgesetzt werden.

2) Ein Arm $BC$ dreht sich um den festen Punkt $B$ (s. Taf. II, Fig. 4) während ein anderer Punkt $C$ desselben mit einer Stange $CD$ drehbar verbunden ist, von der ein Punkt $D$ in einer Graden fortschreitet. Unter Anderem kann diese Grade durch den festen Drehpunkt $B$ des Armes $BC$

gehen. Dieser Fall liegt in der Verbindung von Kolbenstange, Schubstange und Kurbel vor, welche häufig bei liegenden Dampfcylindern angewendet wird und alsdann ein verschiebbares Dreieck *BCD* vorstellt, dessen Seite *BD* veränderlich ist. Diese Verbindung kann aber auch als specieller Fall der vorigen aufgefasst werden, indem der Drehpunkt *A* in der Unendlichlichkeit liegt und der unendlich lange Dreharm *DA* stets normal auf der Diagonale *DB* steht.

3) Ein Arm *BC* dreht sich um den festen Punkt *B* (s. Taf. II, Fig. 6), während ein anderer Punkt *C* desselben mit einer Stange *DC* drehbar verbunden ist, die sich um einen zweiten Punkt *P*, durch den sie vorrückt, dreht. Dieser Fall kommt bei oscillirenden Dampfmaschinen vor, bei denen die Kolbenbewegung unmittelbar auf die Kurbel übertragen wird, während die Kolbenstange auf und niedergeht und um den Drehpunkt des Cylinders schwingt. Derselbe wird durch ein verschiebbares Dreieck repräsentirt, von dem ein Eckpunkt *B* festliegt, ein anderer *C* sich im Kreise dreht und die Seite *DC* stets durch den Punkt *P* geht, kann aber auch aufgefasst werden als ein Viereck *ABCD*, von dem eine Seite *AD* unendlich lang und in allen Lagen, welche durch die Punkte *P* und *B* bestimmt sind, normal auf *DC* gerichtet ist.

4) Eine Stange *CD* (s. Taf. II, Fig. 2 und 3) bewegt sich, während zwei Punkte derselben in geraden Linien *nm* und *pq* parallel sein oder sich schneiden können. Diese Verbindung kann als der Fall eines beweglichen Vierecks *ABCD* aufgefasst werden, dessen Seiten *DA* und *CB* unendlich lang und beziehendlich normal gerichtet auf den primären graden Wegen *pq* und *nm* sind.

Alle Stangenverbindungen, welche zur Bewegungsübertragung angewendet werden, lassen sich demnach auf ein bewegliches Viereck zurückführen, von dem zwei Endpunkte fest und die beiden andern verschiebbar sind. Ein derarartiges Viereck mag deshalb Bewegungsviereck genannt werden. Die Seiten *AD* und *BC* derselben, welche durch einen festen und einen beweglichen Eckpunkt begrenzt sind, mögen Arme heissen, und zwar derjenige erster Arm, von dem die Bewegung ausgehend gedacht wird. Der andere heisst alsdann zweiter Arm. Die Seite *CD*, welche durch die beiden beweglichen Eckpunkte *C* und *D* begrenzt ist, heissen Schubstange oder Stange kurzweg, und die Seite *AB*, welche durch die beiden festen Eckpunkte *A* und *B* begrenzt ist, Basis des Vierecks.

## §. 5.

Die secundären Bewegungen der Punkte einer Graden *CD*, deren Hauptpunkte *C* und *D* auf irgend welchen ebenen Curven geführt werden, sind die Bewegungen der Stangenpunkte eines Bewegungsvierecks, dessen Arme die Krümmungsradien jener Curven sind.

Wir erörtern zunächst den Fall, dass jene Curven Kreise sind, das Bewegungsviereck in seinen Seiten alsó constant ist.

Es sei (s. Taf. II, Fig. 7) die Länge der Stange $CD = b$, und der Stangenpunkt $P$ bestimmt durch den Abstand $DP = p$; ferner seien $CP = b - p = q$, $AD = r$ und $BC = R$, sowie die Winkel, welche diese Arme mit der Basis $AB = a$ bilden, beziehendlich $\alpha$ und $\beta$. Dreht sich der erste Arm um den unendlich kleinen Winkel $DAD' = d\alpha$, so schreitet der Punkt $D$ um das Bogenstück $DD'$ vor und der Punkt $C$ bewegt sich von $C$ nach $C'$, wodurch der Winkel $\beta$ um $d\beta$ verändert wird. Den primären Wegelementen $DD'$ und $CC'$ entspricht alsdann das secundäre Wegelement $PP'$, d. h. während sich $\alpha$ und $d\alpha$ verändert, hat der Punkt $P$ das Wegelement $PP'$ zurückgelegt.

Die primären Wegelemente $DD'$ und $CC'$ lassen sich in Seitenwege $Dd$ und $D'd$, $Cc$ und $C'c$ zerlegen, welche beziehlich parallel mit der Basis $AB$ sind und normal auf derselben stehen. In gleicher Weise lässt sich das secundäre Wegelement $PP'$ in zwei Seitenwege $Pn$ und $P'n$ zerlegen. Zwischen $Dd$, $Pn$ und $Cc$, sowie zwischen $D'd$, $P'n$ und $C'c$ finden aber, da diese Linien gruppenweise untereinander parallel sind, folgende Beziehungen statt*):

---

*) Um sich von der Richtigkeit dieser Fundamentalgleichungen, die wohl nicht Jedem auf den ersten Blick einleuchten möchte, zu überzeugen, kann man auf folgende Weise erfahren:

Für $AB$ als $X$-Axe seien $x$ und $y$ die Coordinaten von $D$, $x'$ und $y'$ diejenigen von $C$, $\xi$ und $\eta$ diejenigen von $P$. Die Verrückung der Graden $DC$ in die Lage $D'C$ kann man sich nun dadurch entstanden denken, dass ihr zunächst ein für alle Punkte gleiche Verschiebung ertheilt wird, wobei $D$ nach $D'$ kommt, also die Coordinaten aller Punkte sich um $dx$ und $dy$ ändern, und dass sie alsdann um den Punkt $D'$ als festes Centrum um den unendlich kleinen Winkel $d\varphi$ gedreht wird, wo $\varphi$ den Winkel bezeichnet, den die Grade $DC$ mit der $X$-Axe bildet. So findet man leicht

$$\begin{aligned} d\xi &= dx - p\,d\varphi \sin\varphi \\ dx' &= dx - b\,d\varphi \sin\varphi \\ d\eta &= dy + p\,d\varphi \cos\varphi \\ dy' &= dy + b\,d\varphi \cos\varphi. \end{aligned}$$

Wenn man die erste und dritte dieser Gleichungen mit $b$, die zweite und vierte mit $p$ multiplicirt, alsdann die zweite von der ersten, die vierte von der dritten subtrahirt, so ergiebt sich:

$$\begin{aligned} b\,d\xi &= q\,dx + p\,dx' \\ b\,d\eta &= q\,dy + p\,dy'. \end{aligned}$$

Dies sind die obigen Gleichungen 1) und 2), insofern nämlich $Pn$, $Dd$ und $C'c$ die Absolutwerthe von $d\xi$, $dx$ und $dx'$; $P'n$, $D'd$ und $C'c$ die Absolutwerthe von $d\eta$, $dy$ und $dy'$ sind. Das doppelte Vorzeichen in der Gleichung 2) soll zugleich andeuten, dass $dy$ und $dy'$ gleiche oder entgegengesetzte Zeichen haben können, wobei indessen zu bemerken ist, dass es auch Fälle geben kann, in welchen von den Punkten $D$ und $C$ der eine sich nach der Richtung $AB$, der andere sich nach der Richtung $BA$ (abgesehen von der gleichzeitigen auf $AB$ senkrechten Bewegung) bewegt, in welchen also $dx$ und $dx'$ entgegengesetzten Zeichens sind.

$$1) \qquad b \,.\, Pn = q \,.\, Dd + p \,.\, Cc,$$

$$2) \qquad b \,.\, P'n = q \,.\, D'd \pm p \,.\, C'c,$$

und da, weil die Seitenwege normal auf einander stehen,

$$3) \qquad PP' = \sqrt{Pn^2 + P'n^2},$$

so ergiebt sich hieraus:

$$4) \left\{ \begin{aligned} PP' &= \frac{1}{b}\sqrt{(q \,.\, Dd + p \,.\, Cc)^2 + (q \,.\, D'd \pm p \,.\, C'c)^2} \\ &= \frac{1}{b}\sqrt{q^2 . D'D^2 + p^2 . C'C^2 + 2pq\,(\pm D'd . C'c + Dd . Cc)}, \end{aligned} \right.$$

während die Richtung des secundären Weges durch den Winkel $\gamma$ bestimmt ist, der von derselben mit der Basis $AB$ gebildet wird.

Derselbe ist, da

$$tg(180^0 - \gamma) = \frac{P'n}{Pn} = \frac{q \,.\, D'd \pm p \,.\, C'c}{q \,.\, Dd + p \,.\, Cc},$$

bestimmt mittelst

$$5) \qquad tg\,\gamma = -\frac{q \,.\, D'd \pm p \,.\, C'c}{q \,.\, Dd + p \,.\, Cc}.$$

Es ist aber:

$$\begin{aligned} DD' &= r \,.\, d\alpha, \\ CC' &= R \,.\, d\beta, \\ D'd &= DD' \cos\alpha = r \cos\alpha \,.\, d\alpha, \\ Dd &= DD' \sin\alpha = r \sin\alpha \,.\, d\alpha, \\ C'c &= \pm\, CC' \cos\beta = \pm\, R \cos\beta \,.\, d\beta, \\ Cc &= CC' \sin\beta = R \sin\beta\, d\beta. \end{aligned}$$

Substituirt man diese Werthe in 4) und 5), so erhält man

$$6) \left\{ \begin{aligned} &PP' = \frac{1}{b}\sqrt{q^2 r^2 d\alpha^2 + p^2 R^2 d\beta^2 + 2pqr R\, d\alpha\, d\beta \cos(\beta - \alpha)} \\ &\text{oder:} \\ &PP' = \frac{r\,d\alpha}{b}\sqrt{q^2 + p^2\left(\frac{R\,d\beta}{r\,d\alpha}\right)^2 + 2pq\frac{R\,d\beta}{r\,d\alpha}\cos(\beta - \alpha)} \end{aligned} \right.$$

und

$$7) \left\{ \begin{aligned} &tg\,\gamma = -\frac{qr\cos\alpha\, d\alpha + pR\cos\beta\, d\beta}{qr\sin\alpha\, d\alpha + pR\sin\beta\, d\beta} \\ &\text{oder} \\ &tg\,\gamma = -\frac{q\cos\alpha + p\cos\beta\,\frac{R\,d\beta}{r\,d\alpha}}{q\sin\alpha + p\sin\beta\,\frac{R\,d\beta}{r\,d\alpha}}. \end{aligned} \right.$$

wodurch das Wegelement $PP'$ vollkommen bestimmt ist*)

*) Die obige Entwickelung lässt einige Zweifel hinsichtlich der Vorzeichen, namentlich was die Zulässigkeit der Formeln 6) und 7) für den möglichen Fall betrifft, wo $d\alpha$ und $d\beta$ entgegengesetzte Zeichen haben, d. h. die Arme $AD$ und $BC$ sich in entgegengesetztem Sinn umdrehen, welcher Fall z. B. bei den zu Gradführungen die-

## §. 6.

Wird der erste Arm $AD = r$ in fortlaufender Drehung erhalten, so beschreiben, wie schon gesagt, alle Punkte der Stange, mit Ausnahme von $D$ und $C$ secundäre Curven. Alsdann erscheint Winkel $\alpha$ als unveränderlich, Winkel $\beta$ als abhängig veränderlich von $\alpha$, und die in den Formeln 6) und 7) vorkommenden Quotienten $\frac{d\beta}{d\alpha}$ sind als Differentialquotienten von $\beta$ nach $\alpha$ anzusehen.

---

nenden Vierecksverbindungen vorkommt. Um diese Zweifel aufzuklären, dürfte die folgende Darstellung sich empfehlen:

Während $dx$ stets als absolut oder positiv angenommen werden kann, sei $DD' = r\,d\alpha$ mit $ds$, und $CC'$ oder der Absolutwerth von $R\,d\beta$ mit $ds'$ bezeichnet. Dann ist (siehe vor. Anmerk.)

$$PP' = \sqrt{d\xi^2 + d\eta^2} = \frac{1}{b}\sqrt{(q\,dx + p\,dx')^2 + (q\,dx + p\,dy')^2}$$

$$= \frac{1}{b}\sqrt{q^2\,ds^2 + p^2\,ds'^2 + 2pq\,(dx\,dx' + dy\,dy')}$$

$$= \frac{ds}{b}\sqrt{q^2 + p^2\left(\frac{ds'}{ds}\right)^2 + 2pq\left(\frac{dx}{ds}\frac{dx'}{ds'} + \frac{dy}{ds}\frac{dy'}{ds'}\right)\frac{ds'}{ds}}.$$

Der Ausdruck

$$\frac{dx}{ds}\frac{dx'}{ds'} + \frac{dy}{ds}\frac{dy'}{ds'}$$

ist der Cosinus des Winkels zwischen den Richtungen $DD'$ und $CC'$; dieser Winkel ist $=$ dem Winkel zwischen den Richtungen $AD$ und $BC$, d. h. $= \beta - \alpha$ oder $\alpha - \beta$, wenn die Arme $AD$ und $BC$ sich in gleichem Sinne drehen, dagegen unterscheidet er sich von diesem Winkel um $180^0$, wenn die Arme sich entgegengesetzt drehen. Demnach ist

$$\frac{dx}{ds}\frac{dx'}{ds'} + \frac{dy}{ds}\frac{dy'}{ds'} = \pm \cos(\beta - \alpha),$$

wo das obere oder untere Zeichen gilt, je nachdem $d\beta$ positiv oder negativ ist. Weil nun aber auch

$$\frac{ds'}{ds} = \pm \frac{R\,d\beta}{r\,d\alpha}$$

ist und hier gleichfalls das obere Zeichen zu nehmen ist, wenn $d\beta$ positiv, das untere, wenn $d\beta$ negativ ist, so ist unter allen Umständen

$$PP' = \frac{r\,d\alpha}{b}\sqrt{q^2 + p^2\left(\frac{R\,d\beta}{r\,d\alpha}\right)^2 + 2pq\frac{R\,d\beta}{r\,d\alpha}\cos(\beta - \alpha)}$$

in Uebereinstimmung mit der oben entwickelten Gleichung 6) und wobei nur darauf zu achten ist, dass die Winkel $\alpha$ und $\beta$ stets beide in demselben Sinn herum gerechnet werden müssen.

Was ferner die Richtung $PP'$ betrifft, so ist ganz allgemein die Tangente ihres Winkels $\gamma$ mit der Richtung $AB$, sowohl dem Absolutwerth als dem Zeichen nach richtig:

$$tg\gamma = \frac{d\eta}{d\xi} = \frac{p\,dy + p\,dy'}{p\,dx + p\,dx'} = \frac{q\frac{dy}{ds} + p\frac{dy'}{ds'}\frac{ds'}{ds}}{q\frac{dx}{ds} + p\frac{dx'}{ds'}\frac{ds'}{ds}}.$$

Die Natur der secundären Curve näher zu untersuchen, mögen die Gleichungen derselben für ein rechtwinkliges Coordinatensystem gebildet werden, dessen Anfangspunkt $A$ (s. Taf. II, Fig. 8) ist und dessen erste Axe mit der Basis $AB$ zusammenfällt. Bezeichnen $x$ und $y$ die Coordinaten des Stangenpunktes $P$ und ist $\delta$ der Winkel, den die erste Axe mit der Stange $DC$ bildet, so gehen aus den Gleichungen

$$x = a + R\cos\beta - q\cos\delta$$
$$y = r\sin\alpha + p\sin\delta$$
$$\sin\delta = \frac{R\sin\beta - r\sin\alpha}{b}$$
$$\cos\delta = \frac{a - r\cos\alpha + R\cos\beta}{b}$$

die Bestimmungsgleichungen

$$8)\qquad x = \frac{ap + rq\cos\alpha + Rp\cos\beta}{b}$$

$$9)\qquad y = \frac{rq\sin\alpha + Rp\sin\beta}{b}$$

hervor, die, indem man differenzirt,

$$10)\qquad \frac{dx}{d\alpha} = -\frac{rq\sin\alpha + Rp\sin\beta\frac{d\beta}{d\alpha}}{b},$$

---

Nun sind $\frac{dx}{ds}$ und $\frac{dy}{ds}$ bezüglich der *Cos.* und *Sin.* des Winkels zwischen den Richtungen $DD'$ und $AB'$, und dieser Winkel ist immer $= \alpha + \frac{\pi}{2}$; $\frac{dx'}{dy'}$ und $\frac{dy'}{ds'}$ sind dagegen beziehlich der *Cos.* und *Sin.* des Winkels zwischen den Richtungen $CC'$ und $AB'$, und dieser Winkel ist $= \beta \pm \frac{\pi}{2}$, jenachdem $d\beta$ positiv oder negativ ist. Also hat man

$$\frac{dx}{ds} = \cos\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin\alpha$$
$$\frac{dy}{ds} = \sin\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) = \cos\alpha$$
$$\frac{dx'}{ds'} = \cos\left(\beta + \frac{\pi}{2}\right) = \mp\sin\beta$$
$$\frac{dy'}{ds'} = \sin\left(\beta + \frac{\pi}{2}\right) = \pm\cos\beta,$$

folglich, weil auch $\frac{ds'}{ds} = \pm\frac{R\,d\beta}{r\,d\alpha}$ ist und sämmtliche obere oder sämmtliche untere Vorzeichen zusammengenommen werden müssen:

$$tg\,\gamma = \frac{q\cos\alpha + p\cos\beta\frac{R\,d\beta}{r\,d\alpha}}{-q\sin\alpha - p\sin\beta\frac{R\,d\beta}{r\,d\alpha}}.$$

$$11)\qquad \frac{dy}{d\alpha} = \frac{rq\cos\alpha + Rp\cos\beta\,\frac{d\beta}{d\alpha}}{b},$$

ferner, welche Gleichungen durch Division

$$12)\qquad \frac{dy}{dx} = -\frac{rq\cos\alpha + Rp\cos\beta\,\frac{d\beta}{d\alpha}}{rq\sin\alpha + Rp\sin\beta\,\frac{d\beta}{d\alpha}},$$

ergeben, ein Resultat, das auch aus der zweiten der Gleichungen 7) unmittelbar hervorgeht, da $tg\,\gamma = \frac{dy}{dx}$ ist.

Wird mit $v$ die Geschwindigkeit des Hauptpunktes $D$ und mit $V$ die des Hauptpunktes $C$, mit $v_s$ aber die des Nebenpunktes $P$ und mit $dt$ das Differential der Zeit bezeichnet, so ist

$$\begin{aligned} v_s &= \frac{PP'}{dt} \\ &= \frac{r\,d\alpha}{b\,dt}\sqrt{q^2 + p^2\left(\frac{R\,d\beta}{r\,d\alpha}\right)^2 + 2pq\frac{R\,d\beta}{r\,d\alpha}\cos(\beta-\alpha)} \\ &= \frac{r\,d\alpha : dt}{b}\sqrt{q^2 + p^2\left(\frac{R\,d\beta : dt}{r\,d\alpha : dt}\right)^2 + 2pq\frac{R\,d\beta : dt}{r\,d\alpha : dt}\cos(\beta-\alpha)}, \end{aligned}$$

also

$$13)\qquad v_s = \frac{v}{b}\sqrt{q^2 + p^2\left(\frac{V}{v}\right)^2 + 2pq\,\frac{V}{v}\cos(\beta-\alpha)}.$$

Die Gleichungen 7), 8), 9) und 13) stellen die secundäre Bewegung und ihre Abhängigkeit von der primären Bewegung im Allgemeinen fest *).

## §. 7.

Zur Bestimmung des Quotienten $\frac{R\,d\beta}{r\,d\alpha}$ oder des Differentialquotienten $\frac{d\beta}{d\alpha}$ werde beachtet, dass zwischen den Bestimmungstücken des Bewegungsvierecks $ABCD$ (s. Taf. II, Fig. 8) die Gleichung

$$b^2 = (a + R\cos\beta - r\cos\alpha)^2 + (R\sin\beta - r\sin\alpha)^2$$

stattfindet und dass diese Gleichung auf Null reducirt als eine Function von $\alpha$ und $\beta$ betrachtet werden kann, in der $\beta$ eine Function von $\alpha$ ist. Schreibt man daher

*) Durch die Entwickelung in diesem Paragraph wird der Ausdruck 7) oder 12) von $tg\,\gamma$ mit derselben Allgemeinheit und Strenge gerechtfertigt wie durch die Darstellung der vorigen Anmerkung. Was die Gleichung 13) betrifft, so bleibt sie richtig auch wenn der zweite Arm $BC$ sich im entgengesetzten Sinne des ersten dreht; nur muss dann $V$ negativ genommen werden, falls $v$ stets absolut genommen wird.

$$f(\alpha,\beta) = (a + R\cos\beta - r\cos\alpha)^2 + (R\sin\beta - r\sin\alpha)^2 - b^2$$

und differenzirt partiell nach $\alpha$, so ergiebt sich

$$\frac{df(\alpha,\beta)}{d\alpha} = 2r\,[a\sin\alpha - R\sin(\beta-\alpha)]$$

und, indem man partiell nach $\beta$ differenzirt,

$$\frac{df(\alpha,\beta)}{d\beta} = -2R\,[a\sin\beta - r\sin(\beta-\alpha)].$$

Da

$$\frac{d\beta}{d\alpha} = -\frac{\frac{df(\alpha,\beta)}{d\alpha}}{\frac{df(\alpha,\beta)}{d\beta}}$$

so ist im vorliegenden Falle

$$\frac{d\beta}{d\alpha} = \frac{r}{R} \cdot \frac{a\sin\alpha - R\sin(\beta-\alpha)}{a\sin\beta - r\sin(\beta-\alpha)}$$

und

$$14)\qquad \frac{R \cdot d\beta}{r \cdot d\alpha} = \frac{a\sin\alpha - R\sin(\beta-\alpha)}{a\sin\beta - r\sin(\beta-\alpha)}$$

sowie, da

$$\frac{V}{v} = \frac{R\,d\beta}{r\,d\alpha},$$

auch

$$\frac{V}{v} = \frac{a\sin\alpha - R\sin(\beta-\alpha)}{a\sin\beta - r\sin(\beta-\alpha)}.$$

§. 8.

Der Ausdruck $a\sin\alpha - R\sin(\beta-\alpha)$ ist die Normale vom Hauptpunkt $C$ des zweiten Arms $BC$ auf die Richtung des ersten Arms $AD$, und der Ausdruck $a\sin\beta - r\sin(\beta-\alpha)$ ist die Normale vom Hauptpunkt $D$ des ersten Arms $AD$ auf die Richtung des zweiten $BC$. Der Kürze halber werde die erstere Normale von $C$ auf die Richtung von $AD$ mit $N_2$, die leztere von $D$ auf $BC$ mit $N_1$ bezeichnet. Alsdann erhält man statt des Ausdrucks 14)

$$15)\qquad \frac{R \cdot d\beta}{r \cdot d\alpha} = \frac{V}{v} = \frac{N_2}{N_1},$$

d. h. die Geschwindigkeiten der Hauptpunkte, oder die gleichzeitigen Wege derselben im Differential der Zeit, verhalten sich wie die Normalen, welche aus ihnen auf die gegenüber stehenden Arme gefällt werden können.

Wird (s. Taf. II, Fig. 8) der Viereckswinkel am Hauptpunkt $D$ mit $\psi$ und der Viereckswinkel am Hauptpunkt $C$ mit $\varphi$ bezeichnet, so ergiebt sich $N_2 = b \cdot \psi$ und $N_1 = b \cdot \sin\varphi$, mithin

$$16)\qquad \frac{V}{v} = \frac{N_2}{N_1} = \frac{\sin\psi}{\sin\varphi}$$

d. h. die Geschwindigkeiten der Hauptpunkte verhalten sich wie die Sinus der Winkel, deren Ecken sie bilden.

Für den Quotienten $\frac{R\,d\beta}{r\,d\alpha}$ werde der Gleichwerth $\frac{\sin\psi}{\sin\varphi}$ in der Formel 12) welche die Tangente der secundären Curve des Punktes $P$ bestimmt, substituirt. Alsdann ergiebt sich in

$$tg\,\gamma = -\frac{q\cos\alpha + p\cos\beta\,\frac{\sin\psi}{\sin\varphi}}{q\sin\alpha + p\sin\beta\,\frac{\sin\psi}{\sin\varphi}}$$

$$17)\qquad = -\frac{q\cos\alpha\sin\varphi + p\cos\beta\sin\psi}{q\sin\alpha\sin\varphi + p\sin\beta\sin\psi}$$

eine Gleichung, die eine überaus bemerkenswerthe Beziehung zwischen den Viereckswinkeln und dem Winkel darlegt, den die Tangente der secundären Curve mit der ersten Axe bildet.

§. 9.

Wenn man in 13) den in 16) gegebenen Gleichwerth $\frac{\sin\psi}{\sin\varphi}$ des Quotienten $\frac{V}{v}$ einsetzt, so erhält man in

$$18)\begin{cases} v_s = \frac{v}{b}\sqrt{q^2 + p^2\left(\frac{\sin\psi}{\sin\varphi}\right)^2 + 2pq\frac{\sin\psi}{\sin\varphi}\cos(\beta-\alpha)} \\ \text{oder} \\ v_s = \frac{v}{b\sin\varphi}\sqrt{(q\sin\varphi)^2 + (p\sin\psi)^2 + 2pq\sin\psi\sin\varphi\cos(\beta-\alpha)} \end{cases}$$

eine einfachere Beziehung zwischen der secundären Geschwindigkeit, der primären Geschwindigkeit und den Winkeln des Bewegungsvierecks.

Fällt man von dem Punkt $P$ (s. Taf. II, Fig. 8) Normalen $PE$ und $PF$ auf die Richtungen der Arme, so ist $p\sin\psi = PF$, $q\sin\varphi = PE$, und da $b\sin\varphi = N_1$, so ergiebt sich aus der vorstehenden Gleichung

$$v_s = \frac{v}{N_1}\sqrt{PE^2 + PF^2 + 2 \,.\, PE \,.\, PF \,.\, \cos(\beta-\alpha)}$$

und weil Winkel $FOE = \beta - \alpha$, sowie $FPE = 180^0 - FOE$:

$$v_s = \frac{v}{N_1}\sqrt{PE^2 + PF^2 - 2 \,.\, PE \,.\, PF \,.\, \cos FPE}$$

$$= v\,\frac{FE}{N_1}$$

oder, wenn die Verbindungslinie $FE$ der Fusspunkte der Normalen $PE$ und $PF$ mit $s$ bezeichnet wird:

$$v_s = v\,\frac{s}{N_1}.$$

Die secundären Geschwindigkeiten der verschiedenen

**Stangenpunkte verhalten sich demnach zu einander wie die graden Linien, welche die Fusspunkte der Normalen aus jenen Punkten auf die Arme verbinden.**

Vierecke, welche in dem Ergänzungsdreieck $CDO$ dadurch gebildet werden, dass man von einem Stangenpunkte $P$ Normalen $PE$ und $PF$ auf die Richtungen der Arme fällt, sind in Kreisen eingeschrieben; desshalb $\angle FEP = \angle FOP$ und

$$\frac{FE}{FP} = \frac{\sin FPE}{\sin FEP}.$$

Da $FP = OP.\sin FOP$, so folgt hieraus unmittelbar

$$FE = OP.\sin FPE$$

oder, was dasselbe sagt, wenn $OP = l$ gesetzt wird,

$$s = l \sin(\beta - \alpha);$$

und ebenso, wenn $l'$ die Verbindungslinie $OP'$ eines andern Stangenpunkts $P'$ mit dem Scheitel $O$ und $s'$ die Verbindungslinie der Fusspunkte der entsprechenden Normalen ist,

$$s' = l' \sin(\beta - \alpha).$$

Hieraus folgt dann $\frac{s}{s'} = \frac{l}{l'}$ und weil $\frac{v_s}{v'_s} = \frac{s}{s'}$,

$$19) \qquad \frac{v_s}{v'_s} = \frac{l}{l'}$$

d. h. **die secundären Geschwindigkeiten der Stangenpunkte verhalten sich wie ihre Abstände vom Scheitel des Ergänzungsdreiecks.**

Der Satz gilt auch für die primären Geschwindigkeiten der Hauptpunkte. Im Allgemeinen verhalten sich daher die Geschwindigkeiten aller Stangenpunkte wie ihre Entfernungen vom Scheitel des Ergänzungsdreiecks.

Da der Scheitel $O$ des Ergänzungsdreiecks durch dieses Gesetz von besonderer Wichtigkeit für die Bestimmung der secundären Geschwindigkeiten wird, wollen wir ihn **Bestimmungspunkt** und die Curve, welche er beschreibt, **Bestimmungscurve** der secundären Curven nennen, welche von den Punkten der Stange des Bewegungsvierecks bei dessen Verschiebungen beschrieben werden.

Die Beziehungen der Winkel im Dreieck $DOC$ ergeben, dass

$$\varphi = 180^0 - \psi + \beta - \alpha$$

und daher $\cos(\beta - \alpha) = -\cos(\varphi + \psi)$ geschrieben werden kann. Die Gleichung 18) geht mit Berücksichtigung dieses Umstandes in

$$v_s = \frac{v}{b \sin \varphi} \sqrt{(q \sin \varphi)^2 + (p \sin \psi)^2 - 2pq \sin \varphi \sin \psi \cos(\varphi + \psi)}$$

über, welche Gleichung, indem man $q = b - p$ schreibt und dann reducirt,

$$20) \quad v_s = \frac{v}{b \sin \varphi} \sqrt{(b \sin \varphi)^2 + [p \sin(\varphi + \psi)]^2 - 2bp \sin \varphi \sin(\varphi + \psi) \cos \psi}$$

ergiebt, ein Ausdruck, in welchem die secundäre Geschwindigkeit nur noch

als Function der beiden Viereckswinkel $\varphi$ und $\psi$ auftritt, und aus dem die Gleichung 16) hervorgeht, wenn man $p=b$ setzt.

§. 10.

Die Normale einer ebenen Curve $f(x, y)=0$ in einem Punkte $x, y$ ist bestimmt durch die Gleichung $\frac{\eta-y}{\xi-x}=-\frac{1}{\frac{dy}{dx}}$ unter $\xi$, $\eta$ die laufenden Coordinaten der Normalen verstanden. Die Gleichung der Normalen der secundären Curve des Stangenpunktes $x, y$, welcher durch die Abmessung $p$ auf der Stange bestimmt ist, ist daher, weil nach 12) und 15)

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{q\cos\alpha+p\cos\beta\frac{R\,d\beta}{r\,d\alpha}}{q\sin\alpha+p\sin\beta\frac{R\,d\beta}{r\,d\alpha}}$$

$$=-\frac{q\,N_1\,.\cos\alpha+p\,N_2\,.\cos\beta}{q\,N_1\,.\sin\alpha+p\,N_2\,.\sin\beta}$$

geschrieben werden kann,

$$\frac{\eta-y}{\xi-x}=-\frac{q\,N_1\,.\sin\alpha+p\,.\,N_2\,.\sin\beta}{q\,N_1\,.\cos\alpha+p\,.\,N_2\,.\cos\beta},$$

und daher der Winkel $\chi$, den die Normale mit der ersten Axe bildet, bestimmt durch

$$21)\qquad tg\,\chi=\frac{q\,N_1\,.\sin\alpha+p\,N_2\,.\sin\beta}{q\,N_1\,.\cos\alpha+p\,N_2\,.\cos\beta}.$$

Die Normale der secundären Curve und die grade Verbindungslinie des Bestimmungspunkts $O$ mit dem beschreibenden Punkt $P$ haben diesen letzteren Punkt gemein. Um die Lage derselben gegeneinander festzustellen, werde der Winkel $\chi'$ ermittelt, den diese Verbindungslinie mit der ersten Axe bildet. Sind $x, y$ die Coordinaten des Punktes $P$ und $x', y'$ die des Punktes $O$, so ist

$$tg\,\chi'=\frac{y'-y}{x'-x}.$$

Nun ist, wie leicht erhellt,

$$y'=\frac{a\sin\beta\sin\alpha}{\sin(\beta-\alpha)}$$

$$x'=\frac{a\sin\beta\cos\alpha}{\sin(\beta-\alpha)},$$

während nach 8) und 9)

$$y=\frac{r\,q\sin\alpha+R\,p\sin\beta}{b}$$

$$x=\frac{ap+rq\cos\alpha+Rp\cos\beta}{b}$$

ist. Diese Werthe in obigem Ausdruck substituirt ergeben

$$tg\,\chi' = \frac{\frac{a \sin\beta \sin\alpha}{\sin(\beta-\alpha)} - \frac{rq \sin\alpha + Rp \sin\beta}{b}}{\frac{a \sin\beta \cos\alpha}{\sin(\beta-\alpha)} - \frac{ap + rq\cos\alpha + Rp\cos\beta}{b}},$$

woraus mit Berücksichtigung, dass $b = p + q$ ist,

$$tg\,\chi' = \frac{q \sin\alpha\,[a \sin\beta - r \sin(\beta-\alpha)] + p \sin\beta\,[a \sin\alpha - R \sin(\beta-\alpha)]}{q \cos\alpha\,[a \sin\beta - r \sin(\beta-\alpha)] + p \cos\beta\,[a \sin\alpha - R \sin(\beta-\alpha)]}$$

$$= \frac{q N_1 . \sin\alpha + p N_2 . \sin\beta}{q N_1 . \cos\alpha + p N_2 . \cos\beta}$$

hervorgeht. Es ist daher $tg\,\chi = tg\,\chi'$. Die Normale in $P$ und die grade Verbindungslinie $PO$ sind daher parallel, und da sie den Punkt $P$ gemein haben, so fallen sie zusammen. Aus alledem folgt dann aber, dass

1) die Normalen sämmtlicher secundären Curven durch den Bestimmungspunkt gehen, oder
2) die Tangenten der secundären Curven normal stehen auf den graden Verbindungslinien des Erzeugungspunkts und des Bestimmungspunkts.

Diese Sätze legen äusserst wichtige Beziehungen der secundären Curven unmittelbar vor Augen und gestatten einfache Constructionen der Hauptlinien derselben. So ergiebt sich z. B. die weiteste Ausdehnung der Curve (indem man erwägt, dass die Curvenpunkte, welche am weitesten von den Axen abstehen, in den Berührungspunkten der Tangenten erhalten werden, die parallel den Axen liegen) einfach durch die Lagen des beschreibenden Punktes, in denen die grade Verbindungslinie mit dem Bestimmungspunkt parallel den Axen geht. Die Bestimmung anderer besonderer Fälle erfolgt eben so einfach und übersichtlich.

## §. 11.

Da sich die Normalen der secundären Curven aller Stangenpunkte für jede Lage in dem Bestimmungspunkt $O$ schneiden, ausserdem aber die gleichzeitigen Geschwindigkeiten jener Punkte sich wie die Entfernungen derselben vom Bestimmungspunkt verhalten, so folgt, dass jede kleinste Bewegung der Stange als eine Drehung um den Bestimmungspunkt $O$ zu betrachten ist.

Denn bezeichnen $v_s$ und $v_s'$ die secundären Geschwindigkeiten zweier Stangenpunkte, deren Abstände vom Bestimmungspunkt beziehlich $l$ und $l'$ sind, so ist die Winkelgeschwindigkeit des ersten Punktes $\frac{v_s}{l}$ und die des andern $\frac{v_s}{v'_s} = \frac{l}{l'}$, so folgt auch $\frac{v_s}{l} = \frac{v'_s}{l'}$, d. h. die Winkelgeschwindigkeiten der beiden Punkte in Bezug auf Drehung um $O$ sind gleich, und desshalb die Drehung ein und dieselbe.

Die Drehung des Hauptpunktes $D$ um den festen Punkt $A$ ist desshalb

auch eine Drehung um den veränderlichen Bestimmungspunkt $O$. Hieraus ergiebt sich die Grösse des unendlich kleinen Drehungswinkels, welcher beschrieben wird, während die Stange sich um $O$ dreht, mit Hülfe der Gleichung

$$r \,.\, d\alpha = DO \,.\, d(\beta - \alpha),$$

welche erhellt, indem man erwägt, dass $\angle DOC = \beta - \alpha$ ist und der Elementarweg des Punktes $D$ einmal als Bogenelement eines Kreises um $A$ und das anderemal als Bogenelement eines Kreises um $O$ aufgefasst werden kann.

Der Winkel $d(\beta - \alpha) = d\beta - d\alpha$, welcher bei der Drehung der Stange um $O$ beschrieben wird, während der erste Arm den unendlich kleinen Winkel $d\alpha$ beschreibt, ist die Differenz der Winkel beider Arme, die dieselben während dieses Vorgangs durchlaufen. Die Gleichung $d(\beta - \alpha) = d\beta - d\alpha$ ergiebt daher unmittelbar, dass die Winkelgeschwindigkeit der Drehung der Stange um den Bestimmungspunkt gleich der Differenz der Winkelgeschwindigkeiten der beiden Arme ist.

Da der Abstand $OD$, wie aus Fig. 8 sofort ersichtlich, $= \frac{N_1}{\sin(\beta - \alpha)}$ ist, so nimmt vorstehende Gleichung die Form

$$r\, d\alpha = \frac{N_1}{\sin(\beta - \alpha)} \,.\, d(\beta - \alpha)$$

an, aus welcher, wenn $w$ die Winkelgeschwindigkeit des Arms $AD$ und $w_s$, die Winkelgeschwindigkeit der Stange mit Bezug auf Drehung um den Bestimmungspunkt bezeichnen, die Gleichung

$$22)\qquad \frac{w_s}{w} = \frac{d(\beta - \alpha)}{d\alpha} = \frac{r \sin(\beta - \alpha)}{N_1}$$

hervorgeht. Andererseits ist aber, weil

$$\frac{d(\beta - \alpha)}{d\alpha} = \frac{d\beta}{d\alpha} - 1 \text{ und } \frac{d\beta}{d\alpha} = \frac{r \sin\psi}{R \sin\varphi} = \frac{r N_2}{R N_1},$$

auch

$$23)\qquad \frac{w_s}{w} = \frac{r \sin\varphi - R \sin\varphi}{R \sin\varphi} = \frac{r \,.\, N_2 - R \,.\, N_1}{R \,.\, N_1}$$

und ist damit die Relation zwischen den Winkelgeschwindigkeiten des ersten Arms und der Stange einerseits und zweien Viereckswinkeln andererseits dargelegt.

§. 12.

Wenn die Endpunkte der Stange $DC$ auf beliebigen Curven liegen und eine kleinste Verrückung dieser Punkte auf den Curven vorgenommen wird, so können diese Verrückungen um Bogenelemente jener Curven als Drehungen betrachtet werden, welche um die Endpunkte der Krümmungshalbmesser jener Curvenpunkte erfolgen. Nach dem Vorhergehenden ist die Bewegung der Stange aber auch eine Drehung um den Durchschnittspunkt $O$ jener Krümmungshalbmesser. Daraus folgt dann der allgemeine Satz:

Hat eine Grade mit zwei Curven beziehlich je einen Punkt gemein und wird die Lage dieser Punkte, welche auf der Graden unverrückbar sind, um einen unendlich kleinen Werth in den Curven verändert, so kann die dabei vorgehende Bewegung als eine unendlich kleine Drehung um den Durchschnittspunkt der Krümmungshalbmesser der Curvenpunkte angesehen werden, welche dieselben mit der Graden gemein haben.

Es erhellt ferner, dass dieser Satz für jede ebene Figur gilt, von der zwei in ihr unverrückbare Punkte in Curven liegen, sobald diese Punkte ihre Lage in den Curven um unendlich kleine Werthe verändern.

Es muss bemerkt werden, dass Poncelet in seinem *Cours de mécanique appliquée etc.* (deutsch von Schnuse) dieses Princip erwähnt und dasselbe in einzelnen Fällen anwendet. Es ist von Bobillier im Jahre 1829 Poncelet mitgetheilt und später von Chasles im 14. Bande des Bülletins der mathematischen Wissenschaften von Ferussac, S. 321 bekannt gemacht worden. Poncelet giebt das Princip in folgendem Satze:

Wenn eine ebene Figur von einer unveränderlichen aber beliebigen Form und Grösse irgend eine unendlich kleine Verrückung erfährt, ohne aus dieser Ebene gebracht zu werden, so strebt sie, ohne fortzugleiten, sich um einen festen Punkt zu drehen, welchen man vermittelst des Durchschnitts der Normalen der Curvenelemente erhält, welche zwei beliebige Winkelspitzen der Figur gleichzeitig beschreiben.

Der von Chasles ausgesprochene Satz hat mir nicht vorgelegen; die Notiz von Poncelet, welche bereits auf die Bedeutung des darin ausgesprochenen Princips aufmerksam macht, kam mir erst nach Auffindung desselben zu Gesicht. Eine kurze Erwähnung des Satzes findet sich auch in der Ingenieur-Mechanik von Weisbach, Theil I. Ausgänge und Folgerungen, welche die vorhergehenden Nummern enthalten, sind mir nicht bekannt geworden, und, so viel ich weiss, ist der allgemeinen Bedeutung des Bewegungsvierecks für die activen Maschinentheile nirgends Erwähnung gethan*).

*) Es dürfte nicht unangemessen sein, hier darauf aufmerksam zu machen, wie der im Obigen bewiesene interessante und folgenreiche Satz auf eine sehr elementare Weise sich rechtfertigen lässt:

Da die Lage einer unveränderlichen ebenen Figur in ihrer Ebene durch die Lage zweier ihrer Punkte $A$ und $B$ bestimmt ist, so muss nur gezeigt werden, dass die unabänderliche Verbindungslinie $AB$ solcher 2 Punkte dadurch in irgend eine andere um unendlich wenig von $AB$ abweichende Lage $A'B'$ gebracht werden kann, dass man sie um den Durchschnittspunkt $O$ der geraden Linien $AO$ und $BO$, welche in $A$ und $B$ auf den als gerade Linien zu betrachtenden Wegelementen $AA'$ und $BB'$ senkrecht stehen, um einen angemessenen unendlich kleinen Winkel dreht. Dass jeder

## §. 13.

Legt man (s. Taf. II, Fig. 9) durch den festen Drehpunkt $A$ eine Parallele $AC'$ mit dem zweiten Arm $BC$, so ist

$$DO : DA = CO : C'A.$$

Ebenso ist, wenn $P$ und $P'$ entsprechende Stangenpunkte sind, welche gefunden werden, indem man durch $O$ und $A$ Parallelen zieht,

$$PO : P'A = CO : C'A.$$

Durch Zusammensetzung beider Proportionen folgt

$$DO : PO = DA : P'A.$$

Da nun $\frac{v}{v_s} = \frac{DO}{PO}$, so ergiebt sich aus der letzten Proportion

$$v_s = \frac{v}{DA} P'A.$$

Es ist aber $\frac{v}{DA}$ gleich der Winkelgeschwindigkeit des ersten Arms und desshalb

$$v_s = w \,.\, P'A.$$

Dies ist offenbar die Geschwindigkeit eines Punktes $X$ des ersten Arms, dessen Abstand von dem Drehpunkt $A$ gleich $P'A$ ist. Da der Abstand $AX = AP'$ entweder auf dem Arm oder auf der Verlängerung desselben über $A$ hinaus angenommen werden kann, so erhellt, dass der Arm zwei Punkte besitzt, welche sich mit der Geschwindigkeit des Punktes $P$ bewegen.

Es ist ferner klar, dass das für den ersten Arm Erwiesene für den zweiten gilt, und es giebt desshalb auch auf dem zweiten Arme zwei Punkte, deren Geschwindigkeit gleich der des Stangenpunktes $P$ ist. Nennen wir alle Punkte des Bewegungsvierecks, welche sich mit der secundären Geschwindigkeit eines Stangenpunktes bewegen, zugehörige Punkte dieses Punkts, so lässt sich, wenn man erwägt, dass die beiden Punkte der Stange, welche gleich weit ab vom Bestimmungspunkt liegen, gleiche Geschwindigkeiten besitzen, folgendes allgemeine Gesetz aufstellen:

Innerhalb des Bewegungsvierecks haben je sechs Punkte

---

der beiden Punkte $A$ und $B$ allein durch eine Drehung um $O$ in die Lage $A'$ resp. $B'$ gebracht werden kann, bedarf keines Beweises; zu zeigen ist nur, dass beide Drehungen um gleiche Winkel erfolgen müssen, d. h. dass $\angle AOA' = \angle BOB'$ ist oder dass sich verhält

$$OA : OB = AA' : BB'.$$

Zu dem Ende mag man bemerken, dass die Grade $AB$ in die Lage $A'B'$ offenbar dadurch übergeführt werden kann, dass man sie zunächst in die mit $AB$ parallele Lage $A'B''$ verschiebt und dann um den Punkt $A'$ herum in die Lage $A'B'$ dreht. Betrachtet man nun in dem unendlich kleinen Dreieck $BB''B'$ (eine Figur wird man sich leicht an den Rand zeichnen) das Bogenelement $BB''B'$ als grade Linie, so erkennt man sofort, dass es dem Dreieck $OAB$ ähnlich ist, weil die Seiten beider Dreiecke auf einander normal sind ($OA \perp BB''$, $OB \perp BB'$), wesshalb sich verhält

$$OA : OB = BB'' : BB'$$

in Uebereinstimmung mit der obigen zu beweisenden Proportion, weil die gegenüberliegenden Seiten $AA'$ und $BB''$ des Parallelogramms $AA'BB''$ einander gleich sind.

einerlei Geschwindigkeit. Dieselben sind so vertheilt, dass je zwei und zwei auf den Armen und der Stange liegen, und zwar liegen sie auf den Armen zu verschiedenen Seiten der Drehpunkte, und auf der Stange zu verschiedenen Seiten des dem Bestimmungspunkt am nächsten liegenden Stangenpunkts in beziehlich gleichen Abständen, deren Grössen in jedem Augenblick sich ändern.

In Fig. 9 sind die Punkte, welche zu dem Stangenpunkt $P$ gehören, mit $Q$, $X$, $Y$ und $X'$, $Y'$ bezeichnet.

Das Veränderungsgesetz der Lage der zugehörigen Punkte folgt aus der Gleichung:

$$\frac{AP'}{AD} = \frac{OP}{OD} = \frac{1}{\dfrac{a \sin\beta - r \sin(\beta-\alpha)}{\sin(\beta-\alpha)}},$$

aus welcher, da $AP' = AX$ ist, hervorgeht:

$$AX = l\,\frac{r \sin(\beta-\alpha)}{a \sin\beta - r \sin(\beta-\alpha)}$$

25) $$= l\,\frac{r \sin(\beta-\alpha)}{N_1}$$

oder auch, weil nach 22) $\dfrac{r \sin(\beta-\alpha)}{N_1} = \dfrac{d(\beta-\alpha)}{d\alpha}$ ist,

26) $$AX = l\left(\frac{d\beta}{d\alpha} - 1\right).$$

Hierdurch ist, wenn $l$ ermittelt wird, die Lage der vier auf den Armen liegenden zu $P$ gehörigen Punkte bestimmt, da ohne Weiteres ersichtlich ist, dass

$$BX' = l\,\frac{R \sin(\beta-\alpha)}{N_2}$$

oder

$$BX' = l\left(\frac{d\alpha}{d\beta} - 1\right).$$

sein muss.

## §. 14.

Die vollständige Bestimmung der zu $P$ gehörigen Punkte erfordert die Näherbestimmung des Abstandes $PO = l$ des Punktes $P$ von dem Bestimmungspunkt $O$.

Es ist, wenn $x$ und $x'$ beziehlich die Abscissen der Punkte $P$ und $O$ bezeichnen und $\chi$ der Winkel ist, den die Linie $PO$ mit der ersten Axe bildet, bekanntlich:

$$l = (x' - x)\sqrt{1 + tg\,\chi^2}.$$

Da nun nach Früherem

$$x = \frac{ap + rq \cos\alpha + Rp \cos\beta}{b}$$

$$x' = \frac{a \sin\beta \cos\alpha}{\sin(\beta-\alpha)}$$

$$tg\chi = \frac{q \sin\alpha \,.\, N_1 + p \sin\beta \,.\, N_2}{q \cos\alpha \,.\, N_1 + p \cos\beta \,.\, N_2}$$

ist, so ergiebt sich hieraus, indem man zunächst berücksichtigt, dass

$$x' - x = \frac{ab \cos\alpha \sin\beta - ap \sin(\beta-\alpha) - rq \cos\alpha \sin(\beta-\alpha) - Rp \cos\beta \sin(\beta-\alpha)}{b \sin(\beta-\alpha)}$$

$$= \frac{q \cos\alpha\, [a \sin\beta - r \sin(\beta-\alpha)] + p \cos\beta\, [a \sin\alpha - R \sin(\beta-\alpha)]}{b \sin(\beta-\alpha)}$$

$$= \frac{q \cos\alpha \,.\, N_1 + p \cos\beta \,.\, N_2}{b \sin(\beta-\alpha)}$$

ist, dann für $x'-x$ diesen Ausdruck und für $tg\chi$ den angegebenen Gleichwerth substituirt:

$$l = \frac{q \cos\alpha \,.\, N_1 + p \cos\beta \,.\, N_2}{b \sin(\beta-\alpha)} \,.\, \sqrt{\frac{(q \cos\alpha \,.\, N_1 + p \cos\beta \,.\, N_2)^2 + (q \sin\alpha \,.\, N_1 + p \sin\beta\, N_2)^2}{(q \cos\alpha\, N_{,} + p \cos\beta \,.\, N_{,,})^2}}$$

$$27) \quad = \frac{\sqrt{q^2 N_1^2 + p^2 \,.\, N_2^2 + 2pq\, N_1 \,.\, N_2 \cos(\beta-\alpha)}}{b \sin(\beta-\alpha)}$$

oder, da $b \sin\varphi = N_1$, und $\frac{\sin\psi}{\sin\varphi} = \frac{N_1}{N_2}$ ist,

$$28) \quad l = \frac{\sqrt{(q \sin\varphi)^2 + (p \sin\psi)^2 + 2 \,.\, q \sin\varphi \,.\, p \sin\psi \,.\, \cos(\beta-\alpha)}}{\sin(\beta-\alpha)}.$$

Es ist aber der Werth der Wurzel nach den Entwickelungen in §. 9 gleich der Verbindungslinie $s$ der Fusspunkte der Normalen vom Stangenpunkt $P$ auf die Arme; nach jenem §. ist nämlich auch

$$29) \qquad l = \frac{s}{\sin(\beta-\alpha)}.$$

Da ferner $\varphi = 180^0 - \psi + (\beta - \alpha)$, so ist

$\sin(\beta-\alpha) = -\sin(\varphi+\psi)$ und $\cos(\beta-\alpha) = -\cos(\varphi+\psi)$

und desshalb, wenn man Gleichung 20) berücksichtigt,

$$30) \quad l = \frac{\sqrt{(b \sin\varphi)^2 + [p \sin(\varphi+\psi)]^2 - 2\, bp \sin\varphi \sin(\varphi+\psi) \cos\psi}}{-\sin(\varphi+\psi)}.$$

Hieraus erhält man für $p=0$ die Verbindungslinie des ersten Hauptpunkts mit dem Bestimmungspunkt:

$$DO = -\frac{b \sin\varphi}{\sin(\varphi+\psi)}$$

und für $p = \frac{b}{2}$ die Verbindungslinie des Stangenmittelpunktes $M$ mit dem Bestimmungspunkt:

$$31) \qquad MO = b \frac{\sqrt{\sin^2(\varphi+\psi) - 4 \sin\varphi \sin\psi \cos(\varphi+\psi)}}{-\sin(\varphi+\psi)},$$

sowie durch entsprechende Einsetzung besonderer Werthe von $p$ die Verbindungslinien der dadurch bestimmten Punkte mit dem Bestimmungspunkt als Functionen von $\varphi$ und $\psi$.

## §. 15.

Bestimmungspunkt und Bestimmungscurve drängen sich überall als bedeutungsvoll in Hinsicht auf die secundären Curven des Bewegungsvierecks auf. In der That erscheint die Bestimmungscurve als der Ort für die Mittelpunkte von Kreisen, welche von den secundären Curven umhüllt werden und deren Radien die Entfernungen der betreffenden Stangenpunkte von dem Bestimmungspunkte sind. Diese veränderlichen Radien sind die Entfernungen $l$, welche in ihrer Abhängigkeit von der augenblicklichen Gestalt des Vierecks und der Lage des Stangenpunkts auf der Stange durch 28), 29) und 30) gegeben sind. Jedem Stangenpunkt entspricht eine besondere secundäre Curve und ein besonderes System von umhüllten Kreisen; diese sind nichts anderes als die Elementarkreise von Kreis-Coordinaten, deren Axe $r=0$ die Bestimmungscurve ist. (Druckenmüller, Uebertragungsprincipien der analytischen Geometrie, Seite 89 u. f.) Die secundären Curven stehen also mit den Kreis-Coordinaten der Axe $r=0$, wenn als solche die Bestimmungscurve gewählt wird, in innigstem Zusammenhange, so dass man die Bestimmungen derselben mittelst solcher Coordinaten als die natürliche im vorliegenden Falle bezeichnen könnte.

Die Bestimmungscurve ist durch rechtwinklige Coordinaten, deren erste Axe $AB$ (s. Taf. II, Fig. 10) und deren Anfangspunkt $A$ ist, mittelst

$$32) \qquad \begin{cases} x=\dfrac{a \sin\beta \cos\alpha}{\sin(\beta-\alpha)} \\ y=\dfrac{a \sin\beta \sin\alpha}{\sin(\beta-\alpha)} \end{cases}$$

gegeben. Indem man diese Gleichungen, unter der Annahme, dass $\alpha$ unveränderlich und $\beta$ abhängig veränderlich ist, differenzirt, erhält man

$$\frac{dx}{d\alpha}=\left(\sin\beta\cos\beta-\sin\alpha\cos\alpha\frac{d\beta}{d\alpha}\right)\frac{a}{\sin^2(\beta-\alpha)}$$

und

$$\frac{dy}{d\alpha}=\left(\sin^2\beta-\sin^2\alpha\frac{d\beta}{d\alpha}\right)\frac{a}{\sin^2(\beta-\alpha)};$$

hieraus aber durch Division

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\sin^2\beta-\sin^2\alpha\dfrac{d\beta}{d\alpha}}{\sin\beta\cos\beta-\sin\alpha\cos\alpha\dfrac{d\beta}{d\alpha}}.$$

Setzt man hierin $\dfrac{d\beta}{d\alpha}=\dfrac{r\,.\,N_2}{R\,.\,N_1}$ oder $\dfrac{d\beta}{d\alpha}=\dfrac{r\sin\psi}{R\sin\varphi}$, so geht der Ausdruck in

$$33) \begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{R N_1 \sin^2\beta - r N_2 \sin^2\alpha}{R N_1 \sin\beta\cos\beta - r N_2 \sin\alpha\cos\alpha} \\ \text{oder} \\ \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{R \sin\varphi \sin^2\beta - r \sin\psi \sin^2\alpha}{R \sin\varphi \sin\beta \cos\beta - r \sin\psi \sin\alpha \cos\alpha} \end{cases}$$

über. Daraus ergeben sich für die Tangente und Normale eines Punktes $(x', y')$ alsdann die Gleichungen:

$$\text{Tangente: } \frac{y-y'}{x-x'} = \frac{R \sin^2\beta \sin\varphi - r \sin^2\alpha \sin\psi}{R \sin\beta \cos\beta \sin\varphi - r \sin\alpha \cos\alpha \sin\psi}$$

$$\text{Normale: } \frac{y-y'}{x-x'} = \frac{r \sin\alpha \cos\alpha \sin\psi - R \sin\beta \cos\beta \sin\varphi}{R \sin^2\beta \sin\varphi - r \sin^2\alpha \sin\psi}.$$

Die Normale kann aber auch bestimmt werden mittelst des Winkels $\xi$ (s. Taf. II, Fig. 10), den die Normale $ON$ der Bestimmungscurve mit der Normale $OP$ einer zugehörigen secundären Curve einschliesst, da nach der Lehre von den Kreis-Coordinaten*) der Neigungscoefficient, d. h. der Cosinus des Winkels, den der Radius eines Elementes mit der Axe bildet, bestimmt ist mittelst

$$\cos POO' = -\frac{dl}{ds}$$

worin $dl$ das Differential des Radius $OP = l$ und $ds$ das Differential des Bogens der Bestimmungscurve bezeichnen. Es ist aber $\angle POO' = 90^0 - \xi$ und desshalb

$$\sin\xi = -\frac{dl}{ds}.$$

Das Differential $dl$ ist äusserst zusammengesetzt. Das Differential $ds$ bestimmt sich mittelst

$$ds = \sqrt{dy^2 + dx^2}$$

$$= \frac{a\,d\alpha}{\sin^2(\beta-\alpha)} \sqrt{\left(\sin^2\beta - \sin^2\alpha \frac{d\beta}{d\alpha}\right)^2 + \left(\sin\beta\cos\beta - \sin\alpha\cos\alpha \frac{d\beta}{d\alpha}\right)^2}$$

$$= \frac{a\,d\alpha}{\sin^2(\beta-\alpha)} \sqrt{\sin^2\beta + \sin^2\alpha \frac{d\beta^2}{d\alpha^2} - 2\sin\beta\sin\alpha \frac{d\beta}{d\alpha}\cos(\beta-\alpha)}$$

und, wenn man $\dfrac{d\beta}{d\alpha} = \dfrac{r \sin\psi}{R \sin\varphi}$ setzt,

$$ds = \frac{a \,.\, d\alpha}{R \sin\varphi \sin^2(\beta-\alpha)} \,.\, \sqrt{R^2 \sin^2\varphi \sin^2\beta + r^2 \sin^2\psi \sin^2\alpha - 2 r R \sin\alpha \sin\beta \sin\varphi \sin\psi \cos(\beta-\alpha)}.$$

Wählt man als Anfangspunkt irgend einen bestimmten Punkt der Curve, welcher dem Winkel $\alpha'$ des ersten Arms entsprechend ist, so ist der Bogen, welcher erzeugt wird, während der Winkel $\alpha'$ in $\alpha''$ übergeht, mittelst der Gleichung

*) Druckenmüller, Uebertragungsprincipien der analyt. Geometrie. Viertes Kapitel, §. 3.

$$s = \frac{a}{R} \int_{\alpha'}^{\alpha''} \frac{d\alpha}{\sin\varphi \sin^2(\beta - \alpha)}$$

$$. \sqrt{R^2 \sin^2\varphi \sin^2\beta + r^2 \sin^2\psi \sin^2\alpha - 2\, r\, R \sin\alpha \sin\beta \sin\varphi \sin\psi \cos(\beta - \alpha)}$$

gegeben. Ist $S$ der diesem Bogen entsprechende Bogen der secundären Curve, so hat man, weil

$$dS = \sqrt{dy^2 + dx^2}$$

$$= \frac{d\alpha}{b} \sqrt{\left(rq \sin\alpha + Rp \sin\beta \frac{d\beta}{d\alpha}\right)^2 + \left(rq \cos\alpha + Rp \cos\beta \frac{d\beta}{d\alpha}\right)^2}$$

$$= \frac{d\alpha}{b} \sqrt{r^2 q^2 + R^2 p^2 \left(\frac{d\beta}{d\alpha}\right)^2 + 2 r R p q \frac{d\beta}{d\alpha} \cos(\beta - \alpha)}$$

$$= \frac{d\alpha \,.\, r}{b \,.\, \sin\varphi} \sqrt{q^2 \sin^2\varphi + p^2 \sin^2\psi + 2 p q \sin\varphi \sin\psi \cos(\beta - \alpha)}$$

ist, zwischen den Grenzen:

$$S = \frac{r}{b} \int_{\alpha'}^{\alpha''} \frac{d\alpha}{\sin\varphi} \sqrt{q^2 \sin^2\varphi + p^2 \sin^2\psi + 2 p q \sin\varphi \sin\psi \cos(\beta - \alpha)}.$$

## §. 16.

Die Geschwindigkeit des zweiten Hauptpunktes $C$ folgt aus der Geschwindigkeit des ersten Hauptpunkts $D$ mittelst Gleichung 16), nach welcher

$$V = v \frac{\sin\psi}{\sin\varphi}$$

ist, und aus der hervorgeht, dass $V$ dasselbe Vorzeichen behält, die Bewegung des zweiten Hauptpunkts also in derselben Richtung erfolgt wie die des ersten, so lange $\sin\psi$ und $\sin\varphi$ dasselbe Vorzeichen besitzen. Daraus folgt dann aber, dass beide Hauptpunkte sich nach ein und derselben Richtung bewegen, so lange $\psi$ und $\varphi$ gleichzeitig kleiner als zwei rechte Winkel sind, dagegen nach verschiedenen Richtungen sich bewegen, wenn der eine dieser Winkel kleiner und der andere grösser als zwei rechte Winkel ist, weil im ersteren Falle die Sinus der Winkel gleiche, im andern Falle aber entgegengesetzte Vorzeichen und desshalb der Quotient $\frac{\sin\psi}{\sin\varphi}$ beziehlich positiv oder negativ ist.

Da die Richtungen der secundären Bewegungen der Stangenpunkte von denen der beiden Hauptpunkte abhängig sind und das Gesetz dieser Abhängigkeit nach 20) durch Gleichung

$$v_s = \frac{v}{b \sin\varphi} \sqrt{(b \sin\varphi)^2 + [p \sin(\varphi + \psi)]^2 - 2\, b p \sin\varphi \sin(\varphi + \psi) \cos\psi}$$

ausgedrückt ist, so lässt sich mit Berücksichtigung des eben ausgesprochenen für diese Bewegungen im Allgemeinen folgender Satz aufstellen:

Die secundären Bewegungen sind der primären Bewegung gleich gerichtet, so lange der erste und zweite Arm hohle Winkel mit der Zugstange bilden, und derselben entgegengesetzt gerichtet, sobald der eine Arm einen hohlen und der andere einen erhabenen Winkel mit der Zugstange bildet. Der Uebergang aus einer Bewegungsrichtung zur andern findet jedesmal statt, wenn die Richtung eines Arms mit der Richtung der Stange zusammenfällt.

Das Gesagte ergiebt sich auch unmittelbar bei Erwägung der geometrischen Eigenschaften des Vierecks. Nie können die Richtungen beider Arme gleichzeitig mit der Richtung der Stange zusammenfallen, oder beide Arme gleichzeitig erhabene Winkel mit der Stange bilden. Ist das Bewegungsviereck ein Parallelogramm, so ist für jede zusammengehörige Werthe von $\psi$ und $\varphi$, $\sin\psi = \sin\varphi$ und $\sin(\psi + \varphi) = 0$; desshalb $v_s = v$, d. h. in der Stange eines Bewegungsvierecks, welches ein Parallelogramm ist, sind die Geschwindigkeiten aller Stangenpunkte von gleicher Grösse und Richtung.

Der Werth von $\alpha$, bei dem sich die Bewegungsrichtungen der Stangenpunkte und des zweiten Arms ändern, während der erste Arm stetig fortschreitet, möge Wendewinkel heissen. Der Wendewinkel ist erreicht, wenn $\psi = 180^0$ oder $\psi = 0^0$ resp. $360^0$ geworden ist, und man sagt von dem Arme, er stehe im todten Punkte, wenn er einen dieser Winkel mit der Stange bildet. Der erste todte Punkt tritt ein, wenn beide Hauptpunkte $D$ und $C$ auf einer Seite des Drehpunkts $A$ liegen, und der zweite tritt ein, wenn diese Punkte auf verschiedenen Seiten von $A$ liegen.

Der erste todte Punkt (s. Taf. II, Fig. 11) ist mittelst der Gleichung des ersten Wendewinkels $\alpha'$:

$$\cos\alpha' = \frac{a^2 + (b+r)^2 - R^2}{2a(b+r)}$$

oder

$$\cos\frac{\alpha'}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{(a+b+r+R)(a+b+r-R)}{a(b+r)}}$$

bestimmt, während der zweite todte Punkt (s. Taf. II, Fig. 12) sich mittelst des entsprechenden Wendewinkels $\alpha''$, der durch

$$\cos\alpha'' = \frac{a^2 + (b-r)^2 - R^2}{2a(b-r)}$$

oder

$$\cos\frac{\alpha''}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{(a+b-r+R)(a+b-r-R)}{a(b-r)}}$$

gegeben ist, finden lässt.

Wenn der erste Arm in seinen Bewegungnn nicht gehindert, er also befähigt werden soll, jede beliebige Winkelgrösse zu durchlaufen, so muss die Stange $b$ bestimmte Grössenwerthe innehalten. Die Grenzen, zwischen

denen sich $b$ überhaupt bewegen muss, wenn die Viereckverbindung herstellbar sein soll, sind

$$b > a - (R + r)$$
$$\text{und } b < a + (R + r),$$

was leicht erhellt, wenn man beide Arme in die Richtung der Basis $AB$ gelegt denkt, wo dann der Minimalwerth erreicht ist, wenn beide Hauptpunkte über den zugehörigen Drehpunkten $A$ und $B$ hinaus in der Verlängerung von $AB$ liegen.

Die Unbeschränktheit der Drehung des ersten Arms erheischt, dass derselbe befähigt sein muss, die todten Punkte, d. h. diejenigen Armlagen zu passiren, in denen die Armrichtung mit der Stangenrichtung zusammenfällt. Der Durchgang durch den ersten todten Punkt verlangt die Herstellbarkeit des Dreiecks $ACB$ (s. Taf. II, Fig. 11) aus den Seiten $b + r$, $a$ und $R$; es muss also

$$a + R > b + r > a - R$$

sein. Der Durchgang durch den zweiten todten Punkt verlangt die Herstellbarkeit des Dreiecks $ACB$ (s. Taf. II, Fig. 12) aus den Seiten $b - r$, $a$ und $R$; es muss also

$$a + R > b - r > a - R$$

sein. Diese Bedingungen lassen sich auch folgendermassen schreiben:

$$a + (R - r) > b > a - (R + r)$$
$$a + (R + r) > b > a - (R - r)$$

und sie reduciren sich auf die folgenden beiden, welche die Bedingungen für die Möglichkeit der Viereckverbindung überhaupt in sich schliessen:

$$a + (R - r) > b > a - (R - r).$$

Wenn die Bewegungen vom zweiten Arm ausgehen, so erhält man die Bedingungen für die Zulässigkeit voller Drehungen dieses Arms einfach durch Vertauschung von $R$ mit $r$; denn die Möglichkeit des Durchgangs durch den ersten, resp. zweiten todten Punkt ist an die Herstellbarkeit des Dreiecks $ADB$ aus den Seiten $b + r$, $a$, $r$ resp. $b - R$, $a$, $r$ gebunden. Diese Bedingungen sind also:

$$a - (R - r) > b > a + (R - r).$$

Man sieht, dass der Durchgang des ersten Arms durch den ersten todten Punkt $[a + (R - r) > b]$ unverträglich ist mit dem Durchgang des zweiten Arms durch den zweiten Punkt $[b > a + (R - r)]$, ausgenommen den Grenzfall, wo $b = a + (R - r)$ ist. Ebenso ist der Durchgang des ersten Arms durch den zweiten todten Punkt unverträglich mit demjenigen des zweiten Arms durch seinen ersten todten Punkt, ausgenommen den Grenzfall, wo $b = a - (R - r)$.

Daher ist es auch nicht möglich, dass beide Arme zugleich einer vollständigen Drehung fähig sind, ausser in dem ganz speciellen Fall, wo

$$a + (R - r) = b = a - (R - r)$$

wo also $R = r$ und $a = b$ ist.

Die obigen Bedingungen für die vollständige Drehbarkeit des zweiten Arms sind offenbar unerfüllbar, wenn $R-r$ positiv ist, sowie die Bedingungen für die vollständige Drehbarkeit des ersten Arms nicht erfüllt werden können, wenn $R-r$ negativ ist.

Es ergiebt sich also, dass im Allgemeinen nur einer der beiden Arme, und zwar stets der kleinere, eine vollständige Drehbarkeit haben kann; er hat dieselbe, wenn die Länge der Stange sich höchstens um die Differenz der Radien von der Länge der Basis unterscheidet. Der einzige Fall, wo beide Arme zugleich vollständige Drehungen ausführen können, ist der, dass die Radien gleich sind, falls gleichzeitig auch Stange und Basis gleich gemacht werden, so dass das Viereck beständig ein Parallelogramm bleibt.

## §. 17.

Bezeichnet im Allgemeinen $P$ die treibenden Kräfte, welche auf einen frei beweglichen materiellen Punkt einwirken, und $\alpha$ deren Neigungswinkel gegen die augenblickliche Bewegungsrichtung, $Q$ dagegen die Widerstände, welche jenen Kräften entgegenstreben und unter den Winkeln $\beta$ gegen die Bewegungsrichtung geneigt sind, so ist der Ausdruck

$$\Sigma P \cos\alpha - \Sigma Q \cos\beta$$

die die Bewegung bestimmende Resultirende sämmtlicher Kräfte. Je nachdem der Werth dieses Ausdrucks constant oder variabel ist, wird die Beschleunigung der Bewegung selbst constant oder variabel. Nur in dem Falle, dass die Veränderungen der Kräfte unter sich stetig einander aufheben, kann mittelst veränderlicher Kräfte constante Bewegung erzielt werden. Ist $M$ die Masse des bewegten Punktes und $dt$ das Differential der Bewegungszeit, so ist die Geschwindigkeitsänderung während derselben, welche mit $\varDelta v$ bezeichnet werde, bestimmt mittelst

$$\varDelta v = \frac{\Sigma P \cos\alpha - \Sigma Q \cos\beta}{M} \cdot dt$$

und ersichtlich, dass deren Grösse, da $M$ constant ist, lediglich von dem Zähler des rechts stehenden Gleichwerths abhängt, und positiv, Null oder negativ ist, je nachdem $\Sigma P \cos\alpha$ grösser, gleich oder kleiner als $\Sigma Q \cos\beta$ ist.

Auch innerhalb des geometrischen Zusammenhangs bleibt dieses Gesetz, welches die Abhängigkeit der Bewegung von den Kräften, Widerständen und der Masse ausdrückt, in Gültigkeit, da derselbe nichts enthält, was dasselbe berühren könnte. Aber indem er die Körper nöthigt, innerhalb gewisser Bahnen Bewegungen vorzunehmen, bestimmt er die Neigungswinkel, mit denen die Kräfte auf dieselben wirken und entzieht damit den Kräften die eigene Bestimmung ihrer Richtung. Nirgends wirkt der geometrische Zusammenhang direct auf die Intensität der Kräfte ein, aber in-

direct, indem er mit der Aenderung der Neigung auch die Bestimmung der Seitenkräfte mit übernimmt, welche in der Richtung der Bewegung zum Ausdruck gelangen. Daraus erhellt dann aber, dass in dem Ausdruck

$$\Delta v = \frac{\Sigma P \cos \alpha - \Sigma Q \cos \beta}{M} \cdot dt$$

innerhalb der Maschine den Kräften die Bestimmung von $\alpha$ und $\beta$ entzogen, dem Zusammenhange zugewiesen und dieser desshalb, wie in §. 1 angeführt, als vierte Bestimmungsgrösse der Maschinenbewegungen zu betrachten ist. Vor allen Dingen aber sieht man, dass in den Maschinen die Bahnen der bewegten Körper und dass Verhältniss der Geschwindigkeiten derselben zu einander mittelst des geometrischen Zusammenhangs vollständig unabhängig von den treibenden Kräften hingestellt werden.

Erörtert man die Kraftverhältnisse an dem Bewegungsviereck, und nennt zu dem Ende die treibende Kraft im ersten Hauptpunkt $P$, während die tangential in der secundären Curve des, durch den Abstand $p$ bestimmten abhängigen Punktes wirkende Kraft $X$ genannt wird, so hat man nach dem Princip der virtuellen Geschwindigkeiten

$$\frac{X}{P} = \frac{r\, d\alpha}{ds},$$

wenn $ds$ das Differential der secundären Curve ist. Mach 20) ist aber

$$\frac{r\, d\alpha}{ds} = \frac{v}{v_s} = \frac{b \sin \varphi}{\sqrt{b^2 \sin^2 \varphi + p^2 \sin^2 (\varphi + \psi) - 2 b p \sin \varphi \sin (\varphi + \psi) \cos \psi}}$$

und daher

$$34) \begin{cases} X = \dfrac{P b \sin \varphi}{\sqrt{b^2 \sin^2 \varphi + p^2 \sin^2 (\varphi + \psi) - 2 b p \sin \varphi \sin (\varphi + \psi \cos \psi}} \\ \text{oder} \\ X = \dfrac{P b N_1}{\sqrt{q^2 N_1^2 + p^2 N_2^2 + 2 p q N_1 N_2 \cos (\beta - \alpha)}}. \end{cases}$$

Da nach 19) $\frac{v_s}{v'_s} = \frac{l}{l'}$, so ergiebt sich auch $\frac{X}{X'} = \frac{l'}{l}$, d. h. die Kräfte der Stangenpunkte, welche in der Richtung der secundären Curven wirken, verhalten sich umgekehrt wie die Abstände dieser Punkte vom Bestimmungspunkt.

Die Gesetze, welche in §. 12 angeführt wurden, zeigen, dass in sechs Punkten des Bewegungsvierecks gleiche Geschwindigkeiten vorhanden sind und dass drei dieser Punkte auf der Stange und den Armen, die drei andern aber auf deren Verlängerungen liegen. Es ist klar ohne Weiteres, dass in diesen Punkten auch gleich grosse Kräfte wirken.

## §. 18.

Da die Geschwindigkeiten der Stangenpunkte mit jeder Lage der Stange andere werden, so ist die Wirkungsgrösse der bewegten Stange

des Bewegungsvierecks offenbar veränderlich und abhängig von der Stellung der Arme. Wird der erste Arm als Ausgang zur Bestimmnng dieser Wirkungsgrösse, die gleich $W$ angenommen werden möge, angenommen, und ist wieder $l$ der Abstand der Masse $dp$ eines Stangenelements vom Bestimmungspunkt, sowie $w$ die Winkelgeschwindigkeit des ersten Arms, so folgt zunächst

$$v_s = \frac{l}{DO} \cdot rw$$

oder, wenn man aus §. 14 den Gleichwerth für $DO$ entnimmt,

$$35) \qquad v_s = -\frac{l \sin(\varphi + \psi)}{b^2 \sin\varphi} \cdot rw,$$

und weil man für die Wirkungsgrösse die allgemeine Gleichung

$$W = \frac{1}{2} \int v_s^2 \cdot dp$$

hat, im vorliegenden Falle

$$36) \qquad W = \frac{w^2}{2} \frac{r^2 \sin^2(\varphi + \psi)}{b^2 \sin^2\varphi} \int l^2 \cdot dp,$$

in welchem Ausdruck das Integral über die ganze Masse der Stange zu erstrecken ist.

Ist $T$ das Trägheitsmoment für den Schwerpunkt der Stange, deren Masse $M$ ist, und bezeichnet $l_m$ den Abstand des Schwerpunkts vom Bestimmungspunkt, so ist bekanntlich

$$\int l^2 dp = T + M \cdot l_m^2$$

und desshalb für den vorliegenden Fall, bei dem der Schwerpunkt mit dem Stangenmittelpunkt als stets zusammenfallend angesehen werden kann, mit Berücksichtigung von 31)

$$W = \frac{w^2}{2} \frac{r^2 \sin^2(\varphi + \psi)}{b^2 \sin^2\varphi} \left[ T + M \frac{b^2}{4} \frac{\sin^2(\varphi + \psi) - 4 \sin\varphi \sin\psi \cos(\varphi + \psi)}{\sin^2(\varphi + \psi)} \right]$$

oder

$$37) \quad W = \frac{w^2}{2} \frac{r^2}{b^2 \sin^2\varphi} \left[ \left( T + M \frac{b^2}{4} \right) \sin^2(\varphi + \psi) - M b^2 \sin\varphi \sin\psi \cos(\varphi + \psi) \right].$$

Für den Fall, dass man die Stange als Linie auffasst, wie bisher geschehen, ist, unter $\gamma$ die Dichte der Stangenmasse (Gewicht der Längeneinheit) und unter $g = 31{,}25$ Fuss die Beschleunigung der Schwere verstanden, $T = \frac{b^3}{12} \cdot \frac{\gamma}{g}$ und $M = b \frac{\gamma}{g}$ und daher

$$W = \frac{w^2}{12} \frac{r^2}{b^2 \sin^2\varphi} \left[ \left( \frac{b^3}{12} + \frac{b^3}{4} \right) \sin^2(\varphi + \psi) - b^3 \sin\varphi \sin\psi \cos(\varphi + \psi) \right] \frac{\gamma}{g}$$

$$38) \quad = \frac{w^2}{6} \frac{r^2 b}{\sin^2\varphi} \frac{\gamma}{g} [\sin^2(\varphi + \psi) - 3 \sin\varphi \sin\psi \cos(\varphi + \psi)].$$

Zu diesem Resultate wäre man auch bei Erwägung, dass

$$v_s = \frac{rw}{b \sin\varphi} \sqrt{b^2 \sin^2\varphi + p^2 \sin^2(\varphi + \psi) - 2 b q \sin\varphi \cos\psi \sin(\varphi + \psi)},$$

und daher die Wirkungsgrösse der Stange

$$W = \frac{1}{2}\frac{\gamma}{g}\int\left(\frac{r\,w}{b\sin\varphi}\sqrt{b^2\sin^2\varphi + p^2\sin^2(\varphi+\psi) - 2bp\sin\varphi\cos\psi\sin(\varphi+\psi)}\right)^2 dp$$

ist, gelangt. Man erhält nämlich

$$W = \frac{w^2}{2}\cdot\frac{r^2}{b^2\sin^2\varphi}\cdot\frac{\gamma}{g}\left[b^2\sin^2\varphi\int_0^b dp + \sin^2(\varphi+\psi)\int_0^b p^2\,.\,dp - 2\,b\sin\varphi\cos\psi\sin(\varphi+\psi)\int_0^b p\,dp\right]$$

$$= \frac{w^2}{6}\cdot\frac{r^2}{b^2\sin^2\varphi}\cdot\frac{\gamma}{g}\left[b^3\sin^2\varphi + \frac{b^3\sin^2(\varphi+\psi)}{3} - b^3\sin\varphi\cos\psi\sin(\varphi+\psi)\right]$$

$$= \frac{w^2}{2}\cdot\frac{r^2 b}{\sin^2\varphi}\cdot\frac{\gamma}{g}\left[3\left(\sin^2\varphi - \sin\varphi\cos\psi\sin(\varphi+\psi)\right) + \sin^2(\varphi+\psi)\right]$$

$$= \frac{w^2}{6}\cdot\frac{r^5 b}{\sin^2\varphi}\cdot\frac{\gamma}{g}\left[\sin^2(\varphi+\psi) - 3\sin\varphi\sin\psi\cos(\varphi+\psi)\right].$$

Führt man statt der Winkel $\varphi$ und $\psi$ die Winkel $\alpha$ und $\beta$ ein, indem man berücksichtigt, dass

$$b\sin\varphi = N_1$$
$$b\sin\psi = N_2$$
$$\sin(\varphi+\psi) = -\sin(\beta-\alpha)$$
$$\cos(\varphi+\psi) = -\cos(\beta-\alpha)$$

ist, so erhält man aus 37)

$$39)\quad W = \frac{w^2}{6}\frac{r^2}{N_1^2}\cdot\left[\left(T + M\frac{b^2}{4}\right)\sin^2(\beta-\alpha) + MN_1\,.\,N_2\,.\cos(\beta-\alpha)\right]$$

und für den Fall, dass die Stange als materielle Linie betrachtet wird:

$$40)\quad W = \frac{w^2}{6}\cdot\frac{r^2 b}{N_1^2}\cdot\frac{\gamma}{g}\left[b^2\sin^2(\beta-\alpha) + 3\,N_1\,.\,N_2\,.\cos(\beta-\alpha)\right]$$

Ausdrücke, die, der Bedeutung von $N_1$ und $N_2$ halber, complicirter als die in 37) und 38) gegebenen sind.

## §. 19.

Bereits in §. 4 ist bemerkt, dass die Gesetze des Bewegungsvierecks unmittelbar Anwendung bei den gebräuchlichen Gradführungen mittelst beweglicher Stangen und der Bewegungsübertragung von dem Balancier auf den Krummzapfen und umgekehrt finden. Dies werde nunmehr näher dargethan.

Unter den verschiedenen Formen der Gradführungen sind der Balancier mit Gegenlenker (s. Taf. II, Fig. 14), das Watt'sche Parallelogramm (s. Taf. II, Fig. 14) und der Balancier ohne Drehungsaxe (s. Taf. II, Fig. 15) vorzugsweise zu nennen. Wie leicht erhellt, machen die Punkte $P$ und $P'$ des Watt'schen Parallelogramms entsprechende Bewegungen, und da $P$ nichts anderes ist, als der Aufhängepunkt des Balanciers mit Gegenlenker $ABCD$, so lassen sich die Bewegungen des Aufhängepunktes $P'$ (Eckpunktes) im Parallelogramm mit Hülfe

des Grundverhältnisses $\frac{BC}{BC'}$ leicht auf die des Aufhängepunktes $P$ im Gegenlenker zurückführen. Es ist desshalb ausreichend, wenn hier nur von dem Balancier mit Gegenlenker und dem Balancier ohne Drehungsaxe gesprochen wird.

Die Verhältnisse der Stücke des ersteren werden bekanntlich so angenommen, dass der Aufhängepunkt $P$ bei der höchsten, mittleren und tiefsten Stellung der Arme in die Grade $PP'P''$ eintritt. In allen anderen Stellungen weicht die von dem Punkt $P$ beschriebene secundäre Curve von jener Graden ab, und diese Abweichung ist offenbar am grössten, wenn die Tangente der Curve parallel der Graden ist. Dies bedingt, dass in dieser Stellung die Normale der Curve im Punkte $P$ normal auf der Graden stehe. Daher ist die Seitenabweichung am grössten, wenn die Verbindungslinie $PO$ mit dem Bestimmungspunkt $O$ normal auf der Richtungslinie oder, was dasselbe sagt, parallel der mittleren Armstellung ist. Analytisch gelangt man zu diesem Resultat, indem man den Coordinaten der secundären Curve, als deren Anfangspunkt $A$ und als deren erste Axe $AB$ angenommen war, die Richtung $AD'$ der mittleren Armstellung als erste Axe giebt. Sind $\alpha$ und $\beta$ die Winkel, welche die Arme beziehlich mit dieser ersten Axe bilden, und ist $\gamma$ der Neigungswinkel der Basis $AB$ gegen diese Axe, so ist

$$x = \frac{ap \cos\gamma + rq \cos\alpha + Rp \cos\beta}{b},$$

$$y = \frac{ap \sin\gamma + rq \sin\alpha + Rp \sin\beta}{b}\ *).$$

In der mittleren Stellung, in der die Arme parallel sind, befindet sich $P$ in der Richtungslinie, und ist desshalb, wenn der Abstand dieser Linie vom Anfangspunkt $A$ mit $m$ bezeichnet wird, für diese Stellung

$$x = m,$$

und da bei derselben $\alpha = 0^0$ und $\beta = 180^0$ ist,

$$m = \frac{ap \cos\gamma + rq - Rp}{b}.$$

Für irgend eine andere Stellung ist daher die Abweichung des Führungspunktes von der Richtungslinie, die mit $\Delta$ angedeutet sein möge,

*) Sind $x'$, $y'$ die Coordinaten des Punktes $P$ für $AB$ als erste Axe, $\alpha'$ und $\beta'$ die Winkel, welche die Arme $AD$ und $BC$ mit dieser Axe $AB$ bilden, so ist nach §. 6:

$$x' = \frac{ap + rq \cos\alpha' + Rp \cos\beta'}{b}$$

$$y' = \frac{rq \sin\alpha' + Rp \sin\beta'}{b}$$

Setzt man diese Werthe in die Coordinaten-Transformationsgleichungen:

$$x = x' \cos\gamma - y' \sin\gamma$$

$$y = x' \sin\gamma + y' \cos\gamma,$$

so findet man die im Texte angegebenen Werthe mit Rücksicht darauf, dass

$$\alpha = \alpha' + \gamma;\ \beta = \beta' + \gamma.$$

$$\varDelta = x - m = \frac{qr(\cos\alpha - 1) + pR(\cos\beta + 1)}{b}.$$

**Um das Maximum der Abweichung zu finden, differenzirt man nach** $\alpha$ **und findet die Bedingungsgleichung:**

$$pR\sin\beta\frac{d\beta}{d\alpha} + qr\sin\alpha = 0$$

$$-\frac{d\beta}{d\alpha} = \frac{qr}{pR}\frac{\sin\alpha}{\sin\beta}$$

$$-\frac{Rd\beta}{rd\alpha} = \frac{q}{q}\frac{\sin\alpha}{\sin\beta}$$

$$-\frac{N_2}{N_1} = \frac{q}{p}\frac{\sin\alpha}{\sin\beta}$$

oder mit Rücksicht auf Fig. 13:

$$-\frac{CO}{DO} = \frac{q\sin\alpha}{p\sin\beta}$$

was, wie zuvor, bedingt, dass $PO$ parallel mit $BC'$ sei*).

Der Balancier ohne Drehungsaxe (s. Taf. II, Fig. 15) folgt demselben Gesetz. Auch hier ist die Abweichung des Führungspunktes P von der Richtungslinie $PP'P''$ am grössten, wenn die Verbindungslinie $PO$ mit dem Bestimmungspunkt $O$ normal auf jener Graden, oder parallel der mittleren Armlage steht.

Die Verbindung von Balancier, Schubstange und Kurbel (s. Taf. II, Fig. 16) wird gewöhnlich so angeordnet, dass der Drehpunkt $B$ der Kurbel in der Normalen auf der mittleren Balancierstellung liegt, die in der halben Höhe des Ausschlagebogens $D'D''$ errichtet wird. Diese Anordnung bedingt, dass jeder Stangenpunkt bei entsprechenden Lagen der Kurbel nach rechts oder links von jener Normalen sich in gleichen Entfernungen von derselben befindet, und also die Bewegungen, sowie die Zug- und Stoss-

---

*) Man wird sich erinnern dass mit $N_2$ die Normale von $C$ auf $AD_1$ mit $N_1$ die Normale von $D$ auf $BC$ bezeichnet wurde, woraus

$$\frac{N_2}{N_1} = \frac{CO\sin COD}{DO\sin COD} = \frac{CO}{DO}$$

sich ergiebt. Das Zeichen — rührt nur daher, dass $d\beta$ und $d\alpha$ entgegengesetzten Zeichens sind; es ist wegzulassen, wenn $CO$ und $DO$ die absoluten Längen bedeuten. Dass aber die letzte Gleichung die Bedingung dafür enthält, dass $OP$ mit der ersten Axe $AD'$ parallel ist, sieht man folgendermassen ein:

Zieht man durch $O$ eine Parallele mit $AD'$ und nennt $X$ ihren Durchschnittspunkt mit $CD$, so ist Winkel $XOD = \alpha$; $XOC = 180^0 - \beta$. Weil nun die Sinusse der Nebenwinkel $OXC$ und $OXD$ gleich sind, so hat man

$$\frac{CO\sin\beta}{CX} = \frac{DO\sin\alpha}{DX}$$

folglich

$$\frac{CO}{DO} = \frac{CX\sin\beta}{DX\sin\alpha}.$$

Dies mit der fraglichen Gleichung verglichen liefert

$$\frac{CX}{DX} = \frac{q}{p} = \frac{CP}{DP}$$

und lehrt, dass $P$ mit $X$, folglich $OP$ mit $OX$ zusammenfällt.

wirkungen der Schubstange auf den Balancier nach rechts oder links gleich gross werden. Dabei findet dann die grösste Seitenabweichung eines Stangenpunktes von dieser Richtungslinie statt, wenn seine Verbindungslinie $PO$ mit dem Bestimmungspunkt $O$ sich parallel der mittleren Balancierlage stellt. Auch erhellt, dass, wenn $V$ die Geschwindigkeit des Balanciers und $v$ die der Kurbel ist, die Gleichung

$$v = V \frac{\sin \psi}{\sin \varphi}$$

stattfindet, und die todten Punkte eintreten, wenn nahezu $\varphi = 0^0$ oder $\varphi = 180^0$ ist.

## §. 20.

Nach 2) in §. 4 ist die Verbindung von Kolbenstange, Schubstange und Kurbel als ein Bewegungsviereck zu betrachten, von dem ein Arm unendlich gross und normal auf der Kolbenstange gerichtet ist.

Fig. 17 stellt diesen Fall dar. Es ist der zweite Arm $BC = R = \infty$, ebenso die Basis $AB = \infty$ und Winkel $\beta = 180^0$. Ferner ist $\alpha = 90^0 + \delta$ und daher $\sin \alpha = \cos \delta$ und $\cos \alpha = -\sin \delta$; $\varphi = 90^0 + \varphi'$, mithin $\sin \varphi = \cos \varphi'$ und $\cos \varphi = -\sin \varphi'$. Daraus ergiebt sich der Abstand $z$ der Punkte $A$ und $C$:

$$z = Ad + dC$$
$$= r \cos \delta + \sqrt{b^2 - r^2 \sin^2 \delta}$$

und

$$N_1 = dC = \sqrt{b^2 - r^2 \sin^2 \delta}$$
$$N_2 = z \sin \delta + \sin \delta \, (r \cos \delta + \sqrt{b^2 - r^2 \sin^2 \delta}).$$

Die gleichzeitigen kleinsten Wege der Hauptpunkte $D$ und $C$ sind beziehlich $r\,d\delta$ und $R\,d\beta = dz$, und es ist

$$\frac{dz}{rd\delta} = \frac{N_2}{N_1} = \sin \delta \, \frac{r \cos \delta + \sqrt{b^2 - r^2 \sin^2 \delta}}{\sqrt{b^2 - r^2 \sin^2 \delta}}$$

Der Weg $h$, den der Angriffspunkt $C$ der Kolbenstange zurücklegt, während die Kurbel den Winkel $\delta$ beschreibt, ist

$$h = \int_0^\delta dz = r + b - z$$

41) $$= r\,(1 - \cos \delta) + b - \sqrt{b^2 - r^2 \sin^2 \delta}.$$

Setzt man, da $b$ verhältnissmässig gross gegen $r$, gewöhnlich $b = 5r$ ist, $\sqrt{b^2 - r^2 \sin^2 \delta} = b - \frac{r^2 \sin^2 \delta}{2b}$, so ist

$$h = r\left(1 - \cos \delta + \frac{r \sin^2 \delta}{2b}\right)$$

42) $$= 2\, r \sin^2 \tfrac{1}{2} \delta \, \frac{b + r \cos^2 \frac{1}{2} \delta}{b}$$

Für $\delta = \pi$, d. h. für eine halbe Kurbelumdrehung ergeben beide Formeln $h = 2r$.

Die Geschwindigkeiten des Stangenangriffspunktes $C$ und des Warzenpunktes $D$ geben die Gleichung

$$\frac{V}{v} = \frac{dh}{r\,d\delta} = \frac{dz}{r\,d\delta}$$

$$= \sin\delta \, \frac{r\cos\delta + \sqrt{b^2 - r^2\sin^2\delta}}{\sqrt{b^2 - r^2\sin^2\delta}}$$

und daraus

$$43) \qquad V = v\left(\sin\delta + \frac{r\sin 2\delta}{2\sqrt{b^2 - r^2\sin^2\delta}}\right).$$

Setzt man näherungsweise den Werth des Ausdrucks $\sqrt{b^2 - r^2\sin^2\delta}$ gleich $b$, wobei man, indem man das Glied $r^2\sin^2\delta$ vernachlässigt, im Falle $b > 5r$ ist, einen Fehler begeht, der kleiner als $\frac{1}{271}$ des wirklichen Werths ist, so ergiebt sich

$$44) \qquad V = v\sin\delta\left(1 + \frac{r}{b}\cos\delta\right).$$

Zur Bestimmung des Winkels, um welchen die Kurbel von der Ausgangslage abweicht, wenn die Kolbenstangengeschwindigkeit $V$ den grössten Werth erreicht, differenzirt man die Gleichung und entwickelt alsdann aus

$$\cos\delta + \frac{r}{b}\cos 2\delta = 0$$

$$\cos\delta = \frac{b \pm \sqrt{b^2 + 8r^2}}{4r}.$$

Wegen $\cos\delta < 1$ kann hier nur das Minuszeichen gelten. Setzt man näherungsweise $\sqrt{b^2 + 8r^2} = b + \frac{4r^2}{b}$, so ergiebt sich

$$\cos\delta \doteq -\frac{r}{b}.$$

Substituirt man diesen Werth in der Formel 44), so erhält man die Maximalgeschwindigkeit $V_x$ des Kolbens in

$$V_x = v\left(1 - \frac{r^2}{b^2}\right)\sqrt{1 - \frac{r^2}{b^2}}.$$

Da gewöhnlich $\frac{r^2}{b^2} < \left(\frac{1}{5}\right)^2$, so folgt, dass in der Regel das Maximum der Stangengeschwindigkeit

$$V_x > 0{,}94\,v$$

sein wird.

Die Gleichung der secundären Curve, die von einem Schubstangenpunkt $P$ beschrieben wird, geht aus den allgemeinen Gleichungen 8) und 9) der secundären Curven des Bewegungsvierecks hervor, indem man für $\alpha$ und $\beta$ die dem vorliegenden Falle entsprechenden Werthe einsetzt, und berücksichtigt, dass $R\sin\beta = z = r\cos\delta + \sqrt{b^2 - r^2\sin^2\delta}$ ist. Alsdann folgt:

$$45) \quad \begin{cases} y = \dfrac{b\, r \cos\delta + p\sqrt{b^2 - r^2 \sin^2\delta}}{b} \\ x = -\dfrac{rq}{b} \sin\delta \end{cases}$$

und indem man die Functionen des Winkels $\delta$ eliminirt:

$$46) \quad y = \frac{\sqrt{r^2 q^2 - b^2 x^2} + p\sqrt{q^2 - x^2}}{q}.$$

Bezeichnet $\gamma$ den Winkel, den die Tangente des Punktes $(x, y)$ mit der ersten Axe bildet, so ist

$$47) \quad tg\,\gamma = \frac{dy}{dx} = -\frac{x}{q}\left(\frac{b^2}{\sqrt{r^2 q^2 - b^2 x^2}} + \frac{p}{\sqrt{q^2 - x^2}}\right).$$

woraus folgt, dass für $x = 0$ die Tangente senkrecht auf der zweiten Axe, d. h. der Kolbenrichtung, und für $x = \frac{rq}{b}$ die Tangente gleich $\infty$, d. h. normal auf der ersten Axe steht. Auch ergiebt sich aus 46), dass die Kolbenstangenrichtung Symmetrieaxe der Curve ist, d. h. dass die rechts und links denselben Ordinaten entsprechenden Abscissen in absoluter Hinsicht gleich sind.

Die allgemeine Gleichung 17) geht im vorliegenden Falle in

$$tg\,\gamma = \frac{q \sin\delta \cos\varphi' + p \sin\psi}{q \cos\delta \cos\varphi'},$$

und weil $\psi = 180^0 - (\delta + \varphi')$ ist, in

$$\begin{aligned} tg\,\gamma &= tg\,\delta + \frac{p}{q}\,\frac{\sin(\delta + \varphi')}{\cos\delta \cos\varphi'} \\ &= tg\,\delta + \frac{p}{q}\,(tg\,\delta + tg\,\varphi') \\ 48) \quad &= \frac{b\, tg\,\delta + p\, tg\,\varphi'}{q} \end{aligned}$$

über. Es ist aber auch $tg\,\varphi' = \dfrac{r \sin\delta}{\sqrt{b^2 - r^2 \sin^2\delta}}$ und desshalb

$$49) \quad tg\,\gamma = tg\,\delta\left(\frac{b}{q} + \frac{p}{q}\,\frac{r\cos\delta}{\sqrt{b^2 - r^2 \sin^2\delta}}\right).$$

Auch hier ergiebt sich, dass für $\delta = 0$ und $\delta = 180^0$, $tg\,\gamma = 0^0$, d. h. die Tangente normal auf der Kolbenstangenrichtung und für $\delta = 90^0$, $tg\,\gamma = \infty$, die Tangente also parallel der zweiten Axe sich einstellt. Die grösste Seitenabweichung der Stangenpunkte von der Kolbenstangenrichtung findet also statt, wenn die Kurbel normal auf dieser Richtung steht.

Die secundäre Geschwindigkeit des Punktes $P$ ist nach 20), unter Berücksichtigung, dass

$$b^2 \sin^2\varphi = b^2 - r^2 \sin^2\delta$$

$$\sin^2(\varphi + \psi) = \cos^2\delta$$

$$\cos\psi = -\frac{(r\cos\delta + \sqrt{b^2 - r^2\sin^2\delta})\cos\delta - r}{b},$$

50) $$v_s = v\sqrt{1-2\frac{p}{b}\cos^2\delta+\frac{p}{b}\cos\delta\frac{b\,p\cos\delta+2r\sin^2\delta\sqrt{b^2-r^2\sin^2\delta}}{b^2-r^2\sin^2\delta}}$$

woraus für $\delta = 0$ und $\delta = 180^0$ sich

$$v_s = v\left(1-\frac{p}{b}\right) = v\,\frac{q}{b}$$

ergiebt.

Für $p = b$ erhält man bei weiterer Umformung die Kolbenstangengeschwindigkeit und für $p = \frac{b}{2}$ die Geschwindigkeit des Schubstangenmittelpunkts. Die letztere, welche $v_m$ sei, ist

$$v_m = v\sqrt{\sin^2\delta+\frac{\cos\delta}{4}\frac{b^2\cos\delta+4r\sin^2\delta\sqrt{b^2-r^2\sin^2\delta}}{b^2-r^2\sin^2\delta}}.$$

§. 21.

Der Mechanismus der oscillirenden Dampfmaschine, welcher in der Verbindung eines hin- und herschwingenden Dampfcylinders mit einer Kurbel besteht, ist, wie bereits oben erwähnt, als ein Bewegungsviereck *ABCD* (s. Taf. II, Fig. 18) zu betrachten, dessen zweiter Arm *CB* unendlich lang und stets normal auf der Stange gerichtet ist, welche durch den festen Führungspunkt *C* geht. Dadurch wird der Winkel $\varphi$ constant und $= 90^0$, die Länge der Stange $DC = b$ veränderlich, und es ist, wenn $\delta$ den Winkel, den der Arm *AD* mit der festen Linie $AC = c$ einschliesst, bezeichnet, unmittelbar

$$b = \sqrt{c^2+r^2-2\,c\,r\cos\delta},$$

während aus der Gleichung der Geschwindigkeiten: $\frac{V}{v} = \frac{\sin\psi}{\sin\varphi}$, in Erwägung dass $\sin\varphi = 1$, sich

51) $$V = v\sin\psi$$

ergiebt. Ist $dz$ das Wegelement eines Stangenpunktes in der Richtung der Stange und $r\,d\delta$ das gleichzeitige Wegelement des Hauptpunktes *D*, so ist

$$dz = r\,d\delta\sin\psi$$

und daher der Weg $z$, um den sich der Stangenpunkt in der Stangenrichtung bewegt, während die Kurbel den Winkel $\delta$ durchläuft:

$$z = r\int_0^\delta \sin\psi\,d\delta$$

oder, weil

$$\sin\psi = \frac{c\sin\delta}{\sqrt{c^2+r^2-2\,c\,r\cos\delta}},$$

$$z = r\,c\int_0^\delta \frac{\sin\delta\,d\delta}{\sqrt{c^2+r^2-2\,c\,r\cos\delta}}$$

52) $$= \sqrt{r^2+c^2-2\,c\,r\cos\delta}-(c-r).$$

Für eine halbe Umdrehung, also $\delta = \pi$, folgt hieraus

$$z = (r + c) - (c - r) = 2r.$$

Die Geschwindigkeit 51) der Stange geht, indem man $\sin\psi$ eliminirt, in

$$V = v \frac{c \sin\delta}{\sqrt{c^2 + r^2 - 2cr\cos\delta}} \tag{53}$$

über, woraus, wenn man differenzirt und den Differentialquotienten $= 0$ setzt, mittelst

$$(c^2 + r^2)\cos\delta - rc\cos^2\delta = rc$$

durch

$$\cos\delta = \frac{c^2 + r^2 \pm (c^2 - r^2)}{2rc}$$

$$= \frac{c}{r} \text{ oder } = \frac{r}{c}$$

der Winkel bestimmt wird, bei dem die Stangengeschwindigkeit ihr Maximum erreicht. Da nur derjenige Quotient jener Gleichung möglich ist, welcher ein echter Bruch ist, so ist für den Fall, dass $C$ ausserhalb des vom Warzenpunkt $D$ beschriebenen Kreises liegt, $\cos\delta = \frac{r}{c}$ zu nehmen, also die Stellung, in der die Stange normal auf der Kurbel steht. Dies Ergebniss folgt auch aus Betrachtung der Gleichung 51).

Die Gleichungen der secundären Curve, welche von einem Stangenpunkt $P$ beschrieben wird und allgemein in 8) und 9) gegeben sind, nehmen, weil $\beta = 180^0$, $a = R = \infty$, $a - r\cos\alpha = R$, also

$$a - r\cos\alpha - R = 0$$
$$R\sin\beta = b - r\cos\psi,$$

die Formen:

$$x = \cos\alpha$$
$$y = \frac{rq\sin\alpha + p(b - r\cos\psi)}{b}$$

an, welche mit Berücksichtigung, dass

$$\cos\alpha = -\sin\psi,\ \sin\alpha = -\cos\psi$$

ist, in

$$x = -r\sin\psi$$
$$y = p - r\cos\psi$$

übergehen, und in dieser Form sich unmittelbar aus der Figur verificiren lassen. Da $\sin\psi = \frac{c}{b}\sin\delta$ und $\cos\psi = -\frac{c\cos\delta - r}{b}$, so ist auch

$$x = -\frac{cr}{b}\sin\delta$$
$$y = \frac{bp + r(c\cos\delta - r)}{b}$$

oder, weil $b$ veränderlich und gleich $\sqrt{c^2 + r^2 - 2cr\cos\delta}$ ist,

$$54)\quad \begin{cases} x = -\dfrac{c r \sin\delta}{\sqrt{c^2+r^2-2cr\cos\delta}} \\ y = \dfrac{p\sqrt{c^2+r^2-2cr\cos\delta}+r(c\cos\delta-r)}{\sqrt{c^2+r^2-2cr\cos\delta}}. \end{cases}$$

Verlegt man die Coordinatenaxe so, dass $AC$ zur ersten Axe wird, während $A$ Anfangspunkt verbleibt, dreht also zu dem Ende das Axensystem um den Winkel $CAB$, welcher von der Normalen in $A$ auf der Stangenrichtung $DC$ mit der Linie $AC$ gebildet wird, so erhält man mit Bezug auf diese Axen:

$$55)\quad \begin{cases} x = r\cos\delta + \dfrac{p}{b}(c-r\cos\delta) = r\cos\delta + \dfrac{p(c-r\cos\delta)}{\sqrt{c^2+r^2-2cr\cos\delta}} \\ y = \dfrac{r\sin\delta\,(b-p)}{b} = r\sin\delta - \dfrac{pr\sin\delta}{\sqrt{c^2+r^2-2cr\cos\delta}}. \end{cases}$$

Die Gleichung 17) der Tangente liefert mit Bezug auf das erste angenommene Axensystem

$$tg\,\gamma = -\frac{b}{q}\,tg\,\psi$$

$$= -\frac{r\cos\psi+\sqrt{c^2-r^2\sin^2\psi}}{r\cos\psi+\sqrt{c^2-r^2\sin^2\psi}-p}\,tg\,\psi.$$

Nennt man $\mu$ den Winkel, den die Stange $DC$ mit der Linie $AC$ einschliesst, und $\gamma_1$ den Winkel, den die Tangente des Punktes $(x, y)$ mit der Linie $AC$ bildet, so erhält man als Relation zwischen den Winkeln $\gamma$ und $\gamma_1$, die von der Tangente mit den ersten Axen der beiden Axensysteme gebildet werden:

$$\gamma_1 = \gamma - (90^0 + \mu),$$

woraus nach einigen Reductionen

$$tg\,\gamma_1 = \frac{1}{\sin\psi}\,\frac{-br\sin^2\psi + q\cos\psi\sqrt{c^2-r^2\sin^2\psi}}{qr\cos\psi + b\sqrt{c^2-r^2\sin^2\psi}}$$

$$= \frac{1}{\sin\psi}\,\frac{q(\cos\psi\sqrt{c^2-r^2\sin^2\psi} - r\sin^2\psi) - pr\sin^2\psi}{q(\sqrt{c^2-r^2\sin^2\psi}+r\cos^2\psi) + p\sqrt{c^2-r^2\sin^2\psi}}$$

hervorgeht. Hieraus erhält man dann die Tangente als Function des Winkels $\delta$ mittelst entsprechender Rechnungsoperationen in

$$56)\quad tg\,\gamma_1 = -\frac{1}{\sin\delta}\,\frac{\cos\delta\sqrt{(c^2+r^2-2cr\cos\delta)^3} - p(c-r\cos\delta)(c\cos\delta-r)}{\sqrt{(c^2+r^2-2cr\cos\delta)^3} - pr(r-c\cos\delta)}.$$

Dieser Werth ergiebt für $p=0$ in $tg\,\gamma_1 = -cotg\,\delta$ die Tangente des vom Warzenpunkt beschriebenen Kreises und für $\delta=0$, $tg\,\gamma_1=\infty$, d. h. die Normale auf der Linie $AC$, dagegen für $\delta = 90^0$,

$$tg\,\gamma_1 = -\frac{pcr}{\sqrt{(c^2+r^2)^3}-pr^2}.$$

Die secundäre Geschwindigkeit geht aus der allgemeinen Gleichung

20) hervor, indem man $\varphi = 90^0$ und $\sin(\varphi + \psi) = \cos\psi$ setzt. Es ist alsdann

$$v_s = \frac{v}{b}\sqrt{b^2 - p\cos^2\psi\,(2b - p)}$$

57) $$= v\sqrt{1 - \frac{2p\cos^2\psi\,(r\cos\psi + \sqrt{c^2 - r^2\sin^2\psi}) - p^2\cos^2\psi}{2r\cos\psi\,(r\cos\psi + \sqrt{c^2 - r^2\sin^2\psi}) + c^2 - r^2}}$$

oder, indem man $v_s$ als Function von $\delta$ darstellt,

$$v_s = \frac{v}{b}\sqrt{b^2 - p\,\frac{(r - c\cos\delta)^2\,(2b - p)}{b^2}}$$

58) $$= v\sqrt{1 - p\,\frac{(r - c\cos\delta)\,(2\sqrt{c^2 + r^2 - 2cr\cos\delta} - p)}{c^2 + r^2 - 2cr\cos\delta}}.$$

Für den Fall, dass $p = 0$ und $p = 2\sqrt{c^2 + r^2 - 2cr\cos\delta}$ genommen wird, ist $v_s = v$. Die letztere Bedingung giebt den Punkt der Stange, der über dem Führungspunkt hinausliegend sich mit der Umdrehungsgeschwindigkeit bewegt, und in seiner Lage veränderlich ist. Seine geringste Entfernung $2(c - r)$ erreicht derselbe, wenn $\delta = 0$, und seine grösste $2(c + r)$, wenn $\delta = 180^0$ ist.

## §. 22.

Der Bewegungsmechanismus, bei dem die Endpunkte einer Stange *CD* (s. Taf. II, Fig. 19) auf zwei sich schneidenden graden Linien *MC* und *MD* vorschreiten, ist in §. 4 als der Fall eines Bewegungsvierecks nachgewiesen worden, dessen Arme *AD* und *BC* normal auf jenen Richtungslinien *MD* und *MC* stehen und unendlich lang sind. Die allgemeinen Gesetze des Bewegungsvierecks gewähren für diesen Fall nähere Resultate, wenn man zunächst annimmt, dass in dem Bewegungsviereck die von den Hauptpunkten *C* und *D* beschriebenen Kreise sich in einem Punkte *M* schneiden, alsdann die Coordinatenaxen nach diesem Punkte transformirt und zusammenfallen lässt mit den Tangenten in demselben für beide Kreise. Nimmt man demnächst die Radien dieser Kreise unendlich gross, so erhält man *M* als Anfangspunkt und die Führungslinien *MC* und *MD* als Coordinatenaxen zur Bestimmung der secundären Curven, welche von den Stangenpunkten unter den vorausgesetzten Bedingungen beschrieben werden. Wir betrachten den Fall, dass jene Führungslinien normal auf einander stehen, beziehen also die Curve auf ein normales Axensystem.

Ist $\psi'$ der Winkel, welcher von der Stange mit der ersten Axe *MD* gebildet wird und $\varphi'$ der von desselben mit der zweiten Axe gebildete Winkel, so hat man, weil $\varphi' + \psi' = 90^0$ und $90^0 + \psi' = \psi$, sowie $90^0 + \varphi' = \varphi$ ist, mittelst

$$\frac{V}{v} = \frac{\sin\psi}{\sin\varphi}$$

unmittelbar

59) $$V = v\,\cot g\,\psi.$$

Hieraus folgt

60) $$\frac{V}{v} = \frac{DM}{CM}$$

d. h. die Geschwindigkeiten der Hauptpunkte verhalten sich zu einander wie die Katheten des gebildeten Dreiecks, welche nicht an ihnen liegen. Dieses Gesetz wird verificirt durch den Satz, dass sich die secundären Geschwindigkeiten der Stangenpunkte wie die Abstände derselben vom Bestimmungspunkt verhalten, hier also

$$\frac{V}{v} = \frac{OC}{OD} = \frac{DM}{CM}.$$

Der allgemeine Ausdruck der secundären Geschwindigkeit

$$v_s = \frac{v}{b \sin \varphi} \sqrt{b^2 \sin^2 \varphi + p^2 \sin^2 (\varphi + \psi) \,.\, 2\, b p \sin \varphi \sin (\varphi + \psi) \cos \psi}$$

modificirt sich, weil

$$\sin \varphi = \sin \psi', \ \cos \psi = -\sin \psi' \text{ und } \sin (\varphi + \psi) = -1$$

ist, in

61) $$\begin{cases} v_s = v \sqrt{1 - 2\frac{p}{b} + \left(\frac{p}{b} \frac{1}{\sin \psi'}\right)^2} \\ \quad = v \sqrt{1 - 2\frac{p}{b} + \left(\frac{p}{b} \frac{1}{\cos \varphi'}\right)^2}. \end{cases}$$

Die Gleichungen der secundären Curve für $M$ als Anfangspunkt und $MD$ und $MC$ als Axen ergeben sich als

$$x = q \cos \psi'$$
$$y = p \sin \psi'$$

oder, indem man die Functionen des Winkels $\psi'$ eliminirt,

62) $$y^2 = \frac{p^2}{q^2} (q^2 - x^2)$$

welches die Gleichung einer Ellipse ist, deren halbe Axen $p$ und $q$ sind.

In diesem Falle ist also die secundäre Curve eine Ellipse, die für $p = q = \frac{b}{2}$ in einen Kreis mit dem Radius $\frac{b}{2}$ übergeht, was sich auch leicht in anderer Weise darthun lässt.

Die Bestimmungscurve, welche hier mittelst

$$x = b \cos \psi' \text{ und } y = b \sin \psi'$$

gegeben ist, hat, indem man aus diesen Gleichungen die Functionen des Winkels $\psi'$ eliminirt, die Gleichung

$$y^2 = b^2 - x^2,$$

ist also ein Kreis, dessen Radius $b$ und dessen Mittelpunkt $M$ ist. Für die Bestimmung der secundären Curven durch Kreis-Coordinaten ist also die Axe ein Kreis, während die Radien der entsprechenden Berührungskreise durch den Ausdruck 30)

$$l = \frac{\sqrt{b^2 \sin^2 \varphi + p^2 \sin^2 (\varphi + \psi) - 2\, b\, p \sin \varphi \sin (\varphi + \psi) \cos \psi}}{-\sin (\varphi + \psi)}$$

bestimmt werden. Dieser geht in

$$l = \sqrt{b^2 \sin^2 \psi' + p^2 - 2\, b\, p \sin^2 \psi'}$$

$$= b \sin \psi' \sqrt{1 - 2\,\frac{p}{b} + \left(\frac{p}{b}\,\frac{1}{\sin \psi'}\right)^2}$$

über, während der zugehörige Bogen $D'O$ der Axe gleich

$$arc \sin \psi'$$

ist, wodurch dann mittelst Kreis-Coordinaten die als Ellipse auftretende secundäre Curve ebenfalls und in überaus einfacher Weise bestimmt werden kann.

Saarbrücken, im März 1858.

---

# Ueber Diffusion von Salzlösungen im Wasser.

Von Dr. BEEZ,

Lehrer an der K. Realschule in Plauen.

---

## §. 1.

### Einleitung.

Wenn auf die wässrige Lösung irgend eines Salzes, z. B. Kupfervitriols, reines Wasser mit der Vorsicht geschichtet wird, dass beide Flüssigkeiten durch eine scharfbegrenzte Ebene geschieden sind, so wird allmählig von unten her, dem Gesetze der Schwere entgegen, Salz in das Wasser eindringen, die anfängliche Grenze verschwinden und nach Verlauf einer längeren Zeit selbst die oberste Schicht der Flüssigkeit salzhaltig sein. Den Grund dieser freiwilligen Verbreitung eines löslichen Körpers in seinem Lösungsmittel, der sogen. Diffusion, sucht man bekanntlich in der chemischen Affinität des Wassers zum löslichen Körper. Das Endresultat des Vorganges, welches genau genommen erst nach einem unendlich langen Zeitraum eintreten kann, ist die gleichmässige Ausbreitung des Salzes im Wasser, so dass zuletzt alle Schichten gleiche Concentration besitzen oder, wie man sagen könnte, im chemischen Gleichgewichte sich befinden. Eingehende Versuche über Diffusion hat zuerst der Engländer Graham angestellt, hauptsächlich zu dem Zwecke, die stärkere oder schwächere Verbreitung

verschiedener Salze im Wasser nachzuweisen; seine Versuche sind jedoch in quantitativer Beziehung nicht genau genug, wenn man aus ihnen das Gesetz ableiten will, nach welchem die Concentration irgend einer Schicht als eine Function:

1) ihres Abstandes von der ursprünglichen Berührungsschicht,
2) der seit Anfang des Versuchs verflossenen Zeit,
3) der Concentration der angewendeten Salzlösung,
4) der Form des Gefässes, in welchem die Mischung vor sich geht,
5) eines gewissen Coefficienten, welcher der Geschwindigkeit der Diffusion proportional und
6) der Temperatur der Flüssigkeit

darzustellen ist.

Der einzige Physiker, der bis jetzt das fragliche Problem dem mathematischen Calcüle zugänglich zu machen gesucht hat, ist Dr. Fick (s. Poggendorfs Annalen, Bd. XCIV, p. 59 — 87). Er wird von der Idee geleitet, dass die Verbreitung eines gelösten Körpers im Lösungsmittel, wofern sie ungestört unter dem ausschliesslichen Einfluss der Molecularkräfte stattfindet, nach demselben Gesetze vor sich geht, welches Fourier für die Verbreitung der Wärme in einem Leiter aufgestellt hat. Man darf nur, fährt derselbe fort, in dem Fourier'schen Gesetze das Wort Wärmequantität mit dem Wort Quantität des gelösten Körpers und das Wort Temperatur mit Lösungsdichtigkeit vertauschen; der Leitungsfähigkeit entspricht dann eine von der Verwandtschaft der beiden Körper abhängige Constante. Genau nach dem Muster der Fourier'schen Entwickelung für den Wärmestrom leitet nun Fick für den Diffusionstrom die Differentialgleichung her:

$$\frac{\partial y}{\partial t} = -K\left(\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + \frac{1}{Q}\frac{\partial Q}{\partial x}\cdot\frac{\partial y}{\partial x}\right),$$

in welcher $y$ die Concentration einer Schicht, die von der anfänglichen Berührungsebene den Abstand $x$ hat, nach Verlauf der Zeit $t$ bedeutet, $Q$ aber den Querschnitt des Gefässes, in welchem der Diffusionsstrom vor sich geht, als Function desselben Abstandes $x$ darstellt. Hat das Gefäss eine prismatische oder cylindrische Gestalt, so ist $Q$ constant und obige Differentialgleichung wird einfacher:

$$\frac{\partial y}{\partial t} = -K\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}.$$

Wenn es nun auch Fick nicht gelungen ist, diese Differentialgleichung mit Hülfe von Beobachtungen in eine Gleichung zwischen endlichen Grössen umzusetzen, so bleibt ihm doch das Verdienst, den speciellen Fall näher erörtert zu haben, in welchem ein stationärer Zustand oder sogenanntes dynamisches Gleichgewicht (nach Analogie der Wärmeverbreitung) im Diffusionsstrom eintritt. Dasselbe wird dadurch charakterisirt, dass jede Schicht im Zeitelemente von der vorhergehenden so viel Salz empfängt, als sie an die folgende abgiebt, so dass die Concentration aller Schichten von

der Zeit unabhhängig wird. Ueber die zu diesem Zwecke angestellten Versuche verweisen wir auf die oben angeführte Abhandlung. Die analytische Bedingung aber für das dynamische Gleichgewicht ist

$$\frac{\partial y}{\partial t} = 0,$$

also wird für ein cylindrisches Gefäss auch:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = 0,$$

welcher Gleichung das Integral

$$y = ax + b$$

entspricht; d. h. die Concentrationen müssen von unten nach oben abnehmen, wie die Ordinaten einer geraden Linie oder mit anderen Worten, sie bilden eine arithmetische Progression. Die Beobachtungen, die Fick zur experimentellen Begründung dieses Gesetzes gemacht hat, liefern Werthe, die mit den berechneten ziemlich übereinstimmen, ja bei der Unvollkommenheit seiner Beobachtungsmethode nicht besser übereinstimmen konnten.

Wenn wir nun auch die Gesetze der Diffusion denen der Wärmeverbreitung für analog halten, so glauben wir doch, dass es zweckmässiger ist, erst das Diffusionsproblem in voller Allgemeinheit zu lösen und die gefundenen Resultate auf die Verbreitung der Wärme überzutragen, als den umgekehrten Weg einzuschlagen. Denn während der Diffusion geht kein Atom des Salzes verloren und man kann die Concentration der verschiedenen Schichten mit hinreichender Genauigkeit bestimmen, während bei der Verbreitung der Wärme stets ein grosser Verlust an die Umgebung zu befürchten ist und eine genaue Beobachtung derselben in den einzelnen Querschnitten des Wärmeleiters ausserordentlich schwierig ist.

## §. 2.

### Ableitung der Differentialgleichung für den Diffusionsstrom.

Denken wir uns ein Gefäss von beliebiger Form, den unteren Theil bis zur Horizontalebene $yy'$ mit Salzlösung, den oberen mit reinem destillirten Wasser gefüllt und nehmen eine auf $yy'$ im Punkte $O$ senkrechte Linie $Ox$ als die Axe der $x$ an, so können wir die Fläche $Q$ irgend eines der Horizontalebene parallelen Querschnittes $MN$ als eine Function ihres Abstandes $x$ von derselben ansehen. Nach Verlauf der Zeit $t$, in welcher der Diffusionsstrom bis zu einer gewissen Höhe gelangt ist, sei in der Schicht $MNM'N'$, welche die Dicke $dx$ habe, die Concentration durchgängig $= u$. Sehen wir zunächst von der Einwirkung der Temperatur ab, indem wir dieselbe für die Dauer eines Versuchs möglichst constant erhalten, so ist $u$ eine Function von $x$, $Q$, $t$ und einigen unveränderlichen Grössen, deren Bedeutung sich im Laufe der Untersuchung ergeben wird. Aendert sich nun $t$ um das Zeitelement $dt$, während $x$ constant bleibt, so ändert sich

auch die Concentration um $\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right) dt$ in der Raumeinheit, folglich in der Schicht $MNM'N' = Q\,dx$ um

$$Q\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right) dt\,dx.$$

Dieser Zuwachs an Salz lässt sich aber auch berechnen aus dem Salzgehalt der drei übereinanderstehenden Schichten $M_1N_1MN$, $MNM'N'$, $M'N'M''N''$, welche wir kurz mit den Ziffern 0, 1, 2 bezeichnen und ist gleich der Menge des Salzes, die aus 0 in 1 tritt, vermindert um die Quantität desjenigen, welches aus 1 in 2 während derselben übergeht. Wenn wir nun annehmen, dass der Salzstrom in gleichen Zeiten gleich dicke Schichten durchfliesst, so wird die Menge des Salzes, welches aus einer Schicht heraustritt, um so grösser sein, je dünner die Schicht ist, also $dx$ umgekehrt proportional. Zwei aufeinanderfolgende Schichten aber von ungleicher Concentration haben das Bestreben, sich chemisch ins Gleichgewicht zu setzen, d. h. so lange auf einander einzuwirken, bis in beiden gleiche Concentration eingetreten ist. Diese Zeit mag nun bei unendlich dünnen Schichten unendlich klein sein, indess wird sie bei verschiedenen Salzen nach dem Grade ihrer Affinität zum Wasser bald einen grösseren bald einen kleineren Werth haben und wir können sie $= \frac{dt}{\alpha}$ setzen, wenn $\alpha$ einen Faktor bedeutet, der proportional der Diffusionsgeschwindigkeit eines Salzes ist, weshalb wir ihn den Diffusionscoefficienten des Salzes nennen wollen. Wenn nun 0 die Basis $Q_1$ und die Concentration $u_1$, 1 die Basis $Q$ und die Concentration $u$, 2 die Basis $Q'$ und die Concentration $u'$, alle drei aber gleiche Dicke $dx$ besitzen, so wird, damit chemisches Gleichgewicht eintritt, aus 0 in 1 eine Salzmenge:

$$= \alpha \frac{Q_1 u_1 - Q u}{2\,\partial x} dt$$

aus 1 in 2 eine solche

$$= \alpha \frac{Q u - Q' u'}{2\,\partial x} dt$$

übertreten müssen. Der Ueberschuss der ersteren über die zweite ist der Zuwachs, welchen die Schicht 1 an Salz in der Zeit $dt$ erhält, also ist:

$$1)\qquad Q\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right) dx\,dt = \alpha \frac{Q_1 u_1 - Q u}{2\,\partial x} dt - \alpha \frac{Q u - Q' u'}{2\,\partial x} dt.$$

Sei nun

$$u_1 = u - \frac{\partial u}{\partial x} . dx$$

$$Q_1 = Q - \frac{\partial Q}{\partial x} . dx$$

so wird

$$u' = u + \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} dx^2$$

$$Q' = Q + \frac{\partial Q}{\partial x} dx + \frac{\partial^2 Q}{\partial x^2} dx^2.$$

Setzt man diese Werthe in die Gleichung 1) ein, vernachlässigt die Glieder, welche die dritten nnd höheren Dimensionen der unendlich kleinen Grössen enthalten, dividirt endlich mit $Q dx\, dt$, so erhält man die Differentialgleichung:

$$2)\qquad \frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{\alpha}{2}\left\{\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{1}{Q}\frac{\partial Q}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{u}{Q}\frac{\partial^2 Q}{\partial x^2}\right\},$$

welche sich von der Fourier'schen durch das dritte Glied rechts unterscheidet.

## §. 3.

### Herstellung des allgemeinen Integrals für den Diffusionsstrom in einem cylindrischen Gefässe.

Nehmen wir nun der Einfachheit halber, sowohl der Rechnung als der Beobachtung an, das Gefäss sei ein cylindrisches, so wird:

$$Q = C, \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial^2 Q}{\partial x^2} = 0$$

und es bleibt die bekannte, schon vielfach behandelte Gleichung zwischen partiellen Differentialien:

$$3)\qquad \frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{\alpha}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

übrig. Wir könnten versuchen, wie es auch Fick gethan hat, diese auf theoretischem Wege gefundene Gleichung experimentell zu prüfen, indem wir für ein sehr kleines Zeitintervall $\Delta t$ in sehr kleinen Abständen $\Delta x$ die Dichtigkeit der aufeinanderfolgenden Schichten bestimmten; dann müsste der Quotient

$$\frac{\Delta u}{\Delta t} : \frac{\Delta^2 u}{\Delta x^2}$$

eine constante Grösse ergeben. Indessen führt dieses Verfahren selbst bei den sorgfältigsten Versuchen nicht zu dem gewünschten Resultat, weil der Einfluss der Beobachtungsfehler mit der zweiten Differenz sich so steigert, dass er das in der Gleichung ausgesprochene Gesetz vollständig verdeckt. Wir versuchen daher das Integral der Gleichung 3) aufzustellen. Offenbar kann man bei der Aufsuchung desselben zwei Wege einschlagen, je nachdem man mit Hülfe des Maclaurin'schen Satzes $u$ in eine nach steigenden Potenzen von $t$ oder nach steigenden Potenzen von $x$ geordnete Reihe entwickelt. Im ersteren Falle bleibt eine willkührliche Function $\varphi(x)$ zu bestimmen, in welche $u$ für $t = 0$ übergeht; im anderen sind zwei ebenfalls willkührliche Functionen von $t$ einzuführen, auf welche das allgemeine Integral und dessen erste Abgeleitete nach $x$ sich reduciren, wenn $x = 0$ gesetzt wird. Den ersten Weg haben wir nach vergeblichen Versuchen, die

Natur der willkührlichen Function $\varphi(x)$ für $t=0$ zu bestimmen, verlassen und es ergab sich durch eine einfache Betrachtung, dass sie überhaupt nicht zu finden ist, weil für $t=0$ eine Unterbrechung der Stetigkeit in der Function $u$ stattfinden muss, indem dann zwei Schichten an einander stossen, von denen die eine volle Concentration, die andere die Concentration Null besitzt. Wollte man aber den Taylor'schen Satz zu Hülfe nehmen und das Integral nach steigenden Potenzen von $t - t_0$ entwickeln, wo $t_0$ eine bestimmte Zeit nach Anfang des Versuchs bedeutet, so würde auch dann die experimentelle Bestimmung von $\varphi(x)$ unüberwindliche Schwierigkeiten bereiten. Ebensowenig lässt sich von den beiden Functionen:

$$u = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha^2 a^2 t} \cos \alpha (x - \xi)\, \varphi(\xi)\, d\xi\, d\alpha$$

oder

$$u = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x + 2a\omega\sqrt{t})\, e^{-\omega^2} d\omega,$$

welche beide allgemeine Integrale der Differentialgleichung

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

sind, Gebrauch machen, da, wie wir im Folgenden sehen werden, die Function $u$ die Eigenschaft hat, für $x=0$ einen constanten, von $t$ unabhängigen Werth anzunehmen. Es blieb uns somit kein anderer Weg übrig, als die Funktion $u$ mit Hülfe des Maclaurin'schen Satzes in eine nach steigenden Potenzen von $x$ geordnete Reihe zu entwickeln, was um so mehr gerechtfertigt erscheint, als für jedes $t > 0$ und einen beliebigen Werth von $x$ zwischen der obersten und untersten Grenze des Diffusionsstromes keinerlei Stetigkeitsunterbrechung eintreten kann. Wir setzen demgemäss:

$$4)\qquad u = u_0 + x\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_0 + \frac{x^2}{1.2}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_0 + \frac{x^3}{1.2.3}\left(\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}\right)_0 \cdots\cdots$$

Für $x=0$ werde $u = u_0 = \varphi(t)$, dann erhalten wir mit Rücksicht auf Gleichung 3):

$$\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right) = -\frac{\alpha}{2}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)$$

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_0 = -\frac{2}{\alpha}\varphi'(t)$$

$$\left(\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}\right)_0 = -\frac{2}{\alpha}\left(\frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial t}\right) = \left(\frac{2}{\alpha}\right)^2 \varphi''(t)$$

$$\left(\frac{\partial^{2m} u}{\partial x^{2m}}\right)_0 = (-1)^m \left(\frac{2}{\alpha}\right)^m \varphi^{(m)} t.$$

Es lassen sich aber, wie man leicht erkennt, aus der Annahme $u_0 = \varphi(t)$ die ungeraden Abgeleiteten von $u$ nach $x$ nicht bestimmen, sondern man hat

noch eine zweite willkührliche Function $\psi(t)$ einzuführen; zwischen ihr und der ersten Abgeleiteten von $u$ nach $x$ für $x=0$ möge die Gleichung

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_0 = -\psi(t)$$

bestehen, dann wird mit Hülfe von 3)

$$\left(\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}\right)_0 = \frac{2}{\alpha}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial t\,\partial x}\right) = \frac{2}{\alpha}\,\psi'(t)$$

$$\left(\frac{\partial^5 u}{\partial x^5}\right)_0 = -\frac{2}{\alpha}\left(\frac{\partial^4 u}{\partial x^3\,\partial t}\right) = -\left(\frac{2}{\alpha}\right)^2 \psi''(t)$$

$$\left(\frac{\partial^{2m+1} u}{\partial x^{2m+1}}\right)_0 = (-1)^{m+1}\left(\frac{2}{\alpha}\right)^m \psi^{(m)}(t).$$

Durch Einsetzung dieser Werthe in die Gleichung 4) erhalten wir das allgemeine Integral der vorgelegten Gleichung:

$$5)\quad u = \varphi(t) - x\,\psi(t) - \frac{2}{\alpha}\cdot\frac{x^2}{1.2}\varphi'(t) + \frac{2}{\alpha}\frac{x^3}{1.2.3}\psi'(t) + \left(\frac{2}{\alpha}\right)^2\frac{x^4}{1.2.3.4}\varphi''(t) - \left(\frac{2}{\alpha}\right)^2\frac{x^5}{1..5}\psi''(t) + \ldots$$

## §. 4.

### Bestimmung der willkührlichen Funktionen $\varphi(t)$ und $\psi(t)$ durch Beobachtung.

Aus unsern Beobachtungen sowohl, als aus denen des Dr. Fick geht hervor, dass der Salzgehalt der Mittelschicht, für welche $x=0$ wird, constant oder von der Zeit $t$ unabhängig bleibt und gleich der Hälfte des ursprünglichen Gehaltes ist. Nennen wir daher $U$ die Concentration der angewendeten Lösung, so ist:

$$\varphi(t) = \frac{1}{2}\,U,$$

woraus folgt, dass $\varphi'(t)$, $\varphi''(t)$ etc., d. h. alle Abgeleiteten von $\varphi(t)$ Null sind. Hierdurch wird die Reihe 5) einfacher

$$6)\quad u = \frac{U}{2} - x\,\psi(t) + \frac{2}{\alpha}\frac{x^3}{1.2.3}\psi'(t) - \left(\frac{2}{\alpha}\right)^2\frac{x^5}{1...5}\psi''(t) + \ldots\ldots$$

Durch directe Beobachtung sind wir nicht dazu gelangt $\psi(t)$ zu bestimmen. Zwar würde in unmittelbarer Nähe der Mittelschicht ohne bedeutenden Fehler, wenn man nur $x$ recht klein nimmt, nach Verlauf der Zeit $t$

$$u = \frac{1}{2}\,U - x\,\psi(t),$$

nach Verlauf der Zeit $t'$

$$u' = \frac{1}{2}\,U - x\,\psi(t')$$

gesetzt werden können, folglich

$$\psi(t) : \psi(t') = \frac{1}{2}\,U - u : \frac{1}{2}\,U - u'$$

sein. Beobachtet man nun nach verschiedenen Zeiten die Concentrationen

in einem der Mittelschicht sehr nahe liegenden Querschnitt, so könnte man hoffen, die Function $\psi(t)$ durch Induction zu finden. Aber die unvermeidlichen Beobachtungsfehler haben auf die Differenz $\frac{1}{2}U - u$, die natürlich nur klein sein kann, einen so grossen Einfluss, dass sich kein sicherer Schluss auf die Natur der unbekannten Function ziehen lässt. Wir suchten daher auf einem Umwege zum Ziele zu gelangen und bestimmten die Menge des Salzes, welches in der Zeit $t$ durch die Mittelschicht in das Wasser diffundirte; freilich war dieses nicht möglich, so lange Salzlösung und reines Wasser in demselben Gefässe sich befanden, weil sich die über der Grenzschicht stehende Flüssigkeit nicht genau abheben und wägen lässt. Die Versuche wurden also mit einer andern Art von Diffusionsstrom gemacht, dessen Gleichung von 6) nur durch die Constante $\frac{1}{2}U$ sich unterscheidet. Füllt man nämlich ein cylindrisches Gefäss genau bis an den Rand mit Salzlösung und setzt es in ein verhältnissmässig grosses Becken voll reinen Wassers, so wird das Salz aus dem kleinen Cylinder in das Wasser diffundiren, vermöge seiner Schwere aber alsbald niedersinken, so dass die oberste Schicht immer von reinem Wasser umspült wird. An der Trennungsschicht für $x = 0$ können wir daher die Concentration constant $= 0$ annehmen; im Uebrigen gilt die vorige Entwicklung, weshalb wir für diese zweite Art des Diffusionsstromes die Gleichung:

$$u = -x\,\psi(t) + \frac{2}{\alpha}\frac{x^3}{1.2.3}\psi'(t) - \left(\frac{2}{\alpha}\right)^2\frac{x^5}{1\ldots5}\psi''(t) + \ldots\ldots$$

aufstellen können, welche für jedes $x < 0$ gültig ist. Die ganze Menge $S$ des diffundirten Salzes aber ist gleich der Quantität Salz, welche die oberste Schicht passirt, also, wenn $Q$ den Querschnitt des Gefässes, $U$ die anfängliche Concentration bedeutet:

$$S = Q\,U\int_0^t\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_0 dt = Q\,U\int_0^t \psi(t)\,dt,$$

und wurde experimentell auf folgende Weise bestimmt. Wir verschafften uns einen oben offenen Glascylinder von etwa 1″ Höhe und $1\frac{1}{2}$″ Weite; der obere Rand desselben wurde sorgfältig mit Smirgel und Oel auf einer Glastafel abgeschliffen, so dass, wenn das Gläschen mit Wasser angefüllt und mit einer Glasplatte bedeckt wurde, selbst innerhalb einiger Minuten nichts aus dem Inneren verdunstete. Dieser Cylinder wog mit seinem Deckel 23,960 gr. Er wurde mit Kupfervitriollösung gefüllt und mit der Glasplatte vorsichtig bedeckt, wobei namentlich darauf zu achten war, dass auch nicht die kleinste Luftblase unter dem Deckel sich zeigte. Die ablaufende Flüssigkeit wurde sorgfältig, jedoch ohne dem Cylinder die Wärme der Hand mitzutheilen, durch Fliesspapier weggenommen, bis auch nicht die geringste

Spur von Feuchtigkeit aussen wahrgenommen werden konnte. Hierauf wurde der Cylinder mit seinem Inhalt, von dem nur ausserordentlich wenig durch Verdunstung verloren ging, gewogen, sodann in ein geräumiges Gefäss mit destillirtem Wasser gesetzt, so dass sein oberer Rand genau in der Horizontalebene lag und endlich der Deckel langsam in vertikaler Richtung abgerissen, nicht abgezogen, jedoch in unmittelbarer Nähe über dem Gläschen noch eine Zeit lang wagrecht gehalten, wodurch die mit dem Deckel abgerissene Flüssigkeit vermöge ihrer Schwere wieder in den Cylinder zurücksank. Immerhin wird ein kleiner Verlust von Salz statthaben und man daher die Menge des diffundirten Salzes stets etwas zu gross finden; indess betrug nach unseren Versuchen dieser unvermeidliche Fehler noch nicht 1 Centigramm. Nachdem der Diffusionsstrom mehrere Stunden angehalten hatte, wurde der Glasdeckel vorsichtig auf den Cylinder gesenkt und derselbe herausgehoben, abgetrocknet und wieder gewogen. Der Beobachtungsfehler, den man beim Herausnehmen des Cylinders begeht, ist kaum zu bemerken, da die obersten Schichten in demselben nach Verlauf einer längeren Zeit sich nicht viel von der Dichtigkeit der umgebenden Flüssigkeit unterscheiden, ein Salzverlust also nicht zu befürchten steht. Wenn nun das Gläschen nach der ursprünglichen Salzlösung das Gewicht $p$ und nach der Diffusion das Gewicht $p'$ hatte, so war der Gewichtsverlust $p - p'$ und diesem kann man ohne erheblichen Fehler die Menge des übergetretenen Salzes proportional setzen. Denn es sei $m$ das specifische Gewicht des Salzes, $x$ das Gewicht des diffundirten Salzes, so wird an die Stelle desselben ein gleich grosses Volumen Wasser, welches $\frac{x}{m}$ wiegt, getreten sein, der Gewichtsverlust sich also ergeben

$$= p - p' = x\left(1 - \frac{1}{m}\right)$$

und

$$x = (p - p') : \left(1 - \frac{1}{m}\right).$$

Hierbei haben wir von der geringen Volumänderung ganz abgesehen, welche stets bei der Mischung zweier chemisch verwandten Flüssigkeiten eintritt; wollten wir auf dieselbe Rücksicht nehmen, so blieb kein anderer Weg übrig, als durch quantitative Analyse die Menge des übergetretenen Salzes zu bestimmen, wobei wir uns aber nur der Gefahr aussetzten, durch neue Beobachtungsfehler das Gewicht der gefundenen Resultate zu vermindern. In der folgenden Tabelle sind die Werthe von:

$$S = UQ\int_0^t \psi(t)\,dt$$

zusammengestellt; die erste Columne enthält die specifischen Gewichte der angewendeten Lösungen von Kupfervitriol; die zweite die dem Gewichts-

verluste proportionale Menge des diffundirten Salzes; die vierte die seit Beginn des Versuchs verflossene Zeit in Minuten, die fünfte die Temperatur der Flüssigkeiten, welche zugleich auch die der umgebenden Luft war; die dritte und sechste finden ihre Erklärung weiter unten.

| Specifisches Gewicht der Salzlösung. | Menge des diffundirten Salzes. | Dieselbe auf gleiche anfängliche Concentration reducirt. | Verflossene Zeit in Minuten. | Temperatur nach Celsius. | $\frac{S}{\sqrt{t}}$ proportional der Menge des in der ersten Minute übergetretenen Salzes. |
|---|---|---|---|---|---|
| 1,130 | 0,369 | 0,369 | 373′ | 13° | 0,0191 |
| 1,129 | 0,418 | 0,421 | 475′ | 12° | 0,0193 |
| 1,127 | 0,668 | 0,684 | 1409′ | 11° | 0,0182 |
| 1,122 | 0,423 | 0,451 | 605′ | 7°,5 | 0,0183 |
| 1,112 | 0,422 | 0,490 | 752′ | 12° | 0,0179 |
| 1,119 | 0,433 | 0,472 | 756′ | 7°,5 | 0,0172 |
| 1,123 | 0,446 | 0,471 | 565′ | 12°,5 | 0,0198 |
| 1,123 | 0,524 | 0,554 | 853′ | 12°,5 | 0,0190 |
| 1,122 | 0,939 | 1,001 | 2170′ | 14° | 0,0214 |

Sehen wir zunächst, nach dem bereits oben Bemerkten, von dem Einfluss der Temperatur auf die Diffusion ab, so müssen obige Werthe in der 2. Columne, wenn sie miteinander verglichen werden sollen, auf gleiche anfängliche Concentration reducirt werden. Wir nehmen zu diesem Zwecke an, dass die diffundirten Salzmengen dem anfänglichen Procentgehalt $U$ proportional sind und legen die Concentration der ersten Lösung, welche das specifische Gewicht 1,130 hat, allen übrigen zu Grunde. Die Zahlen der zweiten Columne von der zweiten an müssen daher alle in dem Verhältnisse erhöht werden, als der Procentgehalt der ersten Lösung grösser ist, als der ihnen entsprechende. Aus dem specifischen Gewicht findet man aber den Procentgehalt nach dem Erfahrungssatze, der für unsere Beobachtungen hinreichend genau ist, dass die Procentgehalte zweier Lösungen sich verhalten, wie die Ueberschüsse ihrer specifischen Gewichte über 1. Bedeuten also $p, p'$ die Procentgehalte zweier verschiedener Lösungen eines und desselben Salzes, $s, s'$ die entsprechenden specifischen Gewichte, so ist

$$p : p' = s - 1 : s' - 1.$$

Die rein theoretische Formel dagegen, die auf die chemische Verdichtung keine Rücksicht nimmt, würde, wie man leicht findet, sein müssen:

$$p : p' = \frac{s-1}{s} : \frac{s'-1}{s}.$$

Jene stimmt indess mit den Beobachtungen viel besser überein, als diese

und nach ihr sind die Zahlen der zweiten Columne umgerechnet. Vergleicht man nun die neuen Werthe, die in der dritten Columne stehen, mit den verflossenen Zeiten, so erkennt man auf der Stelle, dass die Mengen des diffundirten Salzes sich nicht einfach wie die Zeiten, sondern ziemlich genau wie die Quadratwurzeln aus denselben verhalten, so dass also:

$$S = c\, UQ\sqrt{t}$$

zu setzen ist; der Quotient $\frac{S}{\sqrt{t}}$ gibt nahezu dieselbe Grösse, nämlich die Quantität des in der ersten Minute übergetretenen Salzes. In der letzten Columne der obigen Tafel sind die aus den Beobachtungen sich ergebenden Werthe zusammengestellt, die so gut untereinander übereinstimmen, dass man wohl keinen Zweifel an der Richtigkeit der Hypothese hegen kann. Nun war aber:

$$S = UQ\int_0^t \psi(t)\, dt$$

folglich ist:

$$\int_0^t \psi(t)\, dt = c\sqrt{t},$$

woraus durch Differentiation nach $t$ sich unmittelbar ergiebt:

$$\psi(t) = \frac{c}{\sqrt{t}}.$$

Bildet man weiter die Abgeleiteten dieser Function, indem man bedenkt, dass:

$$\frac{d^n\,(t^{-\frac{1}{2}})}{dt^n} = (-1)^n \frac{1.3.5\ldots(2n-1)\,t^{-\frac{2n+1}{2}}}{2^n}$$

und setzt sie in 6) ein, so erhält man für den ersten Diffusionsstrom die Gleichung:

$$7)\quad u = \frac{1}{2}U - c\left(\frac{x}{\sqrt{t}} - \frac{1}{\alpha}\frac{x^3}{1.2.3\sqrt{t^3}} + \frac{1}{\alpha^2}\frac{x^5}{1..5}\frac{1.3}{\sqrt{t^5}} - \frac{1}{\alpha^3}\cdot\frac{x^7}{1...7}\cdot\frac{1.3.5}{\sqrt{t^7}} + \ldots\right).$$

Die für den zweiten Diffusionsstrom sich ergebende Reihe unterscheidet sich von 7) nur dadurch, dass in ihr die Constante $\frac{1}{2}U$ wegfällt.

## §. 5.

### Zurückführung der Reihe 7) auf die Kramp'sche Transcendente.

Die unter 7) aufgestellte Reihe lässt sich ohne Mühe auf ein bestimmtes Integral zurückführen. Es ist bekanntlich:

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ty^2}\, dy = \frac{1}{\sqrt{t}},$$

woraus durch $n$ malige Differentiation nach $t$ sich ergiebt:

$$\frac{d^n (t^{-\frac{1}{2}})}{dt^n} = \frac{(-1)^n}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ty^2} y^{2n}\, dy.$$

Setzen wir nun in Gleichung 6)

$$\psi(t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ty^2}\, dy$$

$$\psi'(t) = -\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ty^2} y^2\, dy$$

$$\psi''(t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ty^2} y^4\, dy \text{ etc.}$$

so geht sie in folgende über:

$$u = \frac{1}{2} U - c\sqrt{\frac{\alpha}{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ty^2} \frac{dy}{y} \left\{ xy\sqrt{\frac{2}{\alpha}} - \frac{\left(xy\sqrt{\frac{2}{\alpha}}\right)^3}{1.2.3} + \frac{\left(xy\sqrt{\frac{2}{\alpha}}\right)^5}{1.2..5} - \ldots \right\}$$

Die in Klammern eingeschlossene Reihe ist aber

$$= \sin xy \sqrt{\frac{2}{\alpha}},$$

folglich wird, wenn wir dieses statt der Reihe selbst setzen:

$$8) \qquad u = \frac{1}{2} U - c\sqrt{\frac{\alpha}{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ty^2} \sin xy \sqrt{\frac{2}{\alpha}} \cdot \frac{dy}{y}.$$

Um das vorliegende Integral auf eine einfachere Form zu bringen, benutzen wir die Gleichung:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-a^2x^2} \cos bx\, dx = \frac{\sqrt{\pi}}{a} e^{-\frac{b^2}{4a^2}},$$

setzen darin:

$$a^2 = t, \quad b = x\sqrt{\frac{2}{\alpha}}, \quad x = y,$$

wodurch wir:

$$9) \qquad \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ty^2} \cos xy \sqrt{\frac{2}{\alpha}}\, dy = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{t}} e^{-\frac{x^2}{2\alpha t}}$$

erhalten, multipliciren beide Seiten der Gleichung 9) mit $dx$ und integriren endlich zwischen den Grenzen 0 und $x$, indem wir links die Ordnung der Integration umkehren. Auf diese Weise finden wir:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ty^2} \sin xy \sqrt{\frac{2}{\alpha}} \cdot \frac{dy}{y} = \sqrt{\frac{2\pi}{\alpha t}} \int_0^x e^{-\frac{x^2}{2\alpha t}} dx.$$

Setzen wir diesen Ausdruck in 8) ein, so kommt

$$10) \qquad u = \frac{1}{2} U - \frac{c}{\sqrt{t}} \int_0^x e^{-\frac{x^2}{2\alpha t}} dx$$

und für den zweiten Diffusionsstrom

$$11) \qquad u = -\frac{c}{\sqrt{t}} \int_0^x e^{-\frac{x^2}{2\alpha t}} dx.$$

Zur Bestimmung der Constante $c$ in 10) berücksichtigen wir, dass für $x = \infty$, während $t$ endlich bleibt, die Concentration $u = 0$ wird, also:

$$0 = \frac{1}{2} U - \frac{c}{\sqrt{t}} \int_0^\infty e^{-\frac{x^2}{2\alpha t}} dx = \frac{1}{2} U - \frac{c}{2} \sqrt{2\alpha\pi}.$$

Hieraus findet man die Constante

$$c = \frac{U}{\sqrt{2\alpha\pi}},$$

folglich

$$u = \frac{1}{2} U \left(1 - \frac{2}{\sqrt{2\alpha t\pi}} \int_0^x e^{-\frac{x^2}{2\alpha t}} dx\right)$$

oder wenn wir $\frac{x}{\sqrt{2\alpha t}}$ mit $y$ vertauschen:

$$12) \qquad u = \frac{1}{2} U \left(1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\frac{x}{\sqrt{2\alpha t}}} e^{-y^2} dy\right).$$

Auf ganz ähnliche Weise bestimmen wir die Constante $c$ der Gleichung 11), welche das Gesetz des zweiten Diffusionsstromes enthält, indem wir annehmen, dass für $x = -\infty$, $u = U$ der vollen Concentration wird; hierdurch erhalten wir:

$$c = \frac{2U}{\sqrt{2\alpha\pi}}$$

und

$$13) \qquad u = -\frac{2U}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\frac{x}{\sqrt{2\alpha t}}} e^{-y^2} dy.$$

Es lässt sich aber ausser den angeführten beiden Diffusionsströmen noch ein dritter herstellen auf die Weise, dass man den Salzgehalt der

Mittelschicht constant erhält. In diesem Falle ist für $x=0$, $u=U$ und ebenso für $x=-\infty$, $u=U$, folglich können wir als Gleichung des dritten Diffusionsstromes, dessen Gesetz experimentell jedoch schwer zu prüfen ist, folgende aufstellen:

$$14)\qquad u=U\left(1-\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int\limits_0^{\frac{x}{\sqrt{2\alpha t}}} e^{-y^2}\,dy\right).$$

Bezeichnen wir endlich die Transcendente:

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int\limits_0^{\frac{x}{\sqrt{2\alpha t}}} e^{-y^2}\,dy$$

mit

$$K\left(\frac{x}{\sqrt{2\alpha t}}\right),$$

so sind die Gesetze der drei verschiedenen Diffusionsströme in folgenden drei einfachen Gleichungen ausgesprochen:

$$12)^*\qquad u=\tfrac{1}{2}U\left[1-K\left(\frac{x}{\sqrt{2\alpha t}}\right)\right],$$

$$13)^*\qquad u=-2UK\left(\frac{x}{\sqrt{2\alpha t}}\right),$$

$$14)^*\qquad u=U\left[1-K\left(\frac{x}{\sqrt{2\alpha t}}\right)\right].$$

worin $K\left(\frac{x}{\sqrt{2\alpha t}}\right)$ die Kramp'sche Transcendente für das Argument $\frac{x}{\sqrt{2\alpha t}}$ bedeutet.

## §. 6.

## Prüfung der Gleichung 12)* durch Versuche.

Von der grössten Wichtigkeit für die experimentelle Bestätigung der abgleiteten Gesetze war nun die Auffindung einer Methode, den Procentgehalt der verschiedenen Schichten der Flüssigkeit nach Verlauf einer bestimmten Zeit $t$ möglichst genau zu ermitteln. Am geeignetsten erschien uns hierzu der erste Diffusionsstrom, dessen Gesetz in 12)* enthalten ist. Das cylindrische Gefäss, in welchem derselbe vor sich gehen sollte, hatte etwa 1 Fuss Höhe und $\frac{3}{4}$ Fuss Durchmesser und war unter dem einen Arm einer Mohr'schen Wage mit verschiebbaren Wagebalken so aufgestellt, dass ein von jenem frei herabhängender Körper in der Gleichgewichtslage mitten über dem Gefäss sich befand. Zuerst war es nöthig, die Grundbedingung des Versuches zu erfüllen, dass reines Wasser über die Salzlösung gebracht wird, ohne sich mit derselben mechanisch zu vermischen. Dies erreichten wir schnell und sicher auf folgende Weise. Der Cylinder wurde

bis zu einer gewissen Höhe etwa zur Hälfte mit destillirtem Wasser gefüllt und sodann die Salzlösung (Kupfervitriol) aus einem höher stehenden Gefäss durch eine Röhre auf den Boden des Cylinders geleitet. Zur Regulirung des Ausfliessens, das nicht unter zu grossem hydrostatischen Drucke geschehen darf, war an der Röhre ein Hahn angebracht, durch welchen dieselbe vollständig oder theilweise geschlossen werden konnte. Die langsam einfliessende Salzlösung breitete sich vermöge ihrer grösseren Schwere ruhig am Boden des Cylinders aus und hob das darüber stehende Wasser, ohne die geringste mechanische Mengung zu verursachen, in die Höhe. Sobald sie eine bestimmte Marke des Cylinders erreicht hatte, wurde der Hahn geschlossen und die Röhre vorsichtig herausgezogen. Das Gefäss blieb nun mehrere Tage vollkommen in Ruhe, bis sich an der Färbung der oberen Flüssigkeit zeigte, dass der Diffusionsstrom zu einer ziemlichen Höhe gestiegen war. Hierauf wurde von oben nach unten das specifische Gewicht der Flüssigkeit in verschiedenen, gleichweit von einander abstehenden Querschnitten und zur Controle noch einmal in umgekehrter Richtung von unten nach oben in denselben Intervallen beobachtet. Wir bedienten uns zur Bestimmung des specifischen Gewichts eines Triangels von Glas, welcher aus drei gleichen, etwa 2″ langen und 2½‴ dicken Stücken eines massiven cylindrischen Glasstabes zusammengesetzt und an dem einen Arm der Wage mit Coconfäden dergestalt aufgehängt war, dass er genau in horizontaler Lage sich befand. Zuerst wurde er an der Luft gewogen, sodann in die verschiedenen Schichten der Flüssigkeit eingesenkt und sein Gewicht in denselben bestimmt, woraus sich unmittelbar sein Gewichtsverlust ergiebt. Ist derselbe in reinem destillirtem Wasser $v$, in irgend einer salzhaltigen Schicht von derselben Temperatur $v'$, so ist $\frac{v'}{v}$ für unsere Zwecke hinreichend genau das specifische Gewicht der darin befindlichen Lösung, folglich der Procentgehalt oder die Concentration $p$ proportional

$$\frac{v'}{v} - 1 = \frac{1}{v}(v' - v),$$

d. h. dem Ueberschuss des Gewichtsverlustes in der Salzlösung über den im reinen Wasser. Mit Hülfe der Formel 12)*

$$u = \frac{1}{2} U \left[1 - K\left(\frac{x}{\sqrt{2\alpha t}}\right)\right]$$

wurde zunächst der Werth der Funktion

$$K\left(\pm \frac{x}{\sqrt{2\alpha t}}\right) = \pm \left(\frac{1}{2} U - u\right) : \frac{1}{2} U$$

berechnet und sodann aus:

$$K\left(\frac{x}{\sqrt{2\alpha t}}\right) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\frac{x}{\sqrt{2\alpha t}}} e^{-y^2} dy$$

das Argument $\frac{x}{\sqrt{2\alpha t}}$ ermittelt, wobei wir uns der Kramp'schen Tafeln, die ausser in Kramp's Werk über astronomische Refraction auch in Cournot's Wahrscheinlichkeitsrechnung und in *A. Meyer théorie des intégrales définies* sich finden, bedienten. Aus dem Argument $\frac{x}{\sqrt{2\alpha t}}$ wurde ferner für jede einzelne Beobachtung die Grösse $\frac{1}{\alpha}$, die der Zeit proportional ist, nach welcher zwischen zwei unendlich dünnen Flüssigkeitsschichten von verschiedener Concentration chemisches Gleichgewicht eintritt, berechnet. So ergiebt sich z. B. in der ersten Versuchsreihe, bei der $t = 91^h$, $\frac{U}{2} = 0{,}145$ für $x = -11$, $u = 0{,}281$

$$\left(u - \frac{U}{2}\right) : \frac{U}{2} = 0{,}9379 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\frac{-11}{\sqrt{182\alpha}}} e^{-y^2} dy,$$

$$\frac{11}{\sqrt{182\,\alpha}} = 1{,}319,$$

$$\frac{1}{\alpha} = 2{,}616.$$

Aus jeder Versuchsreihe wurde endlich ein mittlerer Werth für $\frac{1}{\alpha}$ und mit Zugrundelegung desselben der Procentgehalt sämmtlicher Schichten theoretisch bestimmt. Bei allen drei Versuchsreihen sind die Differenzen der beobachteten und berechneten Werthe nicht grösser, als die wahrscheinlichen Beobachtungsfehler und es harmoniren Beobachtung und Theorie so gut, dass an der Richtigkeit der aufgefundenen Gesetze nicht der geringste Zweifel stattfinden kann.

In den folgenden drei Tabellen enthält die erste Columne die Abstände $x$ von der Mittelschicht von unten nach oben geordnet, jedes Intervall beträgt $2{,}85^{mm}$; die zweite das Gewicht des Glaskörpers in den einzelnen Schichten; die dritte den Ueberschuss des Gewichtsverlustes in der Lösung über den im Wasser, welcher der Concentration proportional ist; die vierte die Werthe von $K\left(\frac{x}{\sqrt{2\alpha t}}\right)$ berechnet aus $\pm\,(u - \frac{1}{2}U) : \frac{1}{2}U$; die fünfte die Argumente $\frac{x}{\sqrt{2\alpha t}}$, die sechste die umgekehrten Diffusionsgeschwindigkeiten $\frac{1}{\alpha}$; die siebente endlich die mit Zugrundelegung eines Mittelwerthes von $\frac{1}{\alpha}$ berechnete Concentration der aufeinanderfolgenden Schichten.

### Erste Reihe.

Zeit des Versuchs 5. Juni 4 Uhr 30 Min. Nachmittags bis 9. Juni 11—12 Mittags, Dauer der Diffusion 91 Stunden. Temperatur 20—23° C. Gewicht des Glaskörpers in der Luft 8,024 gr., im Wasser 5,443. Specifisches Gewicht der Lösung 1,109.

| $x$ | Gewicht des Glaskörpers. | Beobachteter Procentgehalt | $K\left(\frac{x}{\sqrt{2\alpha t}}\right)$ | $\frac{x}{\sqrt{2\alpha t}}$ | $\frac{1}{\alpha}$ | Berechneter Procentgehalt für $\frac{1}{\alpha}=2{,}62.$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| —11 | 5,163 | 0,280 | 0,93793 | 1,3190 | 2,616 | 0,281 |
| —10 | 5,166 | 0,277 | 0,91034 | 1,20 | 2,744 | 0,277 |
| — 9 | 5,172 | 0,271 | 0,86897 | 1,0677 | 2,561 | 0,272 |
| — 8 | 5,180 | 0,264 | 0,82069 | 0,950 | 2,566 | 0,265 |
| — 7 | 5,187 | 0,257 | 0,77241 | 0,8531 | 2,703 | 0,256 |
| — 6 | 5,197 | 0,245 | 0,68966 | 0,7172 | 2,60 | 0,246 |
| — 5 | 5,208 | 0,235 | 0,62069 | 0,6216 | 2,81 | 0,232 |
| — 4 | 5,222 | 0,221 | 0,52414 | 0,5041 | 2,89 | 0,218 |
| — 3 | 5,242 | 0,201 | 0,38621 | 0,3568 | 2,57 | 0,202 |
| — 2 | 5,26 | 0,183 | 0,26207 | 0,2365 | 2,544 | 0,184 |
| — 1 | 5,278 | 0,165 | 0,13793 | 0,1228 | 2,744 | 0,165 |
| 0 | 5,298 | 0,145 | | | | 0,145 |
| + 1 | 5,319 | 0,124 | 0,14483 | 0,129 | 3,006 | 0,125 |
| + 2 | 5,336 | 0,107 | 0,26207 | 0,2365 | 2,544 | 0,106 |
| + 3 | 5,354 | 0,089 | 0,38621 | 0,3568 | 2,574 | 0,088 |
| + 4 | 5,367 | 0,076 | 0,47586 | 0,4504 | 2,307 | 0,072 |
| + 5 | 5,381 | 0,062 | 0,57242 | 0,5609 | 2,29 | 0,058 |
| + 6 | 5,391 | 0,052 | 0,64138 | 0,6988 | 2,128 | 0,044 |
| + 7 | 5,403 | 0,040 | 0,72414 | 0,7705 | 2,205 | 0,034 |
| + 8 | 5,41 | 0,033 | 0,77242 | 0,8531 | 2,058 | 0,025 |

### Zweite Reihe.

Zeit des Versuchs 24. Juni 3—4 Uhr Nachmittag bis 3. Juli 3 Uhr 30 Min. bis 4 Uhr 40 Min. Nachmittags. Dauer der Diffusion 216 Stunden. Gewicht des Glaskörpers in der Luft 18,683, im Wasser 12,738. Specifisches Gewicht der Lösung 1,079.

| $x$ | Gewicht des Glaskörpers. | Beobachteter Procentgehalt | $K\left(\frac{x}{\sqrt{2\alpha t}}\right)$ | $\frac{x}{\sqrt{2\alpha t}}$ | $\frac{1}{\alpha}$ | Berechneter Procentgehalt für $\frac{1}{\alpha} = 2{,}64$. |
|---|---|---|---|---|---|---|
| — 11 | 12,281 | 0,457 | 0,74427 | 0,803 | 2,30 | 0,465 |
| — 10 | 12,291 | 0,447 | 0,70610 | 0,742 | 2,38 | 0,454 |
| — 9 | 12,302 | 0,436 | 0,66412 | 0,680 | 2,47 | 0,440 |
| — 8 | 12,315 | 0,423 | 0,6145 | 0,6136 | 2,54 | 0,426 |
| — 7 | 12,331 | 0,407 | 0,55343 | 0,5381 | 2,55 | 0,409 |
| — 6 | 12,348 | 0,390 | 0,48855 | 0,4642 | 2,58 | 0,391 |
| — 5 | 12,367 | 0,371 | 0,41603 | 0,3871 | 2,58 | 0,372 |
| — 4 | 12,388 | 0,350 | 0,33588 | 0,307 | 2,54 | 0,352 |
| — 3 | 12,410 | 0,328 | 0,25191 | 0,227 | 2,47 | 0,330 |
| — 2 | 12,432 | 0,306 | 0,16794 | 0,1499 | 2,40 | 0,308 |
| — 1 | 12,454 | 0,284 | 0,08397 | 0,0745 | 2,39 | 0,285 |
| 0 | 12,476 | 0,262 | | | | 0,262 |
| + 1 | 12,5 | 0,238 | 0,09160 | 0,0813 | 2,855 | 0,239 |
| + 2 | 12,526 | 0,212 | 0,19084 | 0,1708 | 3,15 | 0,216 |
| + 3 | 12,548 | 0,190 | 0,27480 | 0,2485 | 2,964 | 0,194 |
| + 4 | 12,568 | 0,170 | 0,35114 | 0,3219 | 2,797 | 0,173 |
| + 5 | 12,587 | 0,151 | 0,42867 | 0,3950 | 2,696 | 0,152 |
| + 6 | 12,603 | 0,135 | 0,48473 | 0,46 | 2,539 | 0,133 |
| + 7 | 12,619 | 0,119 | 0,54580 | 0,5291 | 2,473 | 0,115 |
| + 8 | 12,633 | 0,105 | 0,59922 | 0,5941 | 2,382 | 0,098 |
| + 9 | 12,647 | 0,091 | 0,65267 | 0,6644 | 2,354 | 0,084 |
| + 10 | 12,659 | 0,079 | 0,69847 | 0,7307 | 2,306 | 0,071 |

### Dritte Reihe.

Zeit des Versuchs 5. Juli 4 Uhr 15—40 Min. Nachmittags bis 8. Juli 3 Uhr 15 Min. bis 4 Uhr 30 Min. Nachmittags. Dauer der Diffusion 72 St. Gewicht des Glaskörpers in der Luft 18,687, im Wasser 12,747.

| $x$ | Gewicht des Glaskörpers. | Beobachteter Procentgehalt | $K\left(\frac{x}{\sqrt{2\alpha t}}\right)$ | $\frac{x}{\sqrt{2\alpha t}}$ | $\frac{1}{\alpha}$ | Berechneter Procentgehalt für $\frac{1}{\alpha}=2{,}68$. |
|---|---|---|---|---|---|---|
| — 11 | 12,270 | 0,477 | 0,97107 | 1,5446 | 2,839 | 0,476 |
| — 10 | 12,274 | 0,473 | 0,95454 | 1,4144 | 2,880 | 0,471 |
| — 9 | 12,280 | 0,467 | 0,92975 | 1,28 | 2,912 | 0,464 |
| — 8 | 12,289 | 0,458 | 0,89256 | 1,1381 | 2,914 | 0,454 |
| — 7 | 12,304 | 0,443 | 0,83058 | 0,9716 | 2,799 | 0,441 |
| — 6 | 12,321 | 0,426 | 0,76033 | 0,8314 | 2,764 | 0,424 |
| — 5 | 12,342 | 0,405 | 0,67356 | 0,6938 | 2,772 | 0,403 |
| — 4 | 12,369 | 0,378 | 0,56198 | 0,5483 | 2,706 | 0,378 |
| — 3 | 12,396 | 0,351 | 0,45041 | 0,4213 | 2,864 | 0,348 |
| — 2 | 12,432 | 0,315 | 0,30165 | 0,2740 | 2,702 | 0,315 |
| — 1 | 12,468 | 0,279 | 0,15190 | 0,1354 | 2,64 | 0,279 |
| 0 | 12,505 | 0,242 | | | | 0,242 |
| + 1 | 12,543 | 0,204 | 0,15702 | 0,140 | 2,822 | 0,205 |
| + 2 | 12,577 | 0,170 | 0,29752 | 0,270 | 2,624 | 0,169 |
| + 3 | 12,608 | 0,139 | 0,42562 | 0,3971 | 2,523 | 0,136 |
| + 4 | 12,638 | 0,109 | 0,54959 | 0,5336 | 2,562 | 0,106 |
| + 5 | 12,663 | 0,084 | 0,65289 | 0,6648 | 2,546 | 0,081 |
| + 6 | 12,684 | 0,063 | 0,73967 | 0,7957 | 2,532 | 0,060 |
| + 7 | 12,702 | 0,045 | 0,81405 | 0,9352 | 2,570 | 0,043 |
| + 8 | 12,716 | 0,031 | 0,87190 | 1,0758 | 2,604 | 0,030 |
| + 9 | 12,726 | 0,021 | 0,91322 | 1,211 | 2,607 | 0,020 |
| + 10 | 12,732 | 0,015 | 0,93802 | 1,32 | 2,509 | 0,013 |
| + 11 | 12,737 | 0,010 | 0,95868 | 1,4426 | 2,433 | 0,006 |

Fassen wir zum Schluss die gefundenen Resultate noch einmal kurz zusammen, so lassen sich über Diffusionsströme folgende 6 Hauptsätze aufstellen, von denen jedoch 1 und 2 nur für den ersten Strom gültig sind:

1) Die Concentration in der Mittelschicht einer Diffusionsreihe ist unabhängig von der verflossenen Zeit und gleich der Hälfte des anfänglichen Salzgehaltes:

$$u_0 = \frac{U}{2}.$$

2) Die Summe der Concentrationen zweier Schichten, welche von der mittleren gleichweit abstehen, ist gleich der anfänglichen Concentration:

$$u_x + u_{-x} = U.$$

3) Die Menge des aus der Salzlösung übergetretenen Salzes ist dem Querschnitt des Cylinders, in welchem der Strom vor sich geht, der anfänglichen Concentration und der Quadratwurzel aus der verflossenen Zeit direct proportional:

$$S = c\,Q\,U\sqrt{t}.$$

4) Der Ueberschuss des Salzgehaltes der ursprünglichen Grenzschicht über die nächstfolgende ist umgekehrt proportional der Quadratwurzel aus der verflossenen Zeit:

$$\frac{1}{2}U - u = \frac{c}{\sqrt{t}}.$$

5) Die Concentrationen bilden von oben nach unten eine abnehmende Reihe, deren allgemeines Glied eine transcendente Function des Abstandes von der Mittelschicht und der verflossenen Zeit ist, welche sich auf die Kramp'sche Transcendente zurückführen lässt. S. Gl. 12, 13, 14.

6) Die Geschwindigkeit des Ueberströmens ist proportional dem Diffusionscoefficienten $\alpha$, welcher nicht von der anfänglichen Concentration abhängt, aber wahrscheinlich mit der Temperatur zunimmt. Dieser Diffusionscoefficient ist für verschiedene Salze verschieden und lässt sich zugleich als ein Maass für die chemische Verwandtschaft des Salzes zum Wasser betrachten.

---

# Kleinere Mittheilungen.

---

**X. Eine unbestimmte Aufgabe.** Da die Zahl 10 Primitivwurzel von 7 ist, so bildet der Bruch $\frac{1}{7}$ in einen Decimalbruch verwandelt eine 6stellige Periode, und ebenso wird die Periode irgend eines anderen Siebentels eine 6stellige sein, und aus denselben Ziffern, nur in immer anderer Reihenfolge, bestehen. Betrachtet man diese verschiedenen Perioden als ganze Zahlen, so hat man demnach 6 sechsstellige Zahlen, welche dieselben Ziffern besitzen, und in dem Verhältnisse $1:2:3:4:5:6$ stehen.

Es liegt sehr nahe, die Frage aufzustellen, ob nicht diese Bedingungen genügen, um abgesehen von der Verwandlung gewöhnlicher Brüche in Decimalbrüche, die Zahl zu finden, welche wir als die Periode von $\frac{1}{7}$ kennen gelernt haben. In der That lässt sich auch ein ziemlich elegantes Verfahren dazu angeben, wenn man nur die Bedingung noch hinzufügen darf, dass die gesuchte Zahl keine Null enthalten soll. Darnach spricht also die Aufgabe sich so aus: eine sechsziffrige Zahl $A$ zu finden, welche keine Null enthält und die Eigenschaft besitzt, bei Multiplication mit 1, 2, 3, 4, 5, 6 immer wieder sechsziffrige aus denselben Ziffern in verschiedener Reihenfolge bestehende Zahlen zu liefern.

Es sei $A = abcdef$, wo die Buchstaben die Ziffern bedeuten mögen und die Rangordnung den Werth der einzelnen als Zehner, Hunderter u. s. w. bestimmen soll. Nun ist klar, dass $a=1$ sein muss, weil sonst $6A$ eine 7stellige Zahl würde. Ferner kann $f$ weder 0 noch 5 noch 2, 4, 6, 8 sein, weil ja $A$ keine Null enthalten soll und sonst die Produkte $2A$, $4A$, $6A$ oder $5A$ mit Null endigten, welche also schon in $A$ vorhanden sein müssten. In Bezug auf $f$ bleibt also nur die Wahl

$$f = 1, 3, 7, 9.$$

Wäre $f=1$ so würden die Producte $A, 2A, 3A \ldots 6A$ sich auf 1, 2, 3, 4, 5, 6 endigen, und da diese 6 Ziffern alle verschieden sind, ferner alle in $A$ vorkommen sollen, so müssten die Zahlen $a, b, c, d, e$ in einer oder der anderen Reihenfolge den 2, 3, 4, 5, 6 entsprechen (1 ist schon durch $f$ in Beschlag genommen). Darnach wäre $a$ von 1 verschieden, was einen Widerspruch bildet.

Ebensowenig kann $f=3$ sein. Die betreffenden Endziffern wären nämlich alsdann 3, 6, 9, 2, 5, 8 unter welchen keine 1 vorkommt; und ganz dasselbe ist bei $f=9$ der Fall, wo die Endziffern 9, 8, 7, 6, 5, 4 heissen würden. Kann also der Aufgabe überhaupt genügt werden, so muss es durch $f=7$ der Fall sein. In der That endigen sich alsdann die Producte:

$$1A,\quad 2A,\quad 3A,\quad 4A,\quad 5A,\quad 6A,$$

auf

$$7,\quad 4,\quad 1,\quad 8,\quad 5,\quad 2,$$

unter welchen eine 1 sich findet, welche $=a$ sein kann. Die gesuchte Zahl heisst somit:

$$A=1\,b\,c\,d\,e\,7,$$

wo $b, c, d, e$ sich in 2, 4, 5, 8 zu theilen haben.

Nun ist $e=4$ unmöglich, weil sonst $2A$ mit 94 endigen würde, während die 9 überhaupt nicht darin vorkommen kann; $e=8$ würde in dem Producte $3A$ die unmögliche Ziffer 6 ergeben; $e=2$ endlich gäbe bei $4A$ die Ziffer 0. Wir erhalten demnach für $e$ nur noch die Möglichkeit 5 und somit ist

$$A=1\,b\,c\,d\,5\,7,$$

wo $b, c, d$ sich in 2, 4, 8 theilen.

Dasselbe Princip lehrt uns $d=4$ als unmöglich wegen $2A$, und $d=2$ unmöglich wegen $4A$, also

$$A=1\,b\,c\,8\,5\,7,$$

wo $b, c$ sich in 2, 4 theilen.

Da $c$ wegen $2A$ unmöglich $=4$ sein kann, so muss also

$$A=1\,4\,2\,8\,5\,7$$

sein, wenn überhaupt der gestellten Aufgabe Genüge geleistet werden kann.

Cantor.

---

**XI. Ueber die Determinante** $Q_p=\Sigma\pm(a_0+b_0)^p\,(a_1+b_1)^p\ldots(a_n+b_n)^p$ von Dr. G. Zehfuss in Darmstadt. Die obige Determinante ist für $p=-1$ von Cauchy (*Exercices d'anal.* 2), und für $p=-2$ von Borchardt (Crelle's Journal, Bd. 53) betrachtet worden. Nach Cauchy ist nämlich, wenn $P$ das Product aller Differenzen gegebener Grössen bezeichnet, und $\Pi$ das bekannte Productenzeichen vorstellt:

$$Q_{-1}=P(a_0, a_1\ldots, a_n)\,.\,P(b_0\ldots b_n):\Pi_{i,k}(a_i+b_k),$$

und ähnlicher Weise hat Borchardt gezeigt, dass

$$Q_{-2}=Q_{-1}\,.\,\Sigma\frac{1}{a_0+b_0}\,\frac{1}{a_1+b_1}\cdots\frac{1}{a_n+b_n},$$

wo die letztere Summe fast wie eine Determinante gebildet wird, nur mit dem Unterschiede, dass die Glieder anstatt mit abwechselnden Zeichen sämmtlich positiv anzusetzen sind. — Ich bemerke hierzu, dass solche auch

von Joachimsthal (Crelle, Bd. 53) betrachtete Summen $\Sigma a_0 b_1 c_2 \ldots$, die aus Determinanten $\Sigma \pm a_0 b_1 c_2 \ldots$ dadurch entstehen, dass man alle Glieder mit positiven Zeichen ansetzt, eine einfache Darstellung durch bestimmte Integrale gestatten. So ist z. B., wenn das Product der vier Factoren

$$(a_0 1^\alpha + b_0 1^\beta + c_0 1^\gamma + d_0 1^\delta)(a_1 1^\alpha + b_1 1^\beta + c_1 1^\gamma + d_1 1^\delta)$$
$$\times (a_2 1^\alpha + b_2 1^\beta + c_2 1^\gamma + d_2 1^\delta)(a_3 1^\alpha + b_3 1^\beta + c_3 1^\gamma + d_3 1^\delta)$$

worin $1^\alpha$ für $\cos 2\pi\alpha + i \sin 2\pi\alpha$ gesetzt ist, durch $X$ bezeichnet wird:

$$\Sigma a_0 b_1 c_2 d_3 = \overline{\int\int\int\int}_0^1 X 1^{-\alpha-\beta-\gamma-\delta} \, d\alpha \, d\beta \, d\gamma \, d\delta.$$

Joachimsthal beweist in seinem Aufsatze: *De aeq. quarti et sexti gradus etc. pag.* 171, (*ibid.*), dass wenn man von einem Punkte aus 6 Normalen auf eine Fläche zweiten Grades fällt, und die Fusspunkte von dreien derselben durch $(x_1 y_1 z_1)$, $(x_2 y_2 z_2)$, $(x_3 y_3 z_3)$ bezeichnet, die Fusspunkte der drei übrigen in einer Ebene liegen, deren Gleichung aus 24 Gliedern besteht. Setzt man aber das Product der 4 Factoren

$$(x 1^\alpha + x_1 1^{\alpha_1} + x_2 1^{\alpha_2} + x_3 1^{\alpha_3})(y 1^\alpha + y_1 1^{\alpha_1} + y_2 1^{\alpha_2} + y_3 1^{\alpha_3})$$
$$\times (z 1^\alpha + z_1 1^{\alpha_1} + z_2 1^{\alpha_2} + z_3 1^{\alpha_3})(1^\alpha + 1^{\alpha_1} + 1^{\alpha_2} + 1^{\alpha_3})$$

gleich $Y$, so lässt sich jene Gleichung unter der einfachen Form

$$\overline{\int\int\int\int}_0^1 Y 1^{-\alpha-\alpha_1-\alpha_2-\alpha_3} \, d\alpha \, d\alpha_1 \, d\alpha_2 \, d\alpha_3 = 0$$

darstellen.

Wir kehren wieder zur Determinante $Q_p$ zurück. Ist der absolute Werth des negativen Exponenten $p$ grösser als 2, so ergeben sich keine einfachen Gesetze mehr. Wir wollen daher die Determinante $Q_p$ für positive Werthe von $p$ betrachten, in welchem Falle ihr Werth stets durch $P(a_0 \ldots a_n)\, P(b_0 \ldots b_n)$ theilbar ist, weil $Q$ offenbar verschwindet, wenn man z. B. $a_0 = a_1$ setzt, indem alsdann in der Determinante zwei Reihen oder Colonnen gleich werden, was bekanntlich ein Verschwinden von $Q$ zur Folge hat. Wenn aber $Q$, ein ganzes Polynom, verschwindet, sobald $a_0 = a_1$ wird, so enthält es den Factor $a_0 - a_1$, also überhaupt sämmtliche Factoren $P(a_0 \ldots a_n)\, P(b_0 \ldots b_n)$. — Nun ist $Q$ in Bezug auf $a_0$ vom $p^{\text{ten}}$, und $P(a_0 \ldots a_n)$ bezüglich $a_0$ vom $n^{\text{ten}}$ Grade; also kann unmöglich $Q$ durch $P$ theilbar sein, sobald $p < n$, d. h. man hat

$$Q_p = 0, \text{ wenn } p < n.$$

So ist z. B.

$$\Sigma \pm (a_0 + b_0)^2 (a_1 + b_1)^2 (a_2 + b_2)^2 (a_3 + b_3)^2 = 0.$$

Wenn dagegen $p = n$ ist, so kann $Q$ den Factor $P$ enthalten, und der Werth von $Q$ ergibt sich dann direct auf folgende Weise. Multiplicirt man die beiden Determinanten

$$R=\begin{vmatrix} 1 & n_1 a_0 & n_2 a_0^2 & n_3 a_0^3 \dots a_0^n \\ 1 & n_1 a_1 & n_2 a_1^2 & n_3 a_1^3 \dots a_1^n \\ 1 & n_1 a_2 & n_2 a_2^2 & n_3 a_2^3 \dots a_2^n \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & n_1 a_n & n_2 a_n^2 & n_3 a_n^3 \dots a_n^n \end{vmatrix},$$

$$S=\begin{vmatrix} b_0^n & b_0^{n-1} & b_0^{n-2} \dots 1 \\ b_1^n & b_1^{n-1} & b_1^{n-2} \dots 1 \\ b_2^n & b_2^{n-1} & b_2^{n-2} \dots 1 \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ b_n^n & b_n^{n-1} & b_n^{n-2} \dots 1 \end{vmatrix}$$

miteinander, wo $n_t$ den $t^{\text{ten}}$ Coefficienten der Entwickelung von $(x+y)^n$ bezeichnet, so erhält man nach der Gauss'schen Multiplicationsregel eine Determinante, deren allgemeines Element $c_{r,s}$ offenbar gleich

$$b_r^n + n_1 b_r^{n-1} a_s + n_2 b_r^{n-2} a_s^2 + \dots + a_s^n = (b_r + a_s)^n$$

ist, und die mithin mit $Q_n$ zusammenfällt. Es wäre daher $Q_n = R.S.$ Zieht man aber aus den Verticalcolonnen von $R$ die gemeinsamen Factoren $n_1$, $n_2 \dots$ heraus, so entsteht

$$R = n_1 n_2 n_3 \dots \Sigma \pm a_0^0 a_1^1 a_2^2 \dots a_n^n,$$

d. h. nach einem Satze von Vandermonde:

$$R = n_1 n_2 n_3 \dots P(a_0 \dots a_n)$$

Um den Werth von $S$ zu finden, nehmen wir in dieser Determinante solche Vertauschungen der Colonnen vor, dass die Diagonalreihen ihre Stellen wechseln, wodurch eine Determinante $\Sigma \pm b_0^0 b_1^1 b_2^2 \dots$, zum Vorschein käme. Indem man aber in einer Determinante $\Sigma \pm \alpha_0 \beta_1 \gamma_2 \dots$ solche Vertauschungen vornimmt, dass die Diagonalreihen ihre Stellen wechseln, verwandelt sich das erste Glied $\alpha_0 \beta_1 \dots \nu_n$, welches nach Cramer kein Derangement darbietet, in das letzte $\alpha_n \beta_{n-1} \gamma_{n-2} \dots \nu_0$, das $1+2+3\dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$ Derangements besitzt. Durch die Verwechselung der Diagonalreihen geht mithin ein Factor $(-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}$ ein, so dass man hat

$$S = (-1)^{\frac{n(n+1)}{2}} . \Sigma \pm b_0^0 b_1^1 b_2^2 \dots = (-1)^{\frac{n(n+1)}{2}} P(b_0 \dots b_n).$$

Wir hätten also endlich für $p = n$ den Werth

$$Q_n = (-1)^{\frac{n(n+1)}{2}} P(a_0 \dots a_n) P(b_0 \dots b_n).$$

So ist z. B.

$$\Sigma \pm (a_0 + b_0)^2 (a_1 + b_1)^2 (a_2 + b_2)^2 = - \begin{cases} (a_0 - a_1)(a_0 - a_2)(a_1 - a_2) \\ (b_0 - b_1)(b_0 - b_2)(b_1 - b_2) \end{cases}.$$

Wenn endlich $p > n$, so ergeben sich wieder keine einfache Gesetze für den Werth von $Q$, obgleich sich, wenn man in den einzelnen Elementen $(a_r + b_s)^p = a_r^p + p_1 . a_r^{p-1} b_s +$ etc. ausführt, mit Anwendung eines von

Jacobi in: *De format. et propr. det*, S. 14. angeführten Satzes eine Zerlegung in eine Anzahl Aggregate anderer Determinanten ergibt, von denen einige einfache Bestimmungen zulassen.

---

**XII. Zu der Lehre vom Viereck.** Im dritten Heft des dritten Jahrgangs dieser Zeitschrift hat H. Vorländer für die dem Gerling'schen Werke über „die Ausgleichungen der praktischen Geometrie" entnommene Aufgabe der Ausgleichung zwischen den vier Seiten und zwei Diagonalen eines Vierecks eine Auflösung mitgetheilt, welche im Gegensatz gegen die von Herrn Prof. Gerling selbst gegebene auf einer directen Entwickelung der Bendigungsgleichung zwischen den Verbesserungen der sechs gemessenen Längen beruht. Ein andrer Weg zu dieser Bedingungsgleichung wird hier nicht sowohl um der Aufgabe selbst willen, als wegen der für die Lehre vom Viereck erheblichen Folgerungen, welche sich an dieselbe anschliessen, veröffentlicht.

1. Wir bezeichnen die vier Seiten und die zwei Diagonalen, oder die vier Gegenseiten des vollständigen Vierecks mit $a$ und $a'$, $b$ und $b'$, $c$ und $c'$ in solcher Auswahl, dass $c$ einen hohlen Winkel zwischen $a$ und $b$ theilt, $a'$, $b'$, $c'$ aber ein Dreieck bilden. Nach einer Schreibart, welche wir auch für die anderen Winkel und Dreiecke der Figur in Anwendung bringen, heisst jener hohle Winkel $(a, b)$, der Flächeninhalt des besagten Dreiecks aber $(a', b', c')$.

Zur Entwicklung der Differentialgleichung zwischen den sechs Seiten stehen uns unter anderen Wegen die folgenden zwei offen:

Die Gleichung

$$1)\qquad (b, c) + (c, a) = (a, b)$$

gibt differenziirt:

$$2)\qquad d(b, c) + d(c, a) - d(a, b) = 0.$$

Ersetzen wir hier die Differentiale der Winkel durch ihre Ausdrücke in den Differentialen der mit den Winkeln in einerlei Dreieck vorkommenden Seiten, so ist der Zweck erreicht.

Oder: aus der Gleichung

$$3)\qquad (a', b, c) + (a, b', c) = (a, b, c') \pm (a', b', c'),$$

in welcher das obere oder untere Zeichen gilt, je nachdem die zwei letzten Dreiecke von $c'$ getrennt sind oder nicht, ergibt sich:

$$4)\qquad d(a', b, c) + d(a, b', c) - d(a, b, c') \mp d(a', b', c') = 0;$$

ersetzen wir das Differential jeder Dreiecksfläche durch einen Ausdruck in den Differentialen der drei Seiten, so ist ebenfalls das verlangte geleistet.

2. Hülfsformeln für das Dreieck.

Liegen die Winkel $\alpha, \beta, \gamma$ den Seiten eines Dreiecks vom Inhalt $F$ gegenüber, so gibt die Gleichung:

$$a = b \cos\gamma + c \cos\beta$$

differenziirt:

$$da = db\,.\,\cos\gamma + dc\,.\,\cos\beta - b \sin\gamma\,.\,d\gamma - c \sin\beta\,.\,d\beta$$

wird beiderseits mit $b \sin\gamma = c \sin\beta$ dividirt und vermöge

$$\alpha + \beta + \gamma = \pi$$

auch $d\alpha$ anstatt $-d\beta - d\gamma$ eingeführt, so zeigt sich:

$$5)\qquad \frac{a\,da}{2F} = \frac{db}{b}\,.\,\cot\gamma + \frac{dc}{c}\,.\,\cot\beta + d\alpha.$$

Ferner gibt die Gleichung:

$$2F = b\,c \sin\alpha$$

differenziirt:

$$2dF = (c\,db + b\,dc)\sin\alpha + b\,c\cos\alpha\,.\,d\alpha.$$

Wird hiervon die mit $b\,c\cos\alpha$ multiplicirte Gleichung 5) abgezogen, so folgt:

$$2dF - a\,da\,.\,\cot\alpha = c\,db\,.\,(\sin\alpha - \cot\gamma\,.\,\cos\alpha) + b\,dc\,.\,(\sin\beta - \cot\beta\cos\alpha)$$

$$= -\frac{c\,db}{\sin\gamma}\,.\,\cos(\gamma+\alpha) - \frac{b\,dc}{\sin\gamma}\,.\,\cos(\alpha+\beta)$$

$$= \frac{b\,db}{\sin\gamma}\cos\beta + \frac{c\,dc}{\sin\gamma}\cos\gamma.$$

$$6)\qquad 2\,dF = a\,da\,.\,\cot\alpha + b\,db\,.\,\cot\beta + c\,dc\,.\,\cot\gamma.$$

3. Differentialgleichung zwischen den sechs Seiten des vollständigen Vierecks.

Die Gleichung 5) auf die Dreiecke $(a', b, c)$, $(a, b', c)$, $(a, b, c')$ angewendet gibt:

$$7)\qquad \begin{cases} \dfrac{a'\,da'}{2\,(a', b, c)} = \dfrac{db}{b}\cot(a', b) + \dfrac{dc}{c}\cot(c, a') + d\,(b, c) \\[2ex] \dfrac{b'\,db'}{2\,(a, b', c)} = \dfrac{dc}{c}\cot(b', c) + \dfrac{a\,da}{a}\cot(a, b') + d\,(c, a) \\[2ex] \dfrac{c'\,dc'}{2\,(a, b, c')} = \dfrac{da}{a}\cot(c', a) + \dfrac{db}{b}\cot(b, c') + d\,(a, b) \end{cases}$$

oder vermöge 2) nach einigen naheliegenden Umwandlungen:

$$8)\qquad \frac{a'\,da'}{2\,(a', b, c)} + \frac{b'\,db'}{2\,(a, b', c)} - \frac{c'\,dc'}{2\,(a, b, c')} =$$

$$-\frac{da}{a}\,.\,\frac{\sin(b', c')}{\sin(a, b')\,.\,\sin(c', a)} - \frac{db}{b}\,.\,\frac{\sin(c', a')}{\sin(a', b)\sin(b, c')} + \frac{dc}{c}\,.\,\frac{\sin(a', b')}{\sin(b', c)\sin(c, a')}$$

oder endlich, wenn mit $\frac{2}{(a', b', c')}$ durchmultiplicirt und auf Null gebracht wird:

$$9)\qquad \begin{cases} \dfrac{a\,da}{(a, b', c)\,.\,(a, b, c')} + \dfrac{a'\,da'}{(a', b, c)\,.\,(a', b', c')} \\[2ex] + \dfrac{b\,db}{(a', b, c)\,.\,(a, b, c')} - \dfrac{b'\,db'}{(a, b, c')\,.\,(a', b', c')} \\[2ex] - \dfrac{c\,dc}{(a', b, c)\,.\,(a, b', c)} - \dfrac{c'\,dc'}{(a, b, c')\,.\,(a', b', c')} = 0. \end{cases}$$

Andere Entwicklung. Formel 6) gibt auf die vier Dreiecke angewendet vermöge Gleichung 4):

$$\begin{aligned}
&a' da' . \cot(b,c) + b db . \cot(c,a') + c dc . \cot(a',b)\\
&+ a da . \cot(b',c) + b' db' . \cot(c,a) + c dc . \cot(a,b')\\
&- a da . \cot(b,c') - b db . \cot(c',a) - c' dc' . \cot(a,b)\\
&\mp a' da' . \cot(b',c') \mp b' db' . \cot(c',a') \mp c' dc' . \cot(a',b') = 0.
\end{aligned}$$

wird mit $\frac{4}{aa' . bb' . cc'}$ durchmultiplicirt, so folgt nach einigen naheliegenden Umwandlungen:

$$10)\left\{\begin{aligned}
&\frac{da}{a'} . \frac{\sin[(b,c') - (b',c)]}{(a,b',c) . (a,b,c')} + \frac{da'}{a} . \frac{\sin[(b',c') \mp (b,c)]}{(a',b,c) . (a',b',c')}\\
&+ \frac{db}{b'} . \frac{\sin[(c',a) - (c,a')]}{(a',b,c) . (a,b,c')} + \frac{db'}{b} . \frac{\sin[(c',a') \mp (c,a)]}{(a,b',c) . (a',b',c')}\\
&+ \frac{dc}{c'} . \frac{\sin[(a,b') + (a',b)]}{(a',b,c) . (a,b',c)} - \frac{dc'}{c} . \frac{\sin[(a',b') \pm (a,b)]}{(a,b,c') . (a',b',c')} = 0.
\end{aligned}\right.$$

Die nothwendige Identität der Gleichungen 9) und 10) weist uns auf folgende Beziehungen hin:

$$11)\left\{\begin{aligned}
&\frac{\sin[(b,c') - (b',c)]}{aa'} = \frac{\sin[(b',c') \mp (b,c)]}{aa'}\\
&= \frac{\sin[(c',a) - (c,a')]}{bb'} = \frac{\sin[(c',a') \mp (c,a)]}{bb'}\\
&= - \frac{\sin[(a,b') + (a',b)]}{cc'} = \frac{\sin[(a',b') \pm (a,b)}{cc'}.
\end{aligned}\right.$$

Handelt es sich um einen unmittelbaren Beweis dieser Beziehungen, so können wir uns, da die Gleichheit je zweier neben einander stehenden Quotienten aus einfachen geometrischen Betrachtungen folgt, auf die drei vorderen beschränken. Wird der Zähler des dritten derselben auf die Form

$$[\sin(a,b') - (\pi - (a',b))]$$

gebracht, so finden wir in unseren Gleichungen den analytischen Ausdruck für folgenden:

4. Satz. Beschreibt man die vier Kreise um je drei Ecken eines vollständigen Vierecks, so sind die drei positiven Quotienten zweier Gegenseiten und dem Sinus des Unterschieds zweier Peripherie-Winkel, welche auf einer von beiden in zwei nicht von ihr getrennten Bögen stehen, einander gleich.

Beweis. Vermöge der Wahl unserer Bezeichnungen ist unter allen Umständen:

$$\begin{aligned}
b'c' . \sin[(b,c') - (b',c)] &= c' \sin(b,c') . b' \cos(b',c) - c' \cos(b,c') . b' \sin(b',c)\\
&= a \sin(a,b) . [c - a\cos(c,a)] - [b - a\cos(a,b)] a . \sin(c,a)
\end{aligned}$$

$$12)\ b'c . \sin[(b,c') - (b',c)] = a . [- a\sin(b,c) - b\sin(c,a) + c\sin(a,b)].$$

Dessgleichen vermöge der hier stets zulässigen Vertauschung zwischen $a$ und $b$:

13) $c'a'.\sin[(c',a)-(c,a)]=b.[-a\sin(b,c)-b\sin(c,a)+c\sin(a,b)]$.

Ferner:

$$-a'b'.\sin[(a,b')+(a',b)]=-b'\sin(a,b').a'\cos(a',b)-b'\cos(a,b').a'\sin(a'b)$$
$$=c\sin(c,a).[c\cos(b,c)-b]$$
$$+[c\cos(c,a)-a].c\sin(b,c)$$

14) $-a'b'\sin[(a,b')+(a',b)=c.[-a\sin(b,c)-c\sin(c,a)+c\sin(a,b)]$.

Die Gleichungen 12), 13), 14) stellen aber den Ausdruck

$$\frac{-a\sin(b,c)-b\sin(c,a)+c\sin(a,b)}{a'b'c'}$$

als gemeinschaftlichen Werth der drei Quotienten dar, deren Gleichheit behauptet wird, es ist diese also bewiesen.

Für den Fall des Sehnenvierecks sind die Quotienten vermöge der Gleichheit zweier auf einerlei Bogen stehenden Peripheriewinkel alle Null, unsere Gleichungen bieten also eine Verallgemeinerung des betreffenden Satzes der Kreislehre dar.

Weil aber alsdann auch der gemeinschaftliche Werth der drei Quotienten Null sein muss, so ist für das Sehnenviereck (wie auch unmittelbar leicht nachgewiesen werden kann):

$$c\sin(a,b)=a\sin(b,c)+b\sin(c,a).$$

Mit anderen Worten: Vier Punkte liegen auf einem Kreise, wenn zwischen den Entfernungen $r, r', r''$ eines derselben von den drei anderen und den gegenüberliegenden Theilen $\alpha, \alpha', \alpha''$ der vier Rechten, die Beziehung besteht:

$$r\sin\alpha+r'\sin\alpha'+r''\sin\alpha''=0.$$

Eine andere Zerlegung des unter 4. ausgesprochenen Satzes, die hier nicht ausgeführt zu werden braucht, gibt noch eine weitere Verwandtschaft desselben mit der Kreislehre zu erkennen.

Bezeichnet man nämlich mit $x, x'$ und $y, y'$ die Entfernungen der Seiten $b$ und $b'$ vor ihrem Schnittpunkte, so dass für den Fall des Sehnenvierecks

$$xx'=yy'$$

mit $\omega$ aber den Winkel, unter welchem der Schnitt stattfindet, so ist:

$$cc'\sin[(b,c')-(b',c)]=(yy'-xx')\sin\omega=-aa'\sin[(a,b')+(a',b)].$$

Eine entsprechende Gleichung findet zwischen den Entfernungen der Seiten $a$ und $a'$ vor ihrem Schnittpunkte statt.

5. Verallgemeinerung und Converse des ptolemäischen Lehrsatzes.

Endlich erinnerte ich mich bei Wahrnehmung der Analogie zwischen dem Satze in 4. und demjenigen vor der Gleichheit der Peripheriewinkel auf einerlei Bogen, an einen anderen Satz, der mir vor längerer Zeit von Herrn Oberstudienrath Riecke*) als eine Frucht seiner Methode des Ge-

*) Riecke, die Rechnung mit Richtungszahlen, Stuttgart, Metzler 1856. Nach einer erst neuerdings an mich ergangenen Mittheilung ist Herr Riecke bei derselben Gelegenheit auch auf die Gleichungen 11) gekommen.

brauchs der Richtungszahlen mitgetheilt wurde, und der eine Verallgemeinerung des ptolemäischen Lehrsatzes für andere als Sehnenvierecke bildet. Anstatt ihn zu nennen, will ich ihn sogleich aus den Gleichungen 11) ableiten.

Aus

$$(a,b') + (a',b) = (c',a) + (b',c') + (b,c') + (c',a')$$
$$= (c',a) + (b,c') + \pi - (b',c) - (c,a')$$

folgt:

$$-\sin[(a,b') + (a',b)] = \sin[(b,c') - (b',c) + (c',a) - (c,a')],$$

wird also:

$$(b,c') - (b',c) = \delta \text{ und } (c',a) - (c,a') = \varepsilon$$

gesetzt, so können unsere Gleichungen so geschrieben werden:

$$\frac{a\,a'}{\sin\delta} = \frac{b\,b'}{\sin\varepsilon} = \frac{c\,c'}{\sin(\delta+\varepsilon)}$$

und geben:

$$\frac{c\,c'}{\sin(\delta+\varepsilon)} = \frac{a\,a'\cos\varepsilon + b\,b'\cos\delta}{\sin\delta\cos\varepsilon + \sin\varepsilon\cos\delta}$$

$$c\,c' = a\,a'\cos[(c',a) - (c,a')] + b\,b'\cos[(b,c') - (b',c)].$$

Wie aus dieser Gleichung der ptolemäische Satz für den Fall des Sehnenvierecks vermöge der Gleichheit der Peripheriewinkel hervorgeht, ist deutlich.

Auch für die Converse des ptolemäischen Satzes geben unsere Gleichungen einen bequemen Beweis. Ist nämlich:

$$c\,c' = a\,a' + b\,b',$$

so wird auch

$$\sin(\delta+\varepsilon) = \sin\delta + \sin\varepsilon \text{ oder } \cos\frac{\delta+\varepsilon}{2} = \cos\frac{\delta-\varepsilon}{2}$$

$$\frac{\delta+\varepsilon}{2} = \pm\frac{\delta+\varepsilon}{2}, \text{ also } \delta = 0 \text{ oder } \varepsilon = 0,$$

beide Folgerungen schliessen sich nicht aus, sondern bedingen sich, insofern sie beide das Sehnenviereck zu erkennen geben. (Ein elementargeometrischer Beweis dieser Converse ist bei Kunze, 2. Aufl. I. §. 166, zu finden.)

6. Ausgleichung zwischen den gemessenen Längen der sechs Seiten des vollständigen Vierecks.

Wollen wir die Bedingung zwischen den Verbesserungen der durch Messung erhobenen, also nicht genau richtigen Werthe der sechs Seiten des vollständigen Vierecks nach Gleichung 9) anschreiben, so ist vor allem das Absolutglied, das die Gleichung vermöge des Widerspruchs zwischen den sechs Werthen erhalten muss, zu ermitteln. Hat man die Winkel in Gleichung 1) aus den Seiten der betreffenden Dreiecke berechnet, und findet durch die gefundenen Werthe diese Gleichung nicht befriedigt, sondern den Widerspruch:

$$w = (b, c) + (c, a) - (a, b),$$

so wird an die Stelle der Gleichung 2), wenn man sich unter den Differentialen endliche aber kleine Veränderungen denkt, die folgende treten:

$$w + d(b, c) + d(c, a) - d(a, b) = 0.$$

Das Absolutglied der nach 9) angeschriebenen Bedingungsgleichung wird demnach mit Rücksicht auf den Uebergang von 8) auf 9), und wenn $w$ in Secunden angegeben ist, $\varrho$ aber den Halbmesser in Secunden bedeutet, folgendes sein:

$$\frac{2w}{\varrho \,.\, (a', b', c')}.$$

Ich habe nach dieser, eine sehr bequeme und übersichtliche Rechnung gewährenden Bedingungsgleichung die Verbesserungen der sechs Seiten berechnet, und stelle die Resultate mit denjenigen Herrn Vorländers zusammen:

Seitenlängen in Millimetern.

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | 4,06 | 30,03 | 3,85 | 30,13 | 30,21 | 30,98. |
| | Bei Herrn Vorländer: | | | | | |
| Bezeichnung | $a_1$ | $a_2$ | $a_3$ | $a_4$ | $a_5$ | $a_6$ |
| Verbesserung | + 0,0163, | + 0,1281, | + 0,0173, | + 0,1274, | — 0,1285, | — 0,1316. |
| | Bei mir: | | | | | |
| Bezeichnung | $b$ | $a$ | $b'$ | $a'$ | $c'$ | $c$ |
| Verbesserung | + 0,0161 | + 0,1271 | + 0,0171 | + 0,1259 | — 0,1253 | — 0,1321. |

Wenn auch die sich höchstens auf 0,003 Millim. sich belaufenden Unterschiede zwischen beiderlei Ergebnissen für die Praxis des vorliegenden Falls ohne Bedeutung sein mögen, so mussten sie doch zu einer Nachforschung nach ihrer Ursache auffordern, welche sich in folgendem Umstand vorerst genügend zu erkennen gab:

Beim Uebergang von 7) auf 8) wurde

$$(c', a) - (a, b') = -(b', c');\ (b, c') - (a', b) = -(c', a');\ (b', c) + (c, a') = (a', b')$$

gesetzt, und zwar mit vollem Rechte, so lange es sich nur um die Differentialgleichung zwischen den sechs streng richtigen Seiten des geschlossenen Vierecks handelte; finden aber zwischen beiden Seiten der obigen Gleichungen Widersprüche statt, die sich in unserem Falle bis gegen acht Grade belaufen, so muss dadurch die Richtigkeit der Coefficienten unserer Bedingungsgleichung wesentlich beeinträchtigt werden. Auch die kleinen Differenzen zwischen Herrn Prof. Gerlings und Herrn Vorländers Resultaten mögen auf dem Umstand beruhen, dass ersterer die Verhältnisse zwischen den Coefficienten der Bedingungsgleichung an einer geschlossenen Figur entwickelt hat, welche fünf gemessene Längen mit der aus ihnen berechneten sechsten Länge bilden. Erinnern wir uns nun, dass, wenn unter solchen Umständen die Coefficienten aus gemessenen Werthen der nicht schliessenden, anstatt aus den ausgeglichenen Werthen der schliessenden Figur berechnet werden, nichts anderes vor sich geht, als eine Vernach-

lässigung von Gliedern mit höheren Potenzen der Verbesserungen gegen solche mit der ersten Potenz, so wird es uns nicht befremden, wenn auch die Rechnung nach Gleichung 10), bei deren Herleitung doch keine nur für das geschlossene Viereck gültigen Zusammenziehungen statt gefunden haben, fehlerhafte und sogar noch fehlerhaftere Resultate gibt, als die obigen. Ist nämlich nach Ermittelung des Widerspruchs

$$w = (a', b, c) + (a, b', c) - (a, b, c) - (a', b', c')$$

das Absolutglied mit $\frac{8w}{aa' \cdot bb' \cdot cc'}$, hergestellt und man berechnet nach der bekannten Methode die Verbesserungen der Seiten, indem man alle in 10) vorkommenden Winkel nur den betreffenden Dreiecken entnimmt, macht sodann an den verbesserten Seiten nach 3) die Probe auf die Dreiecksflächen, so trifft diese nicht zu. Vergleicht man nun die Aenderungen, welche in Folge der Verbesserung der Seiten in den Dreiecksflächen vor sich gegangen sind, mit denen welche nach 16) hätten vor sich gehen sollen, so zeigt sich ein Unterschied, der sich sogar durch die Glieder zweiter Ordnung, wenn auch diese nachgerechnet werden, beim Gebrauch fünfstelliger Logarithmen nicht vollständig erklärt. Wenn im Vorstehenden somit Ausgleichungsmethoden erörtert worden sind, welchen für den betreffenden Fall ein zweifelhafter Werth zukommt, so glaube ich doch den Freunden der Ausgleichungsrechnung mit der Hinweisung auf eine hier und da wirksame Ursache von Störungen des Geschäfts einen Dienst erwiesen zu haben. Schliesslich erlaube ich mir noch den zum vorhin erwähnten Zweck gebrauchten Ausdruck für das zweite Differential der Dreiecksfläche anzuschreiben, in welchem $u$ für $\frac{1}{\sin\alpha \cdot \sin\beta \cdot \sin\gamma}$ gesetzt ist.

$$\begin{aligned} 2 \cdot \frac{d^2 F}{1 \cdot 2} = & (\cot\alpha + u)\frac{(da)^2}{1 \cdot 2} - u\cos\alpha \cdot db \cdot dc \\ & + (\cot\beta + u)\frac{(db)^2}{1 \cdot 2} - u\cos\beta \cdot dc \cdot da \\ & + (\cot\gamma + u)\frac{(dc)^2}{1 \cdot 2} - u\cos\gamma \cdot da \cdot db. \end{aligned}$$

Stuttgart, im November 1858. C. W. Baur.

---

**XIII. Ueber den mittleren Radius des dreiachsigen Ellipsoides.** In den §§. 15 und 16 seiner Untersuchungen über die mittleren Radien geometrischer Gebilde entwickelt Herr Prof. Drobisch*) zwei auf das Rotationsellipsoid bezügliche Sätze, die soviel Analogie zu einander besitzen, dass man ein allgemeineres, das dreiachsige Ellipsoid betreffendes Theorem als deren gemeinschaftliche Quelle vermuthen kann. In der That ergiebt sich ein solches auf folgendem Wege.

*) S. Jahrg. III. d. Zeitschrift, S. 1.

Die Halbachsen des Ellipsoides mögen $a, b, c$ sein und $a > b > c$; das Volumen desselben heisse $V$, endlich sei $r$ das arithmetische Mittel aus den Radien, welche von allen Punkten des umschlossen Raumes nach dem Mittelpunkte der Fläche gezogen sind. Es ist dann

$$1) \qquad Vr = \int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{R} \varrho^3 \sin\vartheta \, d\vartheta \, d\psi \, d\varrho$$

und hierin bedeutet $R$ den zu $\vartheta$ und $\psi$ gehörigen Radiusvector des Ellipsoides; derselbe findet sich aus der Polargleichung der Fläche, nämlich

$$R^2 = \frac{1}{\left(\frac{\cos\vartheta}{a}\right)^2 + \left(\frac{\sin\vartheta\cos\psi}{b}\right)^2 + \left(\frac{\sin\vartheta\sin\psi}{c}\right)^2}$$

oder

$$R^2 = \frac{1}{m\cos^2\psi + n\sin^2\psi},$$

worin zur Abkürzung gesetzt wurde:

$$m = \frac{\cos^2\vartheta}{a^2} + \frac{\sin^2\vartheta}{b^2}, \qquad n = \frac{\cos^2\vartheta}{a^2} + \frac{\sin^2\vartheta}{c^2}.$$

Nach Ausführung der auf $\varrho$ bezüglichen Integration erhält man aus No. 1)

$$Vr = \frac{1}{4}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} \frac{\sin\vartheta \, d\vartheta \, d\psi}{(m\cos^2\psi + n\sin^2\psi)^2};$$

hier kann wieder die Integration nach $\psi$ ausgeführt werden und zwar mittelst der bekannten Formel

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\psi}{(m\cos^2\psi + n\sin^2\psi)^2} = \left(\frac{1}{m} + \frac{1}{n}\right)\frac{\pi}{\sqrt{mn}};$$

dies giebt zufolge der Werthe von $m$ und $n$

$$Vr = \frac{\pi}{4}\int_0^{\pi} \left\{ \frac{1}{\frac{\cos^2\vartheta}{a^2} + \frac{\sin^2\vartheta}{b^2}} + \frac{1}{\frac{\cos^2\vartheta}{a^2} + \frac{\sin^2\vartheta}{c^2}} \right\} \frac{\sin\vartheta \, d\vartheta}{\sqrt{\left(\frac{\cos^2\vartheta}{a^2} + \frac{\sin^2\vartheta}{b^2}\right)\left(\frac{\cos^2\vartheta}{a^2} + \frac{\sin^2\vartheta}{c^2}\right)}}.$$

Aus naheliegenden Gründen darf man das Integrationsintervall auf die Hälfte ($\vartheta = 0$ bis $\vartheta = \frac{1}{2}\pi$) reduciren, wenn man gleichzeitig den Factor $\frac{1}{4}\pi$ verdoppelt; substituirt man nachher $\cos\vartheta = u$, so wird

$$Vr = \frac{\pi}{2}\int_0^{1} \left\{ \frac{1}{\frac{u^2}{a^2} + \frac{1-u^2}{b^2}} + \frac{1}{\frac{u^2}{a^2} + \frac{1-u^2}{c^2}} \right\} \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{u^2}{a^2} + \frac{1-u^2}{b^2}\right)\left(\frac{u^2}{a^2} + \frac{1-u^2}{c^2}\right)}}.$$

Um eine elegantere Form zu erhalten, bezeichnen wir mit $\alpha, \beta, \gamma$ die numerischen Excentricitäten der Ellipsen aus den Halbachsen $b$ und $c$, $c$ und $a$, $a$ und $b$, nehmen also

2) $$\alpha = \frac{\sqrt{b^2 - c^2}}{b}, \quad \beta = \frac{\sqrt{a^2 - c^2}}{a}, \quad \gamma = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a};$$

dies giebt

3) $$Vr = \tfrac{1}{2}\pi a^2 bc \int_0^1 \left\{ \frac{1-\beta^2}{1-\beta^2 u^2} + \frac{1-\gamma^2}{1-\gamma^2 u^2} \right\} \frac{du}{\sqrt{(1-\beta^2 u^2)(1-\gamma^2 u^2)}}.$$

Unter einer ganz ähnlichen Form kann aber auch die Oberfläche eines dreiachsigen Ellipsoides dargestellt werden. Sind nämlich $a'$, $b'$, $c'$ dessen Halbachsen und $\alpha'$, $\beta'$, $\gamma'$ seine numerischen Excentricitäten, so ist, unter der Voraussetzung $a' > b' > c'$, seine Fläche*)

4) $$S = 2\pi a' b' \int_0^1 \left\{ \frac{1-\alpha'^2}{1-\alpha'^2 u^2} + \frac{1-\beta'^2}{1-\beta'^2 u^2} \right\} \frac{du}{\sqrt{(1-\alpha'^2 u^2)(1-\beta'^2 u^2)}}.$$

Nun wird aber für $a' = a$, $b' = \frac{ac}{b}$, $c' = c$ die Excentricität $\beta'$ identisch mit $\beta$ und gleichzeitig $\alpha' = \gamma$, mithin

5) $$S = 2\pi a^2 c \int_0^1 \left\{ \frac{1-\gamma^2}{1-\gamma^2 u^2} + \frac{1-\beta^2}{1-\beta^2 u^2} \right\} \frac{du}{\sqrt{(1-\gamma^2 u^2)(1-\beta^2 u^2)}};$$

die Vergleichung von $Vr$ und $S$ führt zu der Relation

$$Vr = \tfrac{1}{4} b^2 S,$$

die nach Substitution des Werthes von $V$ übergeht in

6) $$\pi a c r = \tfrac{3}{16} b S.$$

Die Bestimmung des mittleren Radius eines aus den Halbachsen $a$, $b$, $c$ construirten Ellipsoides reducirt sich hiernach auf die Complanation eines Ellipsoides mit den Halbachsen $a$, $\frac{ac}{b}$, $b$, auch kann man die Formel 6) leicht geometrisch interpretiren z. B. mittelst der Proportion

$$\pi a c : \tfrac{3}{16} S = b : r.$$

Für $b = c$ wird das erste Ellipsoid zu einem gestreckten, das zweite zu einem abgeplatteten Sphäroid aus denselben Achsen; für $b = a$ ist das erste ein abgeplattetes, das zweite ein gestrecktes; man kommt dann auf die anfangs erwähnten Sätze zurück.

**(Zuerst mitgetheilt der K. S. Gesellschaft der Wissenschaften in der Sitzung vom 12. Februar 1859.)**

Schlömilch.

*) S. Jahrg. I. d. Zeitschrift, S. 376.

---

**XIV. Ueber eine Aufgabe der Elementargeometrie.** Bei der Tracirung von Eisenbahnlinien kommt nicht selten folgende Aufgabe vor (Fig. 20, Taf. II):

Zwei Punkte $A$ und $B$ sind gegeben als Anfangspunkte zweier geradlinigen Strecken von bestimmten Richtungen; man soll $A$ und $B$ durch eine aus höchstens zwei Kreisbögen zusammengesetzte Curve verbinden, welche $AA'$ in $A$ und $BB'$ in $B$ berührt.

Errichtet man in $A$ und $B$ auf den gegebenen Strecken Normalen, die sich in $C$ schneiden, so müssen die Mittelpunkte $M$ und $N$ der gesuchten Kreisbögen in $AC$ und $BC$ oder deren Verlängerungen liegen; den Halbmesser $AM$ des ersten Kreises kann man willkührlich wählen und findet nachher den Radius des zweiten, wenn man auf $BC$ die Strecke $BQ = AM$ abschneidet und den Durchschnitt $N$ der verlängerten $BC$ mit derjenigen Geraden $SN$ aufsucht, welche $MQ$ normal halbirt. Die beiden aus $M$ und $N$ mit den Radien $MA$ und $NB$ beschriebenen Kreisbögen stossen dann in einem Punkte $T$ der verlängerten $NM$ aneinander.*) Umgekehrt kann auch $BN$ willkührlich gewählt werden; man nimmt dann $AP = BN$, zieht die Gerade $RM$, welche $NP$ normal halbirt, und bestimmt ihren Durchschnitt $M$ mit $AC$.

So einfach die Sache an sich ist, so bietet sie doch Gelegenheit zu einigen Bemerkungen von geometrischem Interesse. Die Geraden $MR$ und $NS$ schneiden sich nämlich in einem Punkte $O$, welcher aus sehr naheliegenden Gründen der Mittelpunkt des in das Dreieck $CMN$ beschriebenen Kreises sein muss. Dieser Punkt ist aber auch, wie man aus congruenten Dreiecken leicht ersieht, von $A$, $T$ und $B$ gleichweit entfernt, mithin kann $O$ als der Durchschnitt zweier Geraden betrachtet werden, deren eine den Winkel $ACN$, und deren andere die Gerade $AB$ normal halbirt; auch findet man leicht, dass $O$ auf dem um das Dreieck $ABC$ beschriebenen Kreise liegt. Man mag daher den ersten Radius $AM$ wählen wie man will, so geht doch die Gerade $SN$ immer durch den festen Punkt $O$, und der Punkt $T$ liegt jederzeit auf dem Kreise, welcher aus dem Centrum $O$ mit dem Halbmesser $OA = OB$ beschrieben ist; endlich berührt die Gerade $TMN$ immer den unveränderlichen concentrischen Kreis, welcher die grössere Gerade $AC$ und die Verlängerung der kleineren $BC$ berührt.

Lässt man die Tangente $NT$ sich um den festen Kreis herumdrehen, so erhält man der Reihe nach alle Lösungen der Aufgabe. Für $NT \parallel BC$ fällt $N$ in's Unendliche, und der eine Kreis degenerirt in eine Gerade; diesen Grenzfall, der nicht mehr im Sinne der ursprünglichen Aufgabe ist, kann man auch auf kürzerem Wege finden. Setzt man die Drehung (rechts herum) weiter fort, so kommt $N$ auf die Verlängerung von $CB$ zu liegen, und die Curve erhält dann die Gestalt $\backsim$ mit einem Wendepunkte bei $T$. Lässt man bei weiterer Drehung $N$ zwischen $C$ und $B$ fallen, so geräth $T$ aus dem Winkelraume $ACB$ heraus, und die Curve bildet dann einen

*) Für den speciellen Fall, dass $\angle ACB = 90^0$ ist, hat bereits Herr Prof. Kunze dieselbe Construction zu einem etwas anderen Zwecke angegeben im Anhange zu Cap. V. seines rühmlichst bekannten Lehrbuchs der Geometrie.

Schnabel mit dem Rückkehrpunkte $T$ u. s. w. Unter der Bedingung, dass die Kreisbögen $AT$ und $BT$ ihre concaven Seiten dem Scheitel $C$ zukehren und dass $T$ zwischen $AC$ und $BC$ liegt, ist übrigens die Aufgabe nicht immer lösbar, sondern nur dann, wenn die Projection von $A$ auf $BC$ in die Gerade von $B$ nach $N$ hin fällt. Bei einem stumpfen Winkel $ACB$ versteht sich diess von selbst; bei spitzen $ACB$ muss jene Projection zwischen $B$ und $C$ liegen ($AC > BC > AC \,.\, \cos C$).

Da die Aufgabe unbestimmt ist, so kann noch eine Bedingung hinzugesetzt werden, um sie zu einer bestimmten zu machen; so liesse sich z. B. verlangen, dass die Curve durch einen gegebenen Punkt $T$ des aus $O$ mit dem Radius $OA = OB$ beschriebenen Kreises ginge. Von grösserem Interesse ist die Forderung, den Unterschied der Radien $BN$ und $AM$ zu einem Minimum zu machen; da die Radiendifferenz durch die Gerade $MN$ dargestellt wird, so genügt man jener Forderung, indem man die Kreistangente $MN$ senkrecht zu der winkelhalbirenden Geraden $CO$ legt.

Diese flüchtigen Andeutungen schliessen wir mit der Bemerkung, dass sich die vorstehende Aufgabe wohl recht gut zu einem kleinen Excurse beim Elementarunterrichte eignen dürfte und zwar hauptsächlich, weil sie zur graphischen Ausführung verschiedener Constructionen Gelegenheit bietet.

SCHLÖMILCH.

---

**XV. Ueber das Problem der Diamantbildung nach Theodor Simmler.*)**

Im Jahre 1826 lenkte Brewster die Aufmerksamkeit auf die bisweilen in mineralischen Krystallen eingeschlossenen, sehr expansiblen Flüssigkeiten, welche zwar meist im Topas, Quarz, Amethyst, aber auch in vielen anderen Mineralien wie Kalkspath, Cölestin, Schwerspath, Flussspath etc. sowie auch im Diamant vorgefunden worden sind. (*Pogg. Annal.* Bd. 7, S. 469.) Die Untersuchung der Höhlungen und ihres Inhaltes beim Diamant führt Brewster auf die Ansicht, dass dieser Edelstein ein erstarrtes gummiartiges Secretionsproduct einer Pflanze sein sollte (vergl. *Pogg. Annal.* Bd. 36. S. 564, Bd. 91, S. 605). Ueber die Natur der in den Höhlungen genannter Mineralien angetroffenen Flüssigkeiten hat Brewster, obgleich mehrere physikalische Eigenschaften derselben zum Theil auf sehr sinnreiche Weise von ihm beobachtet worden sind, keine bestimmte Ansicht ausgesprochen.. Herr Simmler stellt eine, gestützt auf mehrere der durch Brewster und andere Beobachter bemerkten Eigenschaften dieser Flüssigkeiten die Vermuthung auf, dass in den meisten Fällen diese Flüssigkeit liquide Kohlensäuse gewesen sei. Zunächst wird diese Annahme bestätigt durch das übereinstimmende Ausdehnungsvermögen der liquiden Kohlensäure und der fraglichen Flüssigkeit, das innerhalb der Grenzen 10° bis 27° C. nahe gleichmässig zu 0,015 für 1° C. sich ergeben hat. Brewster hat diese Uebereinstimmung zur angegebenen Zeit nicht

---

*) *Pogg. Annal.* Bd. 105, S. 460 u. folg.

bemerken können, weil erst kurz vor seinen Untersuchungen der liquide Zustand der Kohlensäure von Faraday entdeckt worden ist. Ausserdem hat Brewster beobachtet, dass die Flüssigkeit in den Höhlen der genannten Mineralien ein viel geringeres Brechungsvermögen als Wasser besitze; ebenso bemerken Davy und Faraday im Allgemeinen, dass auch die liquide Kohlensäure das Licht schwächer als Wasser breche. Ferner beschreiben Thilorier und Mitchel die liquide Kohlensäure als nicht mischbar mit Wasser und gleiche Eigenschaft hat Brewster an denjenigen eingeschlossenen Flüssigkeiten der Krystalle beobachtet, welche sich in besonderem Grade expansibel zeigten, während die minder expansiblen Flüssigkeiten sich als Wasser oder als wässerige Lösungen von festen und glasförmigen Körpern herausstellten. Diese verschiedentliche Uebereinstimmung der genannten physikalischen Eigenschaften führten nun zunächst Herrn S. zu der Annahme, dass in den meisten Fällen die eingeschlossenen Flüssigkeiten, namentlich wenn sie mit bedeutender Spannung sich in den Höhlungen befanden, liquide Kohlensäure gewesen sei, die übrigens ein nicht geringes Auflösungsvermögen für mancherlei andere feste Substanzen haben mag, so dass hieraus noch die bisweilen beobachtete Thatsche zu erklären ist, wenn nach Oeffnen der Höhle und Verdunsten der Flüssigkeit mineralische Niederschläge zum Vorschein gekommen sind.

Im Zusammenhange damit steht ferner die Vermuthung des Herrn S., dass insbesondere auch der Diamant ein Condensations- und Krystallisationsproduct von in liquider Kohlensäure aufgelöstem Kohlenstoff sei. Bekanntlich zeigt der Diamant nicht selten Höhlungen, in deren Innern allem Anscheine nach ein nicht unbedeutender Druck vorhanden ist. Diese Höhlungen, auch wenn sie mit einer Luftart erfüllt sind, können doch gerade gasförmige Kohlensäure unter hohem Drucke enthalten, eine Annahme, welche eine recht ungezwungene Erklärung der von Brewster beobachteten Farbenringe mit dem schwarzen Kreuz im Diamanten rings um die bemerkten Höhlungen zulässig macht. Der starke Druck der von dem eingeschlossenen Gase auf die nächsten Wandungen der Höhle ausgeübt wird, setzt nämlich diesen Theil des Krystalles in einen ähnlichen Zustand und in ein ähnliches Verhalten zum Licht, wie das ungleich gepresste Gas zeigt. Die Kohlensäure wäre dann in ähnlicher Weise im Diamanten eingeschlossen, wie die Flüssigkeiten oder Mutterlaugen in manchen andern natürlichen und künstlichen Krystallen. Die ausgesprochene Hypothese würde nun sehr wesentliche Stützen dadurch erhalten, wenn erstlich das Vorkommen grösserer Massen liquider Kohlensäure in dem Erdinnern und sodann die Auflösbarkeit des Kohlenstoffs in der tropfbaren Kohlensäure nachweisen konnte. Das erstere ist aber nicht unwahrscheinlich, wenn man den starken Druck und die ungemeinen Quantitäten der vielen Säuerlingen entweichenden Kohlensäure erwägt. So führen nach Bunsen die Nauheimer Sauerquellen jährlich 10,000 Centner, nach Bischoff eine einzige Gas-

quelle bei Burgbrohl 2617 Centner der Atmosphäre zu. Was die Auflöslichkeit des Kohlenstoffs in liquider Kohlensäure betrifft, so hat Herr S. in Ermangelung eines Natterer'schen Condensationsapparats keine directen Versuche machen können und fordert daher diejenigen Physiker, die besser ausgerüstet sind, zu den erforderlichen Versuchen auf. Die Kohlensäure in einer mit etwas Kohlenstoff gefüllten, stumpf umgebogenen, beiderseits geschlossenen starken Glasröhre nach dem Vorgange von Faraday zu entwickeln, ist Herrn Simmler nach mehrfachen vergeblichen Versuchen nicht gelungen, indem die Röhren jedesmal zersprangen.

So vielfach seit der Entdeckung der Allotropie des Kohlenstoffs auch Versuche über künstliche Diamantenbildung angestellt sein mögen, so wenig ist doch ein Verhältniss davon bekannt geworden, wahrscheinlich, wie Hr. S. bemerkt, aus der Scheu, einen vergeblichen Versuch zu publiciren, der mit der berüchtigten Goldmacherei leicht in eine Classe geworfen werden könnte. Herr S. bedauert dieses mit Recht aus dem Grunde, weil die Bekanntmachung negativer Resultate insofern grossen Nutzen habe, als dadurch andere von ähnlichen fruchtlosen Bemühungen abgehalten werden. Man muss es mit Dank anerkennen, wenn Herr S. auf der gegentheiligen Bahn in muthiger Weise mit gutem Beispiele vorangeht.

---

**XVI. Versuche über die Festigkeit des Aluminiums und der Aluminiumbronze** (Legirung von 90 Proc. Kupfer und 10 Proc. Aluminium). Von A. Ritter von Burg. Es wurden Prismen aus reinem Aluminium (blos eine Spur Eisen enthaltend) bei einem Querschnitte von $\frac{1}{4}$ bis $\frac{1}{6}$ Quadratzoll den Versuchen unterworfen, und der Versucher erhielt für absolute Festigkeit dieses Metalles folgende Resultate.

Für gegossene Stangen ergab sich die Festigkeit per Quadratzoll Querschnitt beim ersten Versuch zu 13570 und beim zweiten Versuch zu 13,610 Pfund, also im Mittel zu 13590 Pfund (10,96 Kilogr. pro Quadratmillimeter).

Für ein kalt gehämmertes Prisma betrug die absolute Festigkeit 25120 Pfund (20,26 Kilogr.) und auf den zusammen gezogenen Querschnitt, welcher sich durch die Dehnung von 0,166 auf 0,117 reducirte, 35550 Pfund (28,67 Kilogr.).

Nachdem die abgerissenen Stücke abermals umgegossen und kalt gehämmert worden, bildete sich ein Gefüge, welches ungefähr in der Mitte zwischen dem blos gegossenen und stark gehämmerten Prisma lag. Der Versuch mit diesem letzteren Prisma gab in der That auch eine Festigkeit zwischen den beiden vorher genannten, nämlich in runder Zahl zu 16900 Pfund (13,62 Kilogr.). Auch zeigt der Querschnitt beinahe gar keine Zusammenziehung.

Was ferner jene Legirung aus 90 Proc. Kupfer und 10 Proc. Aluminium betrifft, welche ausser der schönen goldgelben Farbe noch so viele andere schätzenswerthe Eigenschaften, namentlich den geringeren Preis, besitzt,

dass der Verfasser diesem Metalle vor Allem die grösste Zukunft prophezeien zu können glaubt, so wurde ein heiss gehämmertes Prisma von 0,108 Quadratzoll Querschnitt bei einer Belastung von 8650 abgerissen, was, auf den Quadratzoll bezogen, eine absolute Festigkeit von 80,000 Pfund (64,59 Kilogr. pro Quadratmillimeter) giebt.

Ein zweites Prisma aus derselben Legirung, jedoch blos gegossen, ergab eine Festigkeit von 61530 Pfund (49,62 Kilogr.).

Da nun die absolute Festigkeit der Metalle folgende ist:

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| Stahl . . . . . . | 90000 | bis | 120000 | Pfund, |
| Weiches Eisen . . . | 40000 | - | 60000 | - |
| Stahlartiges Eisen . . | 80000 | - | 88500 | - |
| Kupfer (gehämmert) . | 25000 | - | 34000 | - |
| Kupfer (gegossen) . . | 14000 | - | 18000 | - |
| Messing . . . . . . | 14000 | - | 16000 | - |
| Zink . . . . . . . | 7000 | - | 8000 | - |
| Zink (gegossen) . . . | 3500 | - | 4000 | - |

so fällt die Festigkeit des gegossenen Aluminiums zwischen Zink und gegossenes Kupfer; jene des gut gehämmerten Aluminiums zwischen gegossenes und gehämmertes Kupfer; die Festigkeit der gegossenen Bronce von der genannten Legirung zwischen jene des Eisens und Stahls; sowie endlich jene der gehämmerten Legirung nahe mit der Festigkeit von stahlartigem Eisen zusammen. (Oestr. Ingen.-Ver.)

---

**XVII. Ueber die Ursachen der Ueberschwemmungen in den Gegenden des Harzes, des Erzgebirges und Riesengebirges am Ende des Juli und zu Anfang des August 1858.** Die heftigen Regengüsse, welche im Sommer 1858 die verheerenden Ueberschwemmungen am Harz, in Sachsen und Schlesien zur Folge hatten, sind von Dove unter Benutzung gleichzeitiger Beobachtungen und Vergleichung derselben mit den mittleren Werthen, welche demselben Zeitraume in einer längeren Jahresreihe entsprechen, auf ihre Ursachen zurückgeführt werden. Diese Arbeit von Dove (*Pogg. Annal.* Bd. 105, S. 490) zeigt wieder, wie wichtig die Bestimmung der mittleren Werthe ist, da sie allein entscheiden können, ob das jetzt Beobachtete eine besondere Beobachtung verdient oder in den Kreis des Gewöhnlichen fällt. Gestützt auf die Beobachtungen des Berliner meteorologischen Instituts, welche das ganze nördliche Deutschland — Sachsen ausgenommen — umfassen, hat Dove schon früher nachzuweisen gesucht, dass die in Deutschland Ende Juni beginnende Regenzeit ihren Grund darin hat, dass im Sommer sich die Temperatur im Innern des Continents unverhältnissmässig steigert, während dagegen die des atlantischen Oceans auffallend zurückbleibt, die Luft über dem Meere daher in die erwärmte aufgelockerte des Continents eindringt und durch die Vermittelung beider mächtige Nieder-

schläge entstehen. Steigert sich in einem bestimmten Jahre durch anomale Temperaturvertheilung dieser Gegensatz in dem angegebenen Sinne, so ist die nothwendige Folge eine Steigerung der durch diese Temperatur-Differenz hervorgerufener Niederschläge. Dies war nun im Sommer 1858 in ungewöhnlichem Grade der Fall. Dove stellt zunächst, um die Verbreitung der mächtigen Niederschläge zu beurtheilen, die im Juli und August an 61 verschiedenen Orten im nördlichen Deutschland gemessenen Regenhöhen mit den mittleren Werthen derselben für diese Monate zusammen. Aus dieser Zusammenstellung ersieht man, dass während von Trier bis Frankfurt am Main die gewöhnliche Wassermenge gefallen ist, diese am untern Rhein und in Westphalen entschieden grösser wird und am nordwestlichen Abhange der norddeutschen Gebirge eine ungewöhnliche Höhe erhält. Der überall gleichzeitig beobachtete Nordwestwind deutet, sowie das frühere Eintreten der Erscheinung in den westlichen Gegenden, darauf hin, dass die Ursache nach Nordwesten hin zu suchen sei. Dove hat nun für 30 Stationen in Norddeutschland aus zehnjährigen gleichzeitigen Beobachtungen die mittleren Werthe der Temperatur der sechs fünftägigen Zeiträume vom 5. Juli bis 3. August berechnet und damit die im Jahre 1558 für denselben Zeitabschnitt erhaltenen Werthe verglichen. Aus dieser Vergleichung ergiebt sich, dass schon zu Anfang des Zeitraums vom 5. bis zum 9. Juli in Preussen, Pommern und Schlesien bis nach Sachsen hin eine Temperaturerhöhung, d. i. ein Ueberschuss über die normale mittlere Wärme, am Rhein eine Abkühlung, d. i. ein Herabsinken unter den mittleren Werth des zehnjährigen Zeitraums, stattgefunden hat, die sich in dem darauf folgenden Abschnitt vom 10. bis 14. Juli etwas weiter östlich ausbreitet; im nächsten Aschnitt (15. bis 19. Juli) tritt eine neue starke Temperatur-Erhöhung hervor, die in Ostpreussen viel stärker ist als weiter westlich, denn in Memel ist sie 5½°, in Trier nur 2¼°. Vom 20. bis 24. Juli wird das Extrem noch grösser; Cöln zeigt schon eine Temperaturerniedrigung von fast einem Grade, während der Ueberschuss in Memel noch 5 Grad beträgt. Die schon in gewöhnlichen Verhältnissen das Einströmen der Luft vom atlantischen Ocean bedingende Temperatur-Differenz steigert sich also hier noch von der russischen bis zur holländischen Gränze hin um volle 6 Grade. Wird man sich nun wundern, sagt Dove, dass die kalte feuchte Luft des Oceans hereinbricht und in der Wärmeabnahme, die sie erzeugt, den Wasserdampf niederschlägt, der in einer vorher so ungewöhnlich gesteigerten Verdunstung sich in dem Luftkreise verbreitet hatte? Diese Abkühlung tritt nun auch deutlich in den folgenden Abschnitten (25. bis 29. Juli und 30. Juli bis 3. August) hervor und zwar ist sie in der Mitte des Gebietes am stärksten, nur unbedeutend an der östlichen Grenze, da ein Nordwestwind es war, der sie hervorrief.

---

# IX.

## Studien über Differentialgleichungen von der Form

$$(m x^2 + n x + p) y'' + (q x + r) y' + s y = 0.$$

Von Professor SIMON SPITZER.

---

Die Differentialgleichungen der eben angeführten Form waren schon, namentlich in vielen speciellen Fällen, Gegenstand der Untersuchung von bedeutenden Mathematikern; ich erwähne nur die merkwürdige Art, wie Liouville im XIII. Band des *Journal de l'école polyt.* diese Gleichung auflöst, ferner die schöne Arbeit von Serret in Liouville's Journal tome IX. pag. 211, und im *Cours d'algèbre sup. sec. edit. pag.* 190, dann Raabe's Arbeit im 3. Bande seiner Integralrechnung pag. 280, Wantzel in den *Compte rendu tome XVII. pag.* 1191, Jacobi in Crelle's Journal Band 56, Seite 149, Weiler im selben Journal Band 51 etc. Dennoch hoffe ich, dass auch meine Arbeit, die ich mir hier mitzutheilen erlaube, von einigem Werthe sein dürfte.

Ich nahm mir zum Vorbilde Euler (*Institutiones calc. integr. Vol. II. Sect. I. Cap. X.*), der particuläre Integrale von bestimmter Form voraussetzte, und Differentialgleichungen bildete, die durch diese vorausgesetzten Formen erfüllt wurden, und setze demnach voraus

$$1) \qquad y = \int_\alpha^\beta (u-\alpha)^{A-1} (u-\beta)^{B-1} (u+x)^m \, du.$$

Um nun die lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung zu finden, welche durch den in 1) hingestellten Ausdruck befriedigt wird, bilde ich $y'$ und $y''$ und finde

$$y' = m \int_\alpha^\beta (u-\alpha)^{A-1} (u-\beta)^{B-1} (u+x)^{m-1} \, du,$$

$$y'' = m(m-1) \int_\alpha^\beta (u-\alpha)^{A-1} (u-\beta)^{B-1} (u+x)^{m-2} \, du.$$

Wenn daher

$$2) \qquad X_2 y'' + X_1 y' + X_0 y = 0$$

die Differentialgleichung ist, welche 1) zum particulären Integrale hat, so muss dieser Werth 1) der Gleichung 2) genügen. Nun ist:

$$X_2 y'' + X_1 y' + X_0 y = \int_\alpha^\beta (u-\alpha)^{A-1} (u-\beta)^{B-1} (u+x)^{m-2} [m(m-1) X_2 + m(u+x) X_1 + (u+x)^2 X_0] \, du$$

und wählt man nun

$$X_2, \; X_1, \; X_0$$

dermassen, dass

$$3) \quad \int (u-\alpha)^{A-1} (u-\beta)^{B-1} (u+x)^{m-2} [m(m-1) X_2 + m(u+x) X_1 + (u+x)^2 X_0] \, du = (u-\alpha)^A (u-\beta)^B (u+x)^{m-1}$$

wird, so ist alsdann gewiss dieses zwischen den bestimmten Grenzen $\alpha$ und $\beta$ genommene Integrale gleich Null, falls nur $A$ und $B$ positiv sind.

Durch Differenziren der Gleichung 3) bezüglich $u$ erhält man:

$$(u-\alpha)^{A-1}(u-\beta)^{B-1}(u+x)^{m-2}[m(m-1)X_2 + m(u+x)X_1 + (u+x)^2 X_0] = (u-\alpha)^{A-1}(u-\beta)^{B-1}(u+x)^{m-2}[A(u-\beta)(u+x) + B(u-\alpha)(u+x) + (m-1)(u-\alpha)(u-\beta)]$$

und wenn man beiderseits durch $(u-\alpha)^{A-1}(u-\beta)^{B-1}(u+x)^{m-2}$ dividirt

$$m(m-1) X_2 + m(u+x) X_1 + (u+x)^2 X_0 = A(u-\beta)(u+x) + B(u-\alpha)(u+x) + (m-1)(u-\alpha)(u-\beta).$$

Ordnet man beiderseits nach $u$, so hat man:

$$[m(m-1) X_2 + mx X_1 + x^2 X_0] + u[mX_1 + 2x X_0] + u^2 X_0 = [\alpha\beta(m-1) - x(A\beta + B\alpha)] + u[x(A+B) - (A\beta + B\alpha) - (m-1)(\alpha+\beta)] + u^2(A+B+m-1),$$

folglich ist die Gleichung 3) eine identische, wenn

$$4) \qquad \begin{aligned} X_0 &= A + B + m - 1 \\ mX_1 + 2x X_0 &= x(A+B) - (A\beta + B\alpha) - (m-1)(\alpha+\beta) \\ m(m-1) X_2 + mx X_1 + x^2 X_0 &= \alpha\beta(m-1) - x(A\beta + B\alpha) \end{aligned}$$

ist. Hieraus folgen:

$$X_0 = A + B + m - 1$$

$$X_1 = -\frac{1}{m}[(x+\alpha)(B+m-1) + (x+\beta)(A+m-1)]$$

$$X_2 = \frac{1}{m}(x+\alpha)(x+\beta)$$

und die Differentialgleichung, welcher genügt wird durch

$$y = \int_\alpha^\beta (u-\alpha)^{A-1} (u-\beta)^{B-1} (u+x)^m \, du,$$

ist somit folgende:

$$5)\ (x+\alpha)(x+\beta)y'' - [(B+m-1)(x+\alpha) + (A+m-1)(x+\beta)]y' + m(A+B+m-1)y = 0.$$

Ich setze, um ein zweites particuläres Integral der Gleichung 5) zu erhalten, in die Gleichung 5)

$$y = (x+\alpha)^{\lambda}(x+\beta)^{\mu} z$$

unter $z$ eine neue Variable und unter $\lambda$ und $\mu$ constante Zahlen verstanden; alsdann ist

$$y' = \lambda(x+\alpha)^{\lambda-1}(x+\beta)^{\mu} z + \mu(x+\alpha)^{\lambda}(x+\beta)^{\mu-1} z + (x+\alpha)^{\lambda}(x+\beta)^{\mu} z'$$

$$y'' = \lambda(\lambda-1)(x+\alpha)^{\lambda-2}(x+\beta)^{\mu} z + 2\lambda\mu(x+\alpha)^{\lambda-1}(x+\beta)^{\mu-1} z + \mu(\mu-1)(x+\alpha)^{\lambda}(x+\beta)^{\mu-2} z + 2\lambda(x+\alpha)^{\lambda-1}(x+\beta)^{\mu} z' + 2\mu(x+\alpha)^{\lambda}(x+\beta)^{\mu-1} z' + (x+\alpha)^{\lambda}(x+\beta)^{\mu} z''$$

und somit hat man

$$(x+\alpha)^{\lambda+1}(x+\beta)^{\mu+1} z'' + (x+\alpha)^{\lambda}(x+\beta)^{\mu}[(2\mu-B-m+1)(x+\alpha) + (2\lambda-A-m+1)(x+\beta)]z' + (x+\alpha)^{\lambda-1}(x+\beta)^{\mu-1}[\mu(\mu-B-m)(x+\alpha)^2 + \{2\lambda\mu-\lambda(B+m-1)-\mu(A+m-1)+m(A+B+m-1)\}(x+\alpha)(x+\alpha) + \lambda(\lambda-A-m)(x+\beta)^2]z = 0.$$

Diese Gleichung vereinfacht sich wesentlich durch verschiedene Annahmen für $\lambda$ und $\mu$, so z. B. ist, wenn man $\lambda$ und $\mu$ so wählt, dass

$$\lambda = A + m$$
$$\mu = B + m$$

wrid, obige Gleichung durch $(x+\alpha)^{\lambda}(x+\beta)^{\mu}$ abkürzbar, und wird

$$6)\ (x+\alpha)x+\beta)z'' + [(B+m+1)(x+\alpha) + (A+m+1)(x+\beta)]z' + (m+1)(A+B+m)z = 0,$$

und da diese Gleichung aus der Gleichung 5) dadurch hervorgeht, dass man in 5) statt $m$, $A$ und $B$ respective setzt:

$$-m-1,\ 1-A \text{ und } 1-B,$$

so hat man für das Integral der Gleichung 6) in dem Falle, als $1-A$ und $1-B$ positiv sind

$$z = \int_{\alpha}^{\beta} (u-\alpha)^{-A}(u-\beta)^{-B}(u+x)^{-m-1} du,$$

somit ist das complete Integral der Gleichung 5) in dem speciellen Falle, wo $A$ und $B$ positive echte Brüche sind:

$$7)\qquad y = C_1 \int_{\alpha}^{\beta} (u-\alpha)^{A-1}(u-\beta)^{B-1}(u+x)^{m} du$$
$$+ C_2 (x+\alpha)^{A+m}(x+\beta)^{B+m} \int_{\alpha}^{\beta} (u-\alpha)^{-A}(u-\beta)^{-B}(u+x)^{-m-1} du$$

unter $C_1$ und $C_2$ willkührliche Constante verstanden.

Es ist mir also gelungen, das complete Integrale der Gleichung 5) in dem Falle anzugeben, wo $A$ und $B$ positive Zahlen sind, von kleinerem

Werthe als 1; ja es gilt das Integral 7) auch dann, wenn $A$ und $B$ imagin. sind, wenn nur die reellen Bestandtheile dieser Zahlen positiv und kleiner als 1 sind.

Der specielle Fall, wo

$$A = \tfrac{1}{2} \quad B = \tfrac{1}{2} \quad m = -\tfrac{1}{2}$$

ist, verdient Beachtung. Denn alsdann ist nicht mehr in der Formel 7) das complete Integral vorhanden, sondern man hat dann für die Gleichung

$$8) \qquad (x+\alpha)(x+\beta)y'' + (2x+\alpha+\beta)y' + \tfrac{1}{4}y = 0$$

das Integrale

$$9)\; y = C_1 \int_\alpha^\beta \frac{du}{\sqrt{(u-\alpha)(u-\beta)(u+x)}} + C_2 \int_\alpha^\beta \log \frac{(u-\alpha)(u-\beta)}{u+x} \cdot \frac{du}{\sqrt{(u-\alpha)(u-\beta)(u+x)}}$$

wie ich sogleich nachweisen werde.

Ich nehme zunächst das erste particuläre Integrale

$$10) \qquad y = \int_\alpha^\beta \frac{du}{\sqrt{(u-\alpha)(u-\beta)(u+x)}}$$

vor; dies giebt differenzirt

$$y' = -\tfrac{1}{2} \int_\alpha^\beta \frac{du}{\sqrt{(u-\alpha)(u-\beta)(u+x)^3}}$$

$$y'' = \tfrac{3}{4} \int_\alpha^\beta \frac{du}{\sqrt{(u-\alpha)(u-\beta)(u+x)^5}}$$

und folglich hat man:

$$(x+\alpha)(x+\beta)y'' + (2x+\alpha+\beta)y' + \tfrac{1}{4}y =$$

$$\int_\alpha^\beta [\tfrac{3}{4}(x+\alpha)(x+\beta) - \tfrac{1}{2}(u+x)(2x+\alpha+\beta) + \tfrac{1}{4}(u+x)^2] \frac{du}{\sqrt{(u-\alpha)(u-\beta)(u+x)^5}}$$

oder reducirt:

$$(x+\alpha)(x+\beta)y'' + (2x+\alpha+\beta)y' + \tfrac{1}{4}y =$$

$$\tfrac{1}{4} \int_\alpha^\beta \frac{(\alpha+\beta-2u)x + u^2 - 2u(\alpha+\beta) + 3\alpha\beta}{\sqrt{(u-\alpha)(u-\beta)(u+x)^5}} du.$$

Nun ist aber

$$\tfrac{1}{4} \int \frac{(\alpha+\beta-2u)x + u^2 - 2u(\alpha+\beta) + 3\alpha\beta}{\sqrt{(u-\alpha)(n-\beta)(u+x)^5}} du = -\frac{\sqrt{(u-\alpha)(u-\beta)}}{2\sqrt{(u+x)^3}}$$

wie man sich durch wirkliches Differenziren überzeugen kann, folglich ist

$$\tfrac{1}{4} \int_\alpha^\beta \frac{(\alpha+\beta-2u)x + u^2 - 2u(\alpha+\beta) + 3\alpha\beta}{\sqrt{(u-\alpha)(u-\beta)(u+x)^5}} du = 0$$

und die Gleichung

$$(x+\alpha)(x+\beta)y''+(2x+\alpha+\beta)y'+\tfrac{1}{4}y=0$$

**wird durch den in 10) stehenden Ausdruck erfüllt, wie bewiesen werden sollte.**

**Ich wende mich nun zum zweiten particulären Integrale und werde nachweisen, dass auch**

$$11)\qquad y=\int_\alpha^\beta \log\frac{(u-\alpha)(u-\beta)}{u+x}\cdot\frac{du}{\sqrt{(u-\alpha)(u-\beta)(u+x)}}$$

**der Gleichung 8) genügt.**

**Aus 11) folgt:**

$$y'=-\int_\alpha^\beta\frac{du}{\sqrt{(u-\alpha)(u-\beta)(u+x)^3}}-\tfrac{1}{2}\int_\alpha^\beta \log\frac{(u-\alpha)(u-\beta)}{u+x}\cdot\frac{du}{\sqrt{(u-\alpha)(u-\beta)(u+x)^3}}$$

$$y''=2\int_\alpha^\beta\frac{du}{\sqrt{(u-\alpha)(u-\beta)(u+x)^5}}+\tfrac{3}{4}\int_\alpha^\beta \log\frac{(u-\alpha)(u-\beta)}{u+x}\cdot\frac{du}{\sqrt{(u-\alpha)(u-\beta)(u+x)^5}}$$

**und somit ist:**

$$(x+\alpha)(x+\beta)y''+(2x+\alpha+\beta)y'+\tfrac{1}{4}y=$$

$$=\tfrac{1}{4}\int_\alpha^\beta \log\frac{(u-\alpha)(u-\beta)}{u+x}\cdot\frac{(\alpha+\beta-2u)x+u^2-2u(\alpha+\beta)+3\alpha\beta}{\sqrt{(u-\alpha)(u-\beta)(u+x)^5}}du+$$

$$+\int_\alpha^\beta\frac{2(x+\alpha)(x+\beta)-(u+x)(2x+\alpha+\beta)}{\sqrt{(u-\alpha)(u-\beta)(u+x)^5}}du$$

**Der zweite Theil dieser Gleichung lässt sich aber auch so schreiben:**

$$-\tfrac{1}{2}\int_\alpha^\beta \log\frac{(u-\alpha)(u-\beta)}{u+x}\cdot\frac{d}{du}\left[\frac{\sqrt{(u-\alpha)(u-\beta)}}{\sqrt{(u+x)^3}}\right]du+$$

$$+\int_\alpha^\beta\frac{(x-u)(\alpha+\beta)+2(\alpha\beta-ux)}{\sqrt{(u-\alpha)(u-\beta)(u+x)^5}}du$$

**und wenn man das erste Integral nach der Methode des theilweisen Integrirens behandelt**

$$(x+\alpha)(x+\beta)y''+(2x+\alpha+\beta)y'+\tfrac{1}{4}y$$

$$=\tfrac{1}{2}\int_\alpha^\beta\frac{\sqrt{(u-\alpha)(u-\beta)}}{\sqrt{(u+x)^3}}\left(\frac{1}{u-\alpha}+\frac{1}{u-\beta}-\frac{1}{u+x}\right)du$$

$$+\int_\alpha^\beta\frac{(x-u)(\alpha+\beta)+2(\alpha\beta-ux)}{\sqrt{(u-\alpha)(u-\beta)(u+x)^5}}du$$

**oder reducirt:**

$$(x+\alpha)(x+\beta)y''+(2x+\alpha+\beta)y'+\tfrac{1}{4}y=$$
$$\tfrac{1}{4}\int_\alpha^\beta \frac{(\alpha+\beta-2u)x+u^2-2u(\alpha+\beta)+3\alpha\beta}{\sqrt{(u-\alpha)(u-\beta)(u+x)^5}}\,du,$$

was, dem frühern zu Folge, Null ist; somit ist wirklich der in 9) stehende Ausdruck das complete Integral der Gleichung 8).

Unterwirft man die Gleichung 8) einer $n$fachen Differentiation, so erhält man:

$$(x+\alpha)(x+\beta)y^{(n+2)}+(n+1)(2x+\alpha+\beta)y^{(n+1)}+(n+\tfrac{1}{2})^2 y^{(n)}=0$$

und setzt man hierein

$$y^{(n)}=z,$$

so kömmt man zu der Gleichung:

$$12)\quad (x+\alpha)(x+\beta)z''+(n+1)(2x+\alpha+\beta)z'+(n+\tfrac{1}{2})^2 z=0,$$

von welcher ich behaupte, dass ihr genügt wird durch

$$z=C_1\int_\alpha^\beta \frac{du}{\sqrt{(u-\alpha)(u-\beta)(u+x)^{2n+1}}}$$
$$+C_2\int_\alpha^\beta \log\frac{(u-\beta)(u-\beta)}{u+x}\cdot\frac{du}{\sqrt{(u-\alpha)(u-\beta)(u+x)^{2n+1}}}$$

unter $n$ eine ganz beliebige, aber constande Zahl verstanden.

Um diese Behauptung zu rechtfertigen, werde ich wirklich die einzelnen particulären Integrale in die Gleichung 12) substituiren, und habe somit unter Annahme

$$z=\int_\alpha^\beta \frac{du}{\sqrt{(u-\alpha)(u-\beta)(u+x)^{2n+1}}}$$

für $z'$ und $z''$ die nachfolgenden Werthe:

$$z'=-\frac{2n+1}{2}\int_\alpha^\beta \frac{du}{\sqrt{(u-\alpha)(u-\beta)(u+x)^{2n+3}}}$$

$$z''=\frac{(2n+1)(2n+3)}{4}\int_\alpha^\beta \frac{du}{\sqrt{(u-\alpha)(u-\beta)(u+x)^{2n+5}}},$$

daher ist:

$$(x+\alpha)(x+\beta)y''+(n+1)(2x+\alpha+\beta)z'+(n+\tfrac{1}{2})^2 z=$$
$$\int_\alpha^\beta \frac{du}{\sqrt{(u-\alpha)(u-\beta)(u+x)^{2n+5}}}\Big[\frac{(2n+1)(2n+3)}{4}(x+\alpha)(x+\beta)$$
$$-\frac{(n+1)(2n+1)}{2}(2x+\alpha+\beta)(u+x)+(n+\tfrac{1}{2})^2(u+x)^2\Big],$$

oder reducirt:

$$(x+\alpha)(x+\beta)z''+(n+1)(2x+\alpha+\beta)z'+(n+\tfrac{1}{2})^2 z=$$

$$\frac{2n+1}{4}\int_\alpha^\beta \frac{du}{\sqrt{(u-\alpha)(u-\beta)(u+x)^{2n+5}}}\Big[(\alpha+\beta-2u)x+(2n+1)u^2$$

$$-2(\alpha+\beta)(n+1)u+\alpha\beta(2n+3)\Big].$$

Nun ist

$$\frac{2n+1}{4}\int_\alpha^\beta \frac{du}{\sqrt{(u-\alpha)(u-\beta)(u-x)^{2n+5}}}\Big[(\alpha+\beta-2u)x+(2n+1)u^2$$

$$-2(\alpha+\beta)(n+1)u+\alpha\beta(2n+3)\Big]=-\frac{2n+1}{2}\sqrt{\frac{(u-\alpha)(u-\beta)}{(u+x)^{2n+3}}}$$

was sowohl für $u=\alpha$ als auch für $u=\beta$ Null wird, somit ist

$$z=\int_\alpha^\beta \frac{du}{\sqrt{(u-\alpha)(u-\beta)(u+x)^{2n+1}}}$$

ein Integral der Gleichung 12).

Ebenso erhalte ich unter Annahme von

$$z=\int_\alpha^\beta log\frac{(u-\alpha)(u-\beta)}{u+x}\cdot\frac{du}{\sqrt{(u-\alpha)(u-\beta)(u+x)^{2n+1}}}$$

für $z'$ und $z''$ folgende Ausdrücke:

$$z'=-\frac{2n+1}{2}\int_\alpha^\beta log\frac{(u-\alpha)(u-\beta)}{u+x}\cdot\frac{du}{\sqrt{(u-\alpha)(u-\beta)(u+x)^{2n+3}}}$$

$$-\int_\alpha^\beta \frac{du}{\sqrt{(u-\alpha)(u-\beta)(u+x)^{2n+3}}},$$

$$z''=\frac{(2n+1)(2n+3)}{4}\int_\alpha^\beta log\frac{(u-\alpha)(u-\beta)}{u+x}\cdot\frac{du}{\sqrt{(u-\alpha)(u-\beta)(u+x)^{2n+5}}}$$

$$+2(n+1)\int_\alpha^\beta \frac{du}{\sqrt{(u-\alpha)(u-\beta)(u+x)^{2n+5}}},$$

somit ist:

$$(x+\alpha)(x+\beta)z''+(n+1)(2x+\alpha+\beta)z'+(n+\tfrac{1}{2})^2 z=$$

$$-(n+\tfrac{1}{2})\int_\alpha^\beta log\frac{(u-\alpha)(u-\beta)}{u+x}\,\frac{d}{du}\left[\sqrt{\frac{(u-\alpha)(u-\beta)}{(u+x)^{2n+3}}}\right]du$$

$$+(n+1)\int_\alpha^\beta \frac{2(x+\alpha)(x+\beta)-(u+x)(2x+\alpha+\beta)}{\sqrt{(u-\alpha)(u-\beta)(u+x)^{2n+5}}}\,.\,du,$$

oder reducirt:

$$(x+\alpha)(x+\beta)z''+(n+1)(2x+\alpha+\beta)z'+(n+\tfrac{1}{2})^2 z=$$

$$(n+\tfrac{1}{2})\int_\alpha^\beta \sqrt{\frac{(u-\alpha)(u-\beta)}{(u+x)^{2n+3}}}\left(\frac{1}{u-\alpha}+\frac{1}{u-\beta}-\frac{1}{u+x}\right)du$$

$$+(n+1)\int_\alpha^\beta \frac{2(x+\alpha)(x+\beta)-(u+x)(2x+\alpha+\beta)}{\sqrt{(u-\alpha)(u-\beta)(u+x)^{2n+5}}}du$$

und diess giebt weiter behandelt:

$$(x+\alpha)(x+\beta)z''+(n+1)(2x+\alpha+\beta)z'+(n+\tfrac{1}{2})^2 z=$$

$$\tfrac{1}{2}\int_\alpha^\beta \frac{x(\alpha+\beta-2u)+u^2(1+2n)-2u(\alpha+\beta)(n+1)+\alpha\beta(3+2n)}{\sqrt{(u-\alpha)(u-\beta)(u+x)^{2n+5}}}du$$

was dem früheren zu Folge gleich Null ist.

Die Gleichung

$$12)\quad (x+\alpha)(x+\beta)z''+(n+1)(2x+\alpha+\beta)z'+(n+\tfrac{1}{2})^2 z=0,$$

deren completes Integral

$$13)\qquad z=C_1\int_\alpha^\beta \frac{du}{\sqrt{(u-\alpha)(u-\beta)(u+x)^{2n+1}}}$$

$$+C_2\int_\alpha^\beta log\frac{(u-\alpha)(u-\beta)}{u+x}\cdot\frac{du}{\sqrt{(u-\alpha)(u-\beta)(u+x)^{2n+1}}}$$

ist, und welche aus der Gleichung 5) hervorgeht, wenn man in selber

$$A=\tfrac{1}{2},\quad B=\tfrac{1}{2},\quad m=-(n+\tfrac{1}{2})$$

setzt, gestattet eine Transformation, die ich noch durchzuführen beabsichtige. Setzt man in 12)

$$(x+\alpha)(x+\beta)=\xi,$$

so ist

$$y'=(2x+\alpha+\beta)\frac{dy}{d\xi}$$

$$y''=2\frac{dy}{d\xi}+(2x+\alpha+\beta)^2\frac{d^2y}{d\xi^2},$$

und da alsdann

$$(2x+\alpha+\beta)^2=4\xi+(\alpha-\beta)^2$$

ist, so hat man:

$$14)\ \xi[(4\xi+(\alpha-\beta)^2]\frac{d^2y}{d\xi^2}+[2\xi(2n+3)+(n+1)(\alpha+\beta)^2]\frac{dy}{d\xi}+(n+\tfrac{1}{2})^2 y=0,$$

welche Gleichung also ebenfalls ein Integral mit einem logarithmischen Bestandtheil versehen hat, ferner erhält man die Gleichung 14) beliebig oft differenzirend, Differentialgleichungen von ähnlicher Art.

Ich habe bis jetzt von der Gleichung 5) in mehreren speciellen Fällen ein logarithmisches Integrale angegeben, und ich will nun die Gleichung 5) in dem, die früheren Fälle umfassenden allgemeinen Falle betrachten, wo

$$A+B=1$$

ist, $A$ und $B$ aber beliebige positive Zahlen bedeuten. Die Gleichung 5) ist alsdann

15) $(x+\alpha)(x+\beta)y''-[(B+m-1)(x+\alpha)+(A+m-1)(x+\beta)]z'+m^2y=0,$

und hat zum Integrale:

$$y=C_1\int_\alpha^\beta (u-\alpha)^{A-1}(u-\beta)^{B-1}(u+x)^m\,du$$

$$+C_2\int_\alpha^\beta (u-\alpha)^{A-1}(u-\beta)^{B-1}(u+x)^m \log\frac{(u-\alpha)(u-\beta)}{u+x}\,du,$$

unter $C_1$ und $C_2$ willkührliche Constante verstanden.

Dass das erste particuläre Integrale genügt, ist wohl von selber klar, ich habe daher nur darzuthun, dass auch

$$y=\int_\alpha^\beta (u-\alpha)^{A-1}(u-\beta)^{B-1}(u+x)^m \log\frac{(u-\alpha)(u-\beta)}{u+x}\,du$$

der Gleichung 15) Genüge leistet. Es ist:

$$y'=m\int_\alpha^\beta (u-\alpha)^{A-1}(u-\beta)^{B-1}(u+x)^{m-1} \log\frac{(u-\alpha)(u-\beta)}{u+x}\,du$$

$$-\int_\alpha^\beta (u-\alpha)^{A-1}(u-\beta)^{B-1}(u+x)^{m-1}\,du,$$

$$y''=m(m-1)\int_\alpha^\beta (u-\alpha)^{A-1}(u-\beta)^{B-1}(u+x)^{m-2} \log\frac{(u-\alpha)(u-\beta)}{u+x}\,du$$

$$+(1-2m)\int_\alpha^\beta (u-\alpha)^{A-1}(u-\beta)^{B-1}(u+x)^{m-2}\,du,$$

und folglich hat man:

$$(x+\alpha)(x+\beta)y''-[(B+m-1)(x+\alpha)+(A+m-1)(x+\beta)]y'+m^2y=$$

$$m\int_\alpha^\beta \log\frac{(u-\alpha)(u-\beta)}{u+x}\cdot\frac{d}{du}[(u-\alpha)^A(u-\beta)^B(u+x)^{m-1}]\,du$$

$$+\int_\alpha^\beta (u-\alpha)^{A-1}(u-\beta)^{B-1}(u+x)^{m-2}[(1-2m)(x+\alpha)(x+\beta)$$

$$+(B+m-1)(x+\alpha)(x+u)+(A+m-1)(x+\beta)(x+u)]\,du,$$

oder nach vorgenommener Reduction, unter steter Berücksichtigung, dass

$$A + B = 1$$

ist,

$$(x+\alpha)(x+\beta)y'' - [(B+m-1)(x+\alpha) + (A+m-1)(x+\beta)]y' + m^2 y =$$

$$m\int_\alpha^\beta \log\frac{(u-\alpha)(u-\beta)}{u+x} \cdot \frac{d}{du}[(u-\alpha)^A(u-\beta)^B(u+x)^{m-1}]\,du$$

$$+\int_\alpha^\beta (u-\beta)^{A-1}(u-\beta)^{B-1}(u+x)^{m-2}[x(A\beta + B\alpha + 2mu - u - \alpha m - \beta m)$$

$$+ (\alpha\beta - 2\alpha\beta m + A\beta u + B\alpha u + \alpha u m + \beta u m - \beta u - \alpha u)]\,du.$$

Da nun für positive Werthe von $A$ und $B$ folgende Gleichung stattfindet:

$$m\int_\alpha^\beta \log\frac{(u-\alpha)(u-\beta)}{u+x} \cdot \frac{d}{du}[(u-\alpha)^A(u-\beta)^B(u+x)^{m-1}]\,du =$$

$$-m\int_\alpha^\beta (u-\alpha)^{A-1}(u-\beta)^{B-1}(u+x)^{m-1}[(u-\beta)(u+x) + (u-\alpha)(u+x)$$

$$-(u-\alpha)(u-\beta)]\,du,$$

so hat man, diess gehörig benützend und reducirend,

$$(x+\alpha)(x+\beta)y'' - [(B+m-1)(x+\alpha) + (A+m-1)(x+\beta)]y' + m^2 y =$$

$$-\int_\alpha^\beta (u-\alpha)^{A-1}(u-\beta)^{B-1}(u+x)^{m-2}[A(u-\beta)(u+x) + B(u-\alpha)(u+x)$$

$$+(m-1)(u-\alpha)(u-\beta)]\,du.$$

Der zweite Theil dieser Gleichung ist Null, weil das unbestimmte Integrale den Werth

$$-(u-\alpha)^A(u-\beta)^B(u+x)^{m-1}$$

hat, der sowohl für $u = \alpha$ als auch für $u = \beta$ verschwindet.

Bevor ich weiter gehe, bemerke ich noch, dass Differentialgleichungen von der Form

$$16)\qquad (mx^3 + nx)y'' + (px^2 + q)y' + rxy' = 0$$

sich durch Substitution von

$$x^2 = \xi$$

in Gleichungen der eben untersuchten Form verwandeln, und dass die zwei Gleichungen, welche in der Theorie der elliptischen Functionen vorkommen:

$$x(1-x^2)y'' + (1-3x^2)y' - xy = 0,$$

$$x(1-x^2)y'' + (1-x^2)y' + xy = 0$$

specielle Fälle der Gleichung 16) sind.

Ich wende mich nun an die Untersuchung des speciellen, bisher noch nicht besprochenen Falles, wo der erste Coefficient der Gleichung ein vollkommenes Quadrat ist, wo man also die Gleichung

$$17)\qquad (x+\alpha)^2 y'' + (qx+r)y' + sy = 0$$

zur Integration vorliegen hat.

Für $x+\alpha=\xi$ geht dieselbe über in

$$18)\qquad \xi^2 y'' + (a\xi+b)y' + cy = 0$$

und ist jetzt ein specieller Fall folgender, vom Herrn Petzval integrirten Gleichung:

$$x^2 y'' + x(A_1 + B_1 x^m) y' + (A_0 + B_0 x^m + C_0 x^{2m}) y = 0$$

(siehe dessen Werk 1. Band, Seite 105). Setzt man in dieser

$$m = -1, \quad B_0 = C_0 = 0,$$

so hat man

$$19)\qquad x^2 y'' + (A_1 x + B_1) y' + A_0 y = 0,$$

welche vollkommen mit der Gleichung 18) übereinstimmt.

Durch Einführung einer neuen, unabhängig Variablen $t$ mittelst der Substitution

$$t = \frac{1}{x},$$

kommt man zu der Gleichung:

$$t^2 \frac{d^2y}{dt^2} + [(2-A_1)t - B_1 t^2] \frac{dy}{dt} + A_0 y = 0,$$

welche für

$$y = t^k z$$

unter $k$ eine Wurzel der Gleichung:

$$k^2 + k(1-A_1) + A_0 = 0$$

verstanden, folgende Form annimmt:

$$t\frac{d^2z}{dt^2} + (2k+2-A_1-B_1 t)\frac{dz}{dt} - kB_1 z = 0,$$

somit eine Differentialgleichung zweiter Ordnung ist, mit Coefficienten, die bezüglich der unabhängig Variablen der ersten Potenz angehören. Ich habe mich mit solchen Gleichungen vielfach beschäftigt, und Integrale derselben unter verschiedenen Bedingungen aufgestellt. So ist z. B. in dem Falle, wo

$$k > 0 \text{ und } k+2 > A_1$$

ist

$$z = \int_0^{B_1} e^{ut} u^{k-1} (u-B_1)^{k+1-A_1} du,$$

somit

$$y = \frac{1}{x^k} \int_0^{B_1} e^{\frac{u}{x}} u^{k-1} (u-B_1)^{k+1-A_1} du$$

ein Integral der Gleichung 19).

Wenn man umgekehrt $y$ in folgende Form voraussetzt:

$$20)\qquad y=\frac{1}{(x+\alpha)^A}\int_0^m e^{\frac{u}{x+\alpha}}u^{A-1}(u-m)^{B-1}du$$

und die Differentialgleichung zweiter Ordnung sucht, die durch diesen Werth befriedigt wird, so hat man:

$$y'=-\frac{A}{(x+\alpha)^{A+1}}\int_0^m e^{\frac{u}{x+\alpha}}u^{A-1}(u-m)^{B-1}du$$

$$-\frac{1}{(x+\alpha)^{A+2}}\int_0^m e^{\frac{u}{x+\alpha}}u^{A}(u-m)^{B-1}du$$

$$y''=-\frac{A(A+1)}{(x+\alpha)^{A+2}}\int_0^m e^{\frac{u}{x+\alpha}}u^{A-1}(u-m)^{B-1}du$$

$$+\frac{2(A+1)}{(x+\alpha)^{A+3}}\int_0^m e^{\frac{u}{x+\alpha}}u^{A}(u-m)^{B-1}du$$

$$+\frac{1}{(x+\alpha)^{A+4}}\int_0^m e^{\frac{u}{x+\alpha}}u^{A+1}(u-m)^{B-1}du$$

und somit:

$$X_2y''+X_1y'+X_0y=$$

$$\frac{1}{(x+\alpha)^{A+4}}\int_0^m e^{\frac{u}{x+\alpha}}u^{A-1}(u-m)^{B-1}\left[X_2u^2+2(A+1)(x+\alpha)X_2u+\right.$$

$$\left.+A(A+1)X_2(x+\alpha)^2-(x+\alpha)^2X_1u-A(x+\alpha)^3X_1+(x+\alpha)^4X_0\right]du.$$

Setzt man

$$X_2=(x+\alpha)^2,$$

so gestattet obige Gleichung eine Reduction in folgender Weise:

$$X_2y''+X_1y'+X_0y=$$

$$\frac{1}{(x+\alpha)^{A+2}}\int_0^m e^{\frac{u}{x+\alpha}}u^{A-1}(u-m)^{B-1}\left[u^2+2(A+1)(x+\alpha)u\right.$$

$$\left.+A(A+1)(x+\alpha)^2-X_1u-A(x+\alpha)X_1+(x+\alpha)^2X_0\right]du$$

und lässt man einstweilen die Integrationsgrenzen ausser Acht, so kann man den zweiten Theil dieser Gleichung gleich

$$21)\qquad \frac{1}{(x+\alpha)^{A+1}}e^{\frac{u}{x+\alpha}}u^A(u-m)^B$$

annehmen, und $X_0$ $X_1$ dermassen bestimmen, dass wirklich identisch diese vorausgesetzte Gleichheit besteht. Denn man hat die Gleichung

$$\frac{1}{(x+\alpha)^{A+2}}\int e^{\frac{u}{x+\alpha}} u^{A-1}(u-m)^{B-1}[u^2+2(A+1)(x+\alpha)u+A(A+1)(x+\alpha)^2 -$$
$$- X_1 u - A(x+\alpha)X_1 + (x+\alpha)^2 X_0]\,du = \frac{1}{(x+\alpha)^{A+1}} e^{\frac{u}{x+\alpha}} u^A (u-m)^B$$

nach $u$ differenzirend und alsdann reducirend:

$$u^2+2(A+1)(x+\alpha)u+A(A+1)(x+\alpha)^2-X_1 u-A(x+\alpha)X_1+(x+\alpha)^2X_0=$$
$$u(u-m)+A(u-m)(x+\alpha)+Bu(x+\alpha),$$

woraus nach weiterer Reduction folgen:

$$2(A+1)(x+\alpha)-X_1=-m+(A+B)(x+\alpha)$$
$$A(A+1)(x+\alpha)-AX_1+(x+\alpha)X_0=-Am.$$

Es gehen hieraus hervor:

$$X_1=m+(A-B+2)(x+\alpha)$$
$$X_0=A(1-B),$$

somit genügt der Differentialgleichung:

$$22)\quad (x+\alpha)^2y''+[m+(A-B+2)(x+\alpha)]y'+A(1-B)y=0$$

das Integrale:

$$y=\frac{1}{(x+\alpha)^A}\int_0^m e^{\frac{u}{x+\alpha}} u^{A-1}(u-m)^{B-1}\,du,$$

nur müssen $A$ und $B$ positiv sein, weil sonst der Ausdruck 21) für $u=0$ und $u=m$ nicht Null würde. Sollte zugleich

$$A+B=1$$

sein, so hat man für die Gleichung 22) folgendes complete Integrale:

$$y=\frac{C_1}{(x+\alpha)^A}\int_0^m e^{\frac{u}{x+\alpha}} u^{A-1}(u-m)^{B-1}\,du$$
$$+\frac{C_2}{(x+\alpha)^A}\int_0^m e^{\frac{u}{x+\alpha}} u^{A-1}(u-m)^{B-1}\log\frac{u(u-m)}{x+\alpha}\,du.$$

Man kann nun auch sehr leicht für die Gleichung 22) in andern Fällen das complete Integrale aufstellen, denn die Gleichung 22) geht durch die beiden Substitutionen

$$t=\frac{1}{x+\alpha},\quad y=t^A z$$

über in:

$$t\frac{d^2z}{dt^2}+[A+B-mt]\frac{dz}{dt}-Amz=0,$$

deren completes Integrale sich angeben lässt, und ist dasselbe

$$z=C_1\varphi_1(t)+C_2\varphi_2(t),$$

so hat man für das complete Integrale der Gleichung 22)

$$y=\frac{C_1}{(x+\alpha)^A}\varphi_1\left(\frac{1}{x+\alpha}\right)+\frac{C_2}{(x+\alpha)^A}\varphi_2\left(\frac{1}{x+\alpha}\right).$$

# X.

## Vorläufige Mittheilungen

über die

## Ergebnisse vergleichender Versuche über den Ausfluss der Luft und des Wassers unter hohem Drucke.

Angestellt im Sommer 1856

von

Bergrath Professor JULIUS WEISBACH.

(Aus der Zeitschrift „Der Civilingenieur," Neue Folge, V. Band, I. Heft.)

---

Ueber den Ausfluss des Wassers, sowie über das Ausströmen der Luft unter hohem Drucke sind bis in die neueste Zeit umfassende Versuche nicht angestellt oder wenigstens nicht veröffentlicht worden. Gleichwohl ist es für die praktische Anwendung sehr wichtig, zu wissen, ob die durch Versuche bei kleinem Drucke erprobten Ausflussgesetze bei höheren Drücken ihre Giltigkeit behalten, ob namentlich hier noch die Contractionserscheinungen und Reibungsverhältnisse dieselben sind, wie beim Ausflusse unter kleinem Drucke. Insbesondere ist die Ausführung von Versuchen über den Ausfluss der Luft unter höherem Drucke deshalb besonders wichtig, weil nur durch dieselben darzuthun ist, welches Gesetz bei diesem Ausflusse obwaltet. Haben wir doch über den Ausfluss der Luft aus Gefässen dreierlei Formeln (siehe meine Ingenieur- und Maschinenmechanik Band I, Seite 881 u. flg), wovon doch gewiss nur eine richtig ist und den Erfahrungen entsprechen kann! Auch weichen die von verschiedenen Experimentatoren gefundenen Ausflusscoefficienten der Luft so sehr von einander ab (siehe Hülsse's allgemeine Encyclopädie Band I, den von mir bearbeiteten Artikel „Ausfluss," Seite 622, 626 u. flg.), dass man in Zweifel geräth, welche von diesen Erfahrungszahlen in vorkommenden Fällen der Praxis anzuwenden sind.

Es war nun schon längst meine Absicht, diese Unsicherheit durch Ausführung von neuen und umfassenden Versuchen zu beseitigen und dadurch dem Praktiker ein sicheres Mittel zur Bestimmung der Ausflussmengen der Luft unter gegebenem Drucke zu verschaffen, und ich hoffe, dass mir diess endlich durch die im Sommer 1856 angestellten und nun berechneten Versuche gelungen sei. Dieselben sind mit den verschiedenartigsten Mundstücken und Röhren, sowie bei sehr verschiedenen Drücken von $1\frac{1}{20}$ bis zu

$2\frac{1}{4}$ Atmosphären angestellt worden. Um die Ausflussverhältnisse der Luft mit denen des Wassers direct vergleichen zu können, habe ich mit denselben Mundstücken und Röhren und unter fast gleichen Drücken auch Versuche über den Ausfluss des Wassers angestellt. Die meisten älteren Versuche sind bei viel kleinerem Wasserdrucke angestellt worden, da selbst bei den Versuchen der Michelottis die grösste Druckhöhe nur 21 Pariser Fuss betrug, und nur meine in Band I des Ingenieurs (Seite 558) veröffentlichten Versuche bei 12 Atmosphären Druck machen hiervon eine Ausnahme. Da die letzteren Versuche nicht umfassend genug ausgeführt worden sind, so möchten daher die 1856 ausgeführten Versuche über den Ausfluss des Wassers unter 1 bis 2 Atmosphären Ueberdruck nicht ohne Werth und Interesse sein. Nebst diesen Versuchen habe ich auch noch mehrere vergleichende Versuche über den Luft- und Wasserstoss, sowie auch solche über die Höhe springender Strahlen angestellt. Sämmtliche vergleichende Versuche über den Ausfluss der Luft und des Wassers werde ich ausführlich im dritten Hefte des schon im Jahre 1842 begonnenen Werkes „Untersuchungen im Gebiete der Mechanik und Hydraulik" beschreiben und hiervon im Folgenden nur die Hauptergebnisse mittheilen.

### A. Versuche über den Ausfluss des Wassers.

Die hierher gehörigen Versuche über den Ausfluss des Wassers sind an einer eisernen Wasserleitungsröhre von $18\frac{1}{4}$ Zoll (sächs.) Weite mit circa 60 Fuss Druckhöhe angestellt worden. Diese Röhre (siehe den Kalender für den Sächsischen Berg- und Hüttenmann, Jahrgang 1849, Seite 20) führt in der Nähe der sogenannten Altväterwasserleitung pro Minute 200 Cubikfuss Wasser aus dem rothen Graben quer über das Münzbachthal, und den Gehängen desselben folgend, in den oberen Aufschlaggraben der Grube Churprinz Friedrich August Erbstolln. Der Theil dieser Röhre, welcher in der Thalsohle liegt, enthält ein Seitenrohr, und an dasselbe habe ich ein sich allmälig erweiterndes Ausflussrohr angeschraubt. Das weite Ende dieser Röhre wurde durch eine eiserne Platte verschlossen, welche in der Mitte ein Loch enthielt, worin sich, genau wie bei dem hydraulischen Versuchsapparat (siehe meine Experimentalhydraulik, Seite 5), die verschiedenen Mundstücke und Röhren einsetzen liessen, während seitwärts in dasselbe ein bleiernes Rohr einmündete, welches nach einem als Piezometer dienenden Gefässmanometer mit Quecksilberfüllung führte. Dieses Instrument gab den Druck des Wassers unmittelbar vor seinem Ausflusse durch die Höhe einer Quecksilbersäule an, und es war daher nicht nöthig, die Tiefe der Ausflussmündung unter dem Wasserspiegel auszumessen und die in Abzug zu bringenden Widerstände in der Leitungsröhre auszumitteln.

Zum Schlusse habe ich endlich auch noch mit denselben Mundstücken Versuche über den Ausfluss des Wassers unter kleinem Drucke in der Art, wie in der „Experimentalhydraulik" angegeben wird, ausgeführt.

Die Hauptergebnisse dieser Versuche über den Ausfluss des Wassers unter hohem Drucke (bei circa 17 Meter Druckhöhe) sind folgende:

Bei Kreismündungen in der ebenen dünnen Wand von 1 bis 2,5 Centimeter Durchmesser ist der Ausflusscoefficient

$$\mu = 0,632 \text{ bis } 0,604;$$

bei einer Kreismündung in der conisch convergenten Wand mit dem Convergenzwinkel von 100 Grad, von 1 Centimeter Durchmesser, fiel

$$\mu = 0,716 \text{ aus},$$

und bei einer solchen in der conisch divergenten Wand mit dem Divergenzwinkel von 100 Grad stellt sich

$$\mu = 0,564 \text{ heraus.}$$

Diese Ergebnisse sind ganz conform mit den Resultaten der Ausflussversuche unter kleinem Drucke und weichen von diesen auch nur wenig ab.

Mittelst einer kurzen cylindrischen Ansatzröhre von 1 Centimeter Weite und 3 Centimeter Länge war ein Ausfluss mit gefülltem Querschnitte nicht zu erlangen, eben so wenig dann, als man durch eine gleiche Ansatzröhre die Länge dieser Röhre verdoppelt hätte.

Nachdem man endlich diese zusammengesetzte Röhre mittelst eines dritten cylindrischen Ansatzstückes von 1 Centimeter Weite und 3 Centimeter Länge neun Mal so lang als weit gemacht hatte, erhielt man zwar einen scheinbar vollen, jedoch mit starken Pulsationen verbundenen Ausfluss, es fiel aber der Ausflusscoefficient $\mu$ nur 0,732 aus.

Um einen Ausfluss mit gefülltem Querschnitte und ohne bemerkbare Pulsationen und in parallelen Fäden zu erlangen, musste die den Druck vor der Ausmündungsebene messende Druckhöhe durch Stellung des Hahnes in der Zuflussröhre von 17 auf 5 Meter vermindert werden. Es stellte sich dann

$$\mu = 0,772,$$

und, nach Abzug der Reibungen in den beiden Ansatzstücken,

$$\mu = 0,818$$

heraus, wie auch ungefähr bei Versuchen unter kleinem Drucke, bei circa 1 Meter Druckhöhe, gefunden wird.

Eine einfache cylindrische Röhre von 1 Centimeter Weite und 3 Centimeter Länge mit inwendig abgerundetem Rande (siehe Experimentalhydraulik Figur 46, Seite 83) gab, bei 17 Meter Druckhöhe, den Ausflusscoefficienten

$$\mu = 0,970.$$

Ganz ähnlich verhielt sich der Ausfluss des Wassers durch eine kurze cylindrische Ansatzröhre von 1,41 Centimeter Durchmesser und der dreifachen Länge. Auch hier war bei 17 Druckhöhe ein voller Ausfluss nicht zu erlangen. Erst nachdem man diere Röhre durch ein gleiches cylindrisches Ansatzstück doppelt so lang gemacht hatte, erhielt man bei

Druckhöhen unter 13,3 Meter einen Ausfluss mit gefülltem Querschnitt, und es ergab sich: für

$$h = 11 \text{ Meter}, \mu = 0{,}813,$$

sowie für

$$h = 8 \text{ Meter}, \mu = 0{,}822.$$

Eine cylindrische Ansatzröhre von 2,44 Centimeter Weite und 7,32 Centimeter Länge gab, nachdem man sie ebenfalls durch Ansatzstücke auf das Dreifache verlängert hatte, unter 17 Meter Druckhöhe vollen Ausfluss und

$$\mu = 0{,}815.$$

Auffallend gross sind die Ausflusscoefficienten für conoidische und conische Röhren ausgefallen; es ist diesem zufolge anzunehmen, dass hier bei hohen Drücken das Wasser fast ganz mit der theoretischen Geschwindigkeit ausfliesse, also die Erfahrung der Theorie entspreche.

Ein conoidisches Mundstück von 1 Centimeter Ausmündungsweite (Experimentalhydraulik, Figur 22, Seite 41) gab einen schönen krystallähnlichen Wasserstrahl und führte auf den Ausflusscoefficienten

$$\mu = 0{,}994;$$

ferner eine kurze conische Röhre von derselben Mündungsweite und 7 Grad 9 Min. Convergenz, wies

$$\mu = 0{,}981$$

nach, und eine ähnliche Röhre mit innerer Abrundung (siehe Experimentalhydraulik, Figur 50, Seite 88) gab

$$\mu = 0{,}989.$$

Eine längere conische Röhre, inwendig abgerundet, 10,5 Centimeter lang, in der Ausmündung 1,4 und in der Einmündung 3,8 Centimeter weit, führte auf den Werth

$$\mu = 0{,}987$$

für den Ausflusscoefficienten.

An dieselbe Röhre ein conisches Ausmündungsstück von 1 Centimeter äusserer Weite und 5 Grad 44 Min. Convergenz angesetzt, gab den Ausflusscoefficienten

$$\mu = 0{,}994.$$

Um den Reibungswiderstand des Wassers bei grossen Geschwindigkeiten zu erproben, sind Versuche über den Ausfluss durch Glas-, Messing- und Zinkröhren, von verschiedenen Weiten und Längen angestellt worden. Durch dieselben wird die Richtigkeit oder Zulänglichkeit der in §. 396 meiner Ingenieur- und Maschinenmechanik aufgestellten Erfahrungsformel und der hiernach berechneten Tabelle (§. 397), sowie auch das allmälige Abnehmen der Coefficienten der Wasserreibung bei wachsender Geschwindigkeit des Wassers nachgewiesen.

Für eine Glasröhre von 1 Centimeter Weite und 2 Meter Länge ergab sich, nach Abzug des Widerstandes beim Eintritte, der Widerstandscoefficient

$$\zeta = 0,01815,$$

wobei die mittlere Geschwindigkeit $v = 8,514$ Meter betrug; sowie für eine solche Röhre von 1,43 Centimeter Weite und 1,706 Meter Länge,

$$\zeta = 0,01865$$

gefunden wurde, wobei die mittlere Geschwindigkeit den Werth $v = 10,178$ Meter hatte.

Eine glatte Messingröhre von 1 Centimeter Weite und 2 Meter Länge gab bei

$$v = 8,637 \text{ Meter}, \; \zeta = 0,018695,$$

und dieselbe abgekürzt bis 0,685 Meter Länge, führte bei

$$v = 12,320 \text{ Meter, auf } \zeta = 0,01784.$$

Die Hauptergebnisse der Versuche an den übrigen Röhren sind mit den vorstehenden Resultaten in folgender Tabelle zusammengestellt:

| Bezeichnung der Röhren. | Weite der Röhre. | Geschwindigkeit des Wassers in der Röhre. | Reibungscoefficient $\zeta$. |
|---|---|---|---|
| Engere Glasröhre . . . | 1,03 Cent.-M. | 8,51 Meter. | 0,01815 |
| Weitere Glasröhre . . | 1,43 " | 10,18 " | 0,01865 |
| Engere Messingröhre . . | 1,04 " | 8,64 " | 0,01869 |
| Desgl. kürzere . . . . | 1,04 " | 12,32 " | 0,01784 |
| Weitere Messingröhre . | 1,43 " | 8,66 " | 0,01719 |
| Desgl. kürzere . . . . | 1,43 " | 12,40 " | 0,01736 |
| Weitere Zinkröhren . . | 2,47 " | 3,19 " | 0,01962 |
| Desgl. kürzere . . . . | 2,47 " | 4,73 " | 0,01838 |
| " noch kürzere . . | 2,47 " | 6,24 " | 0,01790 |
| " noch kürzere . . | 2,47 " | 9,18 " | 0,01670 |

Es ist wohl kaum nöthig, zu bemerken, dass diese Coefficienten der Formel

$$h = \zeta \frac{l}{d} \cdot \frac{v^2}{2g}$$

entsprechen, worin

$h$ die Druckhöhe,
$l$ die Röhrenlänge,
$d$ die Röhrenweite und
$v$ die mittlere Geschwindigkeit des Wassers in der Röhre bezeichnet.

Die Tabelle der Reibungscoefficienten auf Seite 749 meiner Ingenieur- und Maschinenmechanik, dritte Auflage, giebt für

$v = 1$ Meter $\zeta = 0{,}0239$,
$v = 2$ „ $\zeta = 0{,}0211$,
$v = 3$ „ $\zeta = 0{,}0199$,
$v = 4$ „ $\zeta = 0{,}0191$,
$v = 5$ „ $\zeta = 0{,}0187$.

Es ist also die Uebereinstimmung eine ziemlich grosse.

Endlich sind auch über die Widerstände in Knie- und Kropfröhren einige Versuche unter hohem Drucke, oder vielmehr bei grossen Ausflussgeschwindigkeiten, angestellt worden.

Eine rechtwinkelige Knieröhre von 90° Ablenkung und 1 Centimeter Weite (siehe Figur 84, Seite 151 der Experimentalhydraulik) gab, nach Abzug der übrigen Widerstände, den Coefficienten des Kniewiederstandes, $\zeta = 1{,}9597$, wogegen er an jener Stelle der Experimentalhydraulik für

$h = 0{,}899$ Meter $\zeta = 1{,}902$

gefunden wird.

Für eine Kropfröhre von 90 Grad Ablenkung und 1 Centimeter Weite (siehe Figur 92, Seite 158 der Experimentalhydraulik) ergab sich bei

$h = 17$ Meter $\zeta = 0{,}295$,

während die Experimentalhydraulik, Seite 158, für

$h = 0{,}899$ Meter $\zeta = 0{,}378$

angiebt.

Ueber mehrere andere derartige Versuche wird erst die angekündigte Monographie Bericht erstatten.

## B. Versuche über den Ausfluss der Luft.

Zu den Versuchen über das Ausströmen der Luft wurde ein Dampfkessel von circa $1\frac{1}{4}$ Meter Weite und 5 Meter Länge angewendet, welchen ich zu diesem Zwecke auf den Hof des Königl. Amalgamirwerkes zu Halsbrücke schaffen und vor dem dasigen Druckwerke aufstellen liess. Dieses Druckwerk diente dazu, den Kessel vor jedem Versuche mit comprimirter Luft anzufüllen. Nach jedesmaliger Füllung wurde der Kessel durch ein luftdicht abschliessendes Ventil ganz von dem Druckwerke abgesperrt, der Manometerstand abgelesen, ferner die Ausflussmündung eine Zeit $t$, z. B. 1 Minute lang, eröffnet, und, nachdem man diese Mündung wieder verschlossen hatte, der Manometerstand von Neuem beobachtet. Zu gleicher Zeit mass man auch noch durch ein in den Kessel hineinreichendes Thermometer die Temperatur der Luft im Kessel, sowie an einem in der Nähe des Kessels aufgehangenen Barometer den äusseren Luftdruck. Mit Hilfe der Manometerstände $h$ und $h_1$ und des Barometerstandes $b$ liess sich aus dem Fassungsraume $V$ des Kessels das in der Zeit $t$ ausgeflossene Luftquantum, gemessen unter dem äusseren Drucke,

$$V_1 = \left(\frac{h - h_1}{b}\right) V,$$

sowie das Ausflussquantum pro Secunde

$$Q_1 = \frac{V_1}{t} = \left(\frac{h - h_1}{b}\right) \frac{V}{t}$$

berechnen.

Bezeichnet noch $\mu$ den Ausflusscoefficienten, d. i. das Verhältniss der effectiven Ausflussmenge $Q_1$ zum theoretischen Ausflussquantum $Q$, welches sich nach der zu Grunde zu legenden Ausflussformel berechnen lässt, so kann man durch den Ausdruck

$$1) \qquad \mu = \frac{Q_1}{Q} = \left(\frac{h - h_1}{b}\right) \frac{V}{Q\,t}$$

den dem ausgeführten Versuche entsprechenden Werth des Ausflusscoefficienten berechnen.

Der Fassungsraum $V$ des Kessels wurde durch Anfüllen mit Wasser und Aichung des Füllwassers in einem besonderen Aichgefässe bestimmt.

Die in diese Formel einzuführenden Werthe der Manometerstände liessen sich aber nicht ohne Weiteres beobachten; da die Luft beim Einpressen in den Kessel eine namhafte Temperaturerhöhung, und dagegen die im Kessel zurückgebliebene Luft bei ihrer Ausdehnung während der Ausströmung eine ansehnliche Temperaturverminderung erlitt, so blieb der Manometerstand sowohl nach dem Einpressen der Luft, als auch nach dem Ausflusse nicht auf einerlei Höhe, sondern es sank der erstere durch Abkühlung an der Kesselwand so weit herab, und es stieg der letztere durch Zuführung von Wärme an der Kesselwand so hoch, bis sich die Temperatur im Kessel mit der der Kesselwand, oder vielmehr der der äusseren Luft ins Gleichgewicht gesetzt hatte. Jenes Sinken und dieses Steigen des Manometerstandes der Luft im Kessel dauerte 20 Minuten und länger und betrug 2 bis 5 Centimeter. Es konnte natürlich der Ausflussversuch nicht eher beginnen, und ebenso jeder Versuch nicht eher als beendigt angesehen werden, als bis der Manometerstand ein constanter geworden war, und sich folglich das Gleichgewicht zwischen der inneren und äusseren Lufttemperatur hergestellt hatte. In der angegebenen Formel ist natürlich für $h$ die Grösse des constant gewordenen Manometerstandes vor, und für $h_1$ die Grösse $h_2$ des constant gewordenen Manometerstandes nach dem Ausflusse einzuführen. Zur Berechnung der Versuche war es aber auch nöthig, den Manometerstand $h_1$ unmittelbar nach dem Verstopfen der Ausflussmündung zu beobachten.

Während des Ausströmens geht die Pressung der ausströmenden Luft aus der inneren Pressung

$$p_1 = (b + h)\,\gamma$$

in die äussere Pressung

$$p = (b + h_1)\,\gamma$$

über, und hierbei kann man nun voraussetzen,

1) dass die Dichtigkeit des Luftstromes constant, oder
2) dass die Temperatur desselben unverändert bleibt, oder
3) dass sich Dichtigkeit und Temperatur desselben zugleich verändern.

Sind $\tau_1$ und $\tau$ die Temperaturen der Luft vor und nach dem Ausströmen, und bezeichnet $\delta$ den bekannten Ausdehnungscoefficient, $= 0{,}00367$ der Luft, so hat man unter der ersten Voraussetzung (siehe meine Ingenieur- und Maschinenmechanik, Seite 676, dritte Auflage)

$$1 = \frac{1 + \delta\tau_1}{1 + \delta\tau} \cdot \frac{p}{p_1},$$

und daher

$$1 + \delta\tau = (1 + \delta\tau_1)\frac{p}{p_1}.$$

Wäre nun z. B. die Pressung der Luft vor dem Ausströmen doppelt so gross als nach dem Ausströmen, also $\frac{p_1}{p} = 2$, so hätte man

$$1 + \delta\tau = \tfrac{1}{2}(1 + \delta\tau_1),$$

daher

$$\tau = \frac{\delta\tau_1 - 1}{2\delta} = \frac{\tau_1}{2} - 136{,}35,$$

und für $\tau_1 = 20$ Grad:

$$\tau = -126{,}25 \text{ Grad.}$$

Es würde also in diesem Falle die ausströmende Luft eine ausserordentliche Kälte entwickeln, bei welcher das Quecksilber zum Gefrieren käme. Durch Thermometer lässt sich die Temperatur einer bewegten Flüssigkeit nicht messen, weil dieselbe durch die Wärmeentwickelung bei dem Stosse und der Reibung der Flüssigkeit an dem Thermometer sogleich wieder erhöht wird. Die Kälte der unter hohem Drucke ausströmenden Luft war jedoch bei unserer Luftausströmungsversuchen daran zu erkennen, dass sich bei einer äusseren Lufttemperatur von 20 Grad, das Wasser sogleich in Eis verwandelte, wenn es während des Ausflusses mit der äusseren Wand der Ausflussröhre in Berührung gebracht wurde. Dieser ersteren Voraussetzung zu Folge ist die Ausflussgeschwindigkeit der Luft:

$$2) \qquad v = \sqrt{2g\left(\frac{p_1 - p}{\gamma_1}\right)} = \sqrt{2g\frac{p_1}{\gamma_1}\left(1 - \frac{p}{p_1}\right)},$$

wobei $\gamma_1$ die Dichtigkeit der inneren Luft bezeichnet.

Nun ist noch $\frac{p_1}{\gamma_1} = 7954\,(1 + \delta\tau_1)$, daher hat man auch

$$v = 89{,}19\sqrt{2g\,(1 + \delta\tau)\left(1 - \frac{p}{p_1}\right)} = 395\sqrt{(1 + \delta\tau)\left(1 - \frac{p}{p_1}\right)}$$

Meter (siehe meine Ingenieur- und Maschinenmechanik, Seite 895).

Bezeichnet nun noch $F$ die Grösse des Querschnittes der Ausfluss-

mündung, so erhält man für die unter dem Drucke $p$ und mit der Dichtigkeit $\gamma_1$ ausströmenden Windmenge pro Secunde:

$$Q_1 = F v = 395\, F \sqrt{(1 + \delta \tau)\left(1 - \frac{p}{p_1}\right)},$$

und, auf den äusseren Luftdruck $p$ reducirt,

$$Q = \frac{p_1}{p} Q_1 = 395\, F \sqrt{(1 + \delta \tau)\left(\frac{p_1}{p} - 1\right)\frac{p_1}{p}},$$

oder

$$3) \qquad Q = 395\, F \sqrt{(1 + \delta \tau)\left(1 + \frac{h}{b}\right)\frac{h}{b}}$$

Cubikmeter, wobei $h$ den Manometer- und $b$ den äusseren, also $b + h$ den inneren Barometerstand bezeichnet.

Diese Ausdrücke gelten natürlich nur für den Ausfluss der Luft unter constantem Drucke; nimmt aber, wie bei unseren Versuchen, der Druck allmälig ab, ist also auch die Ausflussgeschwindigkeit $v$ variabel, so muss man nach der Methode der Quadraturen einen mittleren Werth von $Q$ bestimmen, und denselben in die Formel:

$$\mu = \left(\frac{h - h_1}{b}\right)\frac{V}{Q\, t}$$

einsetzen, um mit Hilfe derselben den Ausflusscoefficienten $\mu$ berechnen zu können.

Unter der zweiten Voraussetzung ergiebt sich für die Ausflussgeschwindigkeit der Ausdruck

$$v = \sqrt{2 g \frac{p}{\gamma}\, Log.\, nat. \left(\frac{p_1}{p}\right)},$$

und daher die theoretische Ausflussmenge, gemessen unter dem äusseren Drucke,

$$Q = F v = 395\, F \sqrt{(1 + \delta \tau)\, L n. \left(\frac{p_1}{p}\right)}$$

$$= 395\, F \sqrt{(1 + \delta \tau)\, L n. \left(\frac{b + h}{b}\right)}$$

Cubikmeter.

Für unsere Versuche, wo wir es mit einem variablen Manometerstande zu thun haben, ist natürlich ebenfalls erst ein Mittelwerth von $v$ oder $Q$ zu ermitteln, um hiernach den Ausflusscoefficienten $\mu$ berechnen zu können.

Da beobachtet wurde, dass sich die Luft bei ihrem Ausströmen bedeutend abkühlt, so ist zu erwarten, dass die Rechnungsergebnisse nach dieser Formel bedeutend von der Erfahrung abweichen, wie auch durch meine Versuche nachgewiesen worden ist.

Der Wärmelehre zufolge, ist mit einer plötzlichen Dichtigkeitsveränderung einer gewissen Luftmenge auch eine momentane Veränderung der Temperatur derselben verbunden, und zwar nach dem Gesetze,

$$\frac{1+\delta\tau_1}{1+\delta\tau} = \left(\frac{\gamma_1}{\gamma}\right)^n,$$

worin $\tau$ die der Dichtigkeit $\gamma$, sowie
$\tau_1$ die der Dichtigkeit $\gamma_1$ entsprechende Temperatur
und $n$ eine Erfahrungszahl bezeichnet.

Da

$$\frac{p_1}{p} = \frac{1+\delta\tau_1}{1+\delta\tau} \cdot \frac{\gamma_1}{\gamma}$$

ist, so hat man auch

$$\frac{p_1}{p} = \left(\frac{\gamma_1}{\gamma}\right)^n \cdot \frac{\gamma_1}{\gamma} = \left(\frac{\gamma_1}{\gamma}\right)^{n+1} = \left(\frac{\gamma_1}{\gamma}\right)^{\varkappa},$$

wenn man noch $n + 1 = \varkappa$ setzt.

Die Zahl $\varkappa$ ist das Verhältniss 1,42 der specifischen Wärme der Luft bei gleichem Drucke zu der bei gleichem Volumen.

Endlich folgt auch

$$\frac{1+\delta\tau}{1+\delta\tau_1} = \left(\frac{p}{p_1}\right)^{\frac{\varkappa-1}{\varkappa}} = \left(\frac{p}{p_1}\right)^{\frac{0,42}{1,42}} = \left(\frac{p}{p_1}\right)^{\frac{21}{71}} = \left(\frac{p}{p_1}\right)^{0,29577}.$$

Nimmt man beispielsweise, wie oben und wie auch bei unseren Versuchen oft vorgekommen ist, $p_1 = 2p$ an, so erhält man

$$1 + \delta\tau = \frac{1+\delta\tau_1}{2^{0,29577}} = \frac{1+\delta\tau_1}{1,2275},$$

und für die anfängliche Temperatur $\tau_1 = 20^0$,

$$1 + \delta\tau = \frac{1,0734}{1,2275} = 8,744$$

daher die Temperatur nach der plötzlichen Ausdehnung:

$$\tau = \frac{0,8744 - 1}{0,00367} = -\frac{0,12557}{0,00367} = -\frac{12557}{367} = -34,2 \text{ Grad},$$

wogegen oben unter der ersten Voraussetzung, für denselben Fall, der sehr unwahrscheinliche Werth

$$\tau = -126,25 \text{ Grad}$$

gefunden worden ist.

Aus diesem dritten Principe folgert sich für die Ausflussgeschwindigkeit der Luft:

$$6) \qquad v = \sqrt{2g\frac{p_1}{\gamma_1} \cdot \frac{\varkappa}{\varkappa-1}\left(1 - \left(\frac{p}{p_1}\right)^{\frac{\varkappa-1}{\varkappa}}\right)},$$

(siehe meine Ingenieur- und Maschinenmechanik, Band I, Seite 821, dritte Auflage).

Ist wieder $F$ der Inhalt der Ausflussmündung, so hat man das unter dem äusseren Drucke $p$, unter der Dichtigkeit

$$\gamma = \gamma_1\left(\frac{p}{p_1}\right)^{\frac{1}{\varkappa}},$$

und mit der Temperatur

$$\tau = \frac{(1+\delta\tau_1)\left(\frac{p}{p_1}\right)^{\frac{\varkappa-1}{\varkappa}} - 1}{\delta}$$

ausströmende theoretische Windquantum pro Secunde:

$$Q_2 = Fv = F\sqrt{2g\frac{p_1}{\gamma_1}\cdot\frac{\varkappa}{\varkappa-1}\left(1-\left(\frac{p}{p_1}\right)^{\frac{\varkappa-1}{\varkappa}}\right)},$$

folglich das unter dem inneren Luftdrucke $p_1$ bei der Dichtigkeit $\gamma_1$ und Temperatur $\tau_1$ gemessene Luftquantum:

$$Q_1 = \frac{\gamma}{\gamma_1}Q_2 = \left(\frac{p}{p_1}\right)^{\frac{1}{\varkappa}} Q_2$$

$$= F\left(\frac{p}{p_1}\right)^{\frac{1}{\varkappa}}\sqrt{2g\frac{p_1}{\gamma_1}\cdot\frac{\varkappa}{\varkappa-1}\left(1-\left(\frac{p}{p_1}\right)^{\frac{\varkappa-1}{\varkappa}}\right)},$$

und endlich das unter dem äusseren Drucke $p$ bei der gegebenen Temperatur $\tau_1$ und der Dichtigkeit $\frac{p}{p_1}\cdot\gamma_1$ gemessene Luftquantum:

$$7)\quad Q = \frac{p_1}{p}Q_1 = F\left(\frac{p_1}{p}\right)^{\frac{\varkappa-1}{\varkappa}}\sqrt{2g\frac{p_1}{\gamma_1}\cdot\frac{\varkappa}{\varkappa-1}\left(1-\left(\frac{p}{p_1}\right)^{\frac{\varkappa-1}{\varkappa}}\right)},$$

worin für das Metermass

$$\sqrt{2g\frac{p_1}{\gamma_1}} = 395\sqrt{1+\delta\tau_1}$$

zu setzen ist.

Wenn man nach dem letzten Principe beim Ausfluss mit variablem Druck, wie z. B. für unsere Versuche, die Ausflussmenge bestimmen will, so muss man durch wiederholte Anwendung der letztern Formel einen Mittelwerth von $Q$ berechnen, sowie auch noch wegen der beim Ausströmen der Luft statthabenden Abkühlung im Kessel eine besondere Correction anbringen.

Führt man die Manometerstände und den Barometerstand in die Formel für $Q$ ein so erhält man den Ausdruck

$$Q = 395\,F\left(\frac{b+h}{b}\right)^{\frac{\varkappa-1}{\varkappa}}\sqrt{\frac{\varkappa}{\varkappa-}(1+\delta\tau_1)\left(1-\left(\frac{b}{b+h}\right)^{\frac{\varkappa-1}{\varkappa}}\right)}.$$

Bei einem variablen $h$ gilt diese Formel nur für ein Zeitelement $dt$, und es ist das entsprechende Ausflussquantum

$$dQ = 395\,F\sqrt{\frac{\varkappa}{\varkappa-1}(1+\delta\tau)}\left(\frac{b+h}{b}\right)^{\frac{\varkappa-1}{\varkappa}}\sqrt{1-\left(\frac{b}{b+h}\right)^{\frac{\varkappa-1}{\varkappa}}}\,.\,dt,$$

sowie umgekehrt, das zum Ausfluss von $dQ$ nöthige Zeittheilchen:

$$dt = \frac{dQ}{395\, F \sqrt{\frac{\varkappa}{\varkappa-1}(1+\delta\tau_1)\left(\frac{b+h}{b}\right)^{\frac{\varkappa-1}{\varkappa}}} \sqrt{1-\left(\frac{b}{b+h}\right)^{\frac{\varkappa-1}{\varkappa}}}}.$$

Setzt man nun noch in der Formel 1) zur Bestimmung des Ausflusscoefficienten:

$$\mu = \left(\frac{h-h_1}{h}\right)\frac{V}{Qt},$$

statt $h - h_1$ das Element $dh$, und statt $Qt$ das Element $dQ$ ein, so erhält man den Ausdruck $\mu b dQ = V dh$, und daher für unsere Versuche folgende Differenzialformel zur Bestimmung der Ausflusszeit $t$:

$$395\,\mu F b \sqrt{\frac{\varkappa}{\varkappa-1}(1+\delta\tau)} \cdot \sqrt{1-\left(\frac{b}{b+h}\right)^{\frac{\varkappa-1}{\varkappa}}} \left(\frac{b+h}{b}\right)^{\frac{\varkappa-1}{\varkappa}} . dt = V dh,$$

oder

$$dt = \frac{V}{395\,\mu F b \sqrt{\frac{\varkappa}{\varkappa-1}(1+\delta\tau)}} \cdot \frac{dh}{\left(\frac{b+h}{b}\right)^{\frac{\varkappa-1}{\varkappa}} \sqrt{1-\left(\frac{b}{b+h}\right)^{\frac{\varkappa-1}{\varkappa}}}},$$

so dass nun

$$t = \frac{V}{395\,\mu F b \sqrt{\frac{\varkappa}{\varkappa-1}(1+\delta\tau)}} \cdot \int \frac{dh}{\left(\frac{b+h}{b}\right)^{\frac{\varkappa-1}{\varkappa}} \sqrt{1-\left(\frac{b}{b+h}\right)^{\frac{\varkappa-1}{\varkappa}}}},$$

und daher der gesuchte Ausflusscoefficient

$$\mu = \frac{V}{395\, F b t \sqrt{\frac{\varkappa}{\varkappa-1}(1+\delta\tau)}} \cdot \int \frac{dh}{\left(\frac{b+h}{b}\right)^{\frac{\varkappa-1}{\varkappa}} \sqrt{1-\left(\frac{b}{b+h}\right)^{\frac{\varkappa-1}{\varkappa}}}}$$

folgt.

Die hier vorgeschriebene Integration ist bei Berechnung unserer Versuche dadurch zu Stande gebracht worden, dass man $h$ als Abscisse $x$ und

$$\frac{1}{\left(\frac{b+h}{b}\right)^{\frac{\varkappa-1}{\varkappa}} \sqrt{1-\left(\frac{b}{b+h}\right)^{\frac{\varkappa-1}{\varkappa}}}}$$

als Ordinate $y$ einer Curve angesehen und deren Quadratur $\int y\,dx$ durch Anwendung der Simpson'schen Regel bestimmt hat. Da die Anzahl der Versuche eine sehr grosse war, so liess ich hiernach eine Tabelle anfertigen, und man hatte dann zur Bestimmung des Werthes $\int y\,dx$ nur eine ein-

fache Interpolation zwischen den von der Tabelle gegebenen Werthen nöthig.

Die Luftausströmungsversuche selbst sind unter Pressungen von $\frac{21}{20}$ bis $\frac{5}{2}$ Atmosphäre angestellt worden, und man hat hierzu das bei den Versuchen über den Ausfluss des Wassers gebrauchte Gefässmanometer angewendet, jedoch dasselbe bei den Versuchen mit kleinen Pressungen mit Wasser gefüllt, um dadurch eine längere Flüssigkeitssäule und daher auch ein genaueres Ablesen an der Scala zu erlangen.

Um vor Allem das Ausflussgesetz der Luft zu prüfen, war es nöthig, Ausflussversuche an gut abgerundeten conoidischen und conischen Mundstücken anzustellen, wobei die Contraction der Luftstrahlen wegfällt und daher auch nicht in Betracht zu ziehen ist. Wenn diese Versuche auf Ausflusscoefficienten führen, welche der Einheit sehr nahe kommen, dieselbe aber auch nicht überschreiten, so ist auch dadurch die Richtigkeit der Ausflussformel, wonach diese Versuche berechnet worden sind, nachgewiesen.

Die Versuche mit dem conoidischen Mundstück von 1 Centimeter Weite (siehe Figur 22, Seite 48 der Experimentalhydraulik) gaben, nach der ersten Ausflussformel 3) berechnet, bei Quecksilbermanometerständen von

0,18 Meter bis 0,85 Meter

den Ausflusscoefficienten

$$\mu = 0{,}653 \text{ bis } 0{,}952.$$

Aus dieser grossen Verschiedenheit der Werthe von $\mu$ bei verschiedenen Druckhöhen ist die Unrichtigkeit oder die Unzulänglichkeit der zu Grunde gelegten Formel 3) ohne Weiteres zu folgern.

In noch höherem Grade gilt dasselbe auch von der zweiten Ausflussformel 5), weil dieselbe auf Ausflusscoefficienten führt, welche die Einheit überschreiten. Die dritte Ausflussformel 7) giebt dagegen für die angegebenen Druckhöhen den Ausflusscoefficienten

$$\mu = 0{,}965 \text{ bis } 0{,}985,$$

und es ist sowohl aus der Annäherung dieser Werthe zur Einheit, als auch aus der unbedeutenden Verschiedenheit derselben unter einander auf die Richtigkeit dieser Formel zu schliessen.

Innen abgerundete kurze conische und längere conische düsenformige Mundstücke von verschiedenen Weiten gaben nur wenig kleinere Werthe für den Ausflusscoefficienten, nämlich

$$\mu = 0{,}95 \text{ bis } 0{,}97.$$

Für das Ausströmen der Luft durch Mündungen in der dünnen Wand hat aber auch die letztere Formel bei verschiedener Druckhöhe sehr verschiedene Ausflusscoefficienten geliefert. Es ist daraus zu schliessen, dass die Contraction der Luftstrahlen beim Durchgange durch Mündungen in der dünnen Wand weit mehr veränderlich ist, als die der Wasserstrah-

len, dass namentlich beim Ausflusse unter kleinem Drucke der Contractionscoefficient am kleinsten ist, und dass dagegen derselbe um so grösser, als die Contraction selbst um so kleiner ausfällt, je grösser die Druckhöhe oder Ausflussgeschwindigkeit wird.

Durch die mittelst der Formel 7) berechneten Versuche ist gefunden, dass bei den Druckhöhen von 0,05 bis 0,85 Meter in Quecksilber, für Kreismündungen von 1 bis 2,4 Centimeter Durchmesser in der dünnen ebenen Wand, der dem Ausflusscoefficienten nahe gleichzusetzende Contractionscoefficient von

$$\mu = 0{,}555 \text{ allmählig bis } 0{,}787$$

wächst.

Bei Quecksilbermanometerständen von 0,25 bis 0,50 ergab sich ferner für eine Kreismündung von 1 Centimeter Durchmesser in der dünnen conischen convergenten Wand mit 100 Grad Convergenz:

$$\mu = 0{,}752 \text{ bis } 0{,}793,$$

dagegen für eine solche in der conisch divergenten Wand von 100 Grad Divergenz:

$$\mu = 0{,}509 \text{ bis } 0{,}663,$$

und dagegen unter gleichen Umständen für eine solche Mündung in der ebenen Wand:

$$\mu = 0{,}666 \text{ bis } 0{,}723.$$

Es hängt also hier, wie beim Ausfluss des Wassers, der Contractionscoefficient von dem Convergenzwinkel der Wand ab, worin die Mündung ausgeschnitten ist.

Die Versuche über den Ausfluss der Luft durch kurze cylindrische Ansatzröhren gaben mit den durch Mündungen in der dünnen Wand conforme Resultate; die Ausflusscoefficienten sind auch hier bei kleineren Drücken kleiner und bei grösseren grösser, ganz der Theorie entsprechend (siehe meine Ingenieur- und Maschinenmechanik, Band I, Seite 764, neue Auflage).

Kurze cylindrische Ansatzröhren von 1 bis 2,4 Centimeter Weite und der dreifachen Länge gaben bei den angegebenen Druckhöhen den Ausflusscoefficienten

$$\mu = 0{,}730 \text{ bis } 0{,}833.$$

Eine kurze cylindrische Röhre von 1 Centimeter Weite und 3 Centimeter Länge, inwendig mässig abgerundet, gab dagegen

$$\mu = 0{,}927.$$

Es wird also nicht blos beim Wasser, sondern auch bei der Luft der Eintritt in Röhren durch Abrundung der Einmündung sehr erleichtert.

Eine conisch convergente Röhre ohne Abrundung, deren Convergenzwinkel 2 Grad 7 Minuten betrug, und deren Durchmesser an der Ausmündung 1 Centimeter mass, gab

$$\mu = 0{,}910 \text{ bis } 0{,}964.$$

Die Versuche über die Bewegung der Luft durch lange Röhren weisen nach, dass der Coefficient $\zeta$ des Reibungswiderstandes der Luft in Röhren dem des Wassers nahe kommt, dass also derselbe nicht constant bleibt, sondern um so kleiner ausfällt, je grösser die mittlere Geschwindigkeit der Luft in der Röhre ist.

Eine Messingröhre von 1 Centimeter Weite und 2 Meter Länge gab für Geschwindigkeiten von 25 Meter bis 105 Meter den Reibungscoefficienten

$\zeta$ von 0,027258 allmälig abnehmend bis 0,014821.

Ebenso eine Glasröhre von derselben Weite und Länge,

$$\zeta = 0{,}027378 \text{ bis } 0{,}013898.$$

Ferner eine Messingröhre von 1,41 Centimeter Weite

$$\zeta = 0{,}025777 \text{ bis } 0{,}012137,$$

und eine dergleichen Glasröhre:

$$\zeta = 0{,}020626 \text{ bis } 0{,}009408.$$

Endlich eine Zinkröhre von 2,4 Centimeter Weite und 10 Meter Länge für Geschwindigkeiten von 25 bis 80 Meter

$$\zeta = 0{,}02302 \text{ bis } 0{,}012956.$$

Auch wurden noch mehrere Versuche über den Widerstand der Luft bei ihrem Durchgange durch Knie- und Kropfröhren angestellt.

Für eine Knieröhre von 1 Centimeter Weite (siehe Figur 84, Seite 151 der Experimentalhydraulik) ist hiernach

$$\zeta = 1{,}61,$$

und für eine solche von 1,41 Centimeter Weite

$$\zeta = 1{,}24.$$

Ferner für eine 1 Centimeter weite Kropfröhre von 90 Grad Ablenkung

$$\zeta = 0{,}485$$

und für eine solche von 1,4 Centimeter Weite

$$\zeta = 0{,}471.$$

Es sind hiernach diese Widerstandscoefficienten bei der Luft theils kleiner, theils grösser als beim Wasser.

---

## XI.

# Ueber die Berechnung der Steighöhe der Raketen.

Von EMIL KAHL, Leutnant.

---

Eine Rakete ohne Versetzung besteht, wie bekannt ist, gewöhnlich aus einer Hülse von Eisenblech oder Pappe, welche an dem einen Ende ganz geschlossen, am andern Ende wenigstens vor dem Einbringen des Treibsatzes ganz offen ist. Der Treibsatz, mit welchem die Hülse ausgeschlagen wird, ist immer ein feingepulvertes Gemenge von Salpeter, Schwefel und Holzkohle, entweder in den Verhältnissen, welche dem Schiesspulver entsprechen oder in davon abweichenden Verhältnissen. Die Hülse wird mit dem Treibsatz so ausgeschlagen, dass concentrisch um die Axe der Hülse eine conische oder cylindrische Oeffnung ungefüllt bleibt, welche vom offenen Ende an nicht bis an das geschlossene Ende reicht, so dass demnach vom geschlossenen Ende herein ein Theil der Hülse ganz mit Treibsatz gefüllt ist, von dessen Ende an nach der Vorderöffnung hin jedoch nur die Wände der Hülse dick mit Treibsatz bekleidet erscheinen. Der Stab, welcher die Stabilität der Lage der Rakete beim Aufsteigen sichern soll, ist ein cylindrischer oder prismatischer Holzstab, welcher gewöhnlich so an die Hülse befestigt wird, dass seine Längeaxe derjenigen der Hülse parallel ist, dass er über ihr geschlossenes Ende nicht hervorsteht, während er umgekehrt das offene Ende um Bedeutendes überragt. Behufs des senkrechten Aufsteigens wird die Rakete in ein Gestell gebracht, wobei der Stab in eine mehr oder minder einfach construirte Führung eingelegt wird, welche dem Stabe beim Aufsteigen die erforderliche Richtung aufwärts ertheilt. Die treibende Kraft, durch welche die Rakete zum Steigen kommt, verdankt sie bekanntlich der Reaction, welche mit dem aus der untern Oeffnung nach der Entzündung des Treibsatzes ausströmenden Pulvergase in Verbindung steht und in einem der Hülsenaxe parallelen nach oben gerichteten Drucke besteht. Der angegebenen Construction zufolge verbrennt anfänglich eine grössere Treibsatzmenge, als in den späteren Momenten der Verbrennung, so dass die treibende Kraft vom Anfange der Verbrennung an bis gegen das Ende derselben hin im Allgemeinen im Abnehmen sein muss. Die treibende Kraft einer Rakete wird demnach eine Function der Zeit sein, deren Natur von der Construction der Rakete und von der Art des angewendeten Treibsatzes abhängig sein

muss. Welche Function der Zeit die treibende Kraft der Rakete, sowie die Menge des nach einer gewissen Zeit verbrannten Treibsatzes in einzelnen Fällen sei, ist durch genaue Versuche bis jetzt noch nicht ermittelt worden, sollte dies jedoch für einzelne Raketenconstructionen geschehen, so würde man hierauf im Stande sein, die Steighöhe der Rakete beim senkrechten Aufsteigen im lufterfüllten Raume zu berechnen, vorausgesetzt, dass die Rakete eine solche Construction erhalten habe, dass die Aenderung der Lage ihres Schwerpunktes, welche beim Aufsteigen der Rakete in Folge der Satzverbrennung stattfindet, keinen Einfluss auf die Steigrichtung ausübt. Dies könnte vielleicht auf ähnliche Art wie bei den englischen Kriegsraketen geschehen, bei denen die Axe des Stabes mit der Axe der Hülse zusammenfällt. Die angedeutete Berechnung hängt von der Auflösung folgender Aufgabe ab:

Es ist das Gewicht $p$ der senkrecht aufsteigenden Rakete gegeben, ferner ist durch Versuche die treibende Kraft $\varphi(t)$ als Funktion der Zeit, sowie die Menge $\psi(t)$ des nach der Zeit $t$ verbrannten Treibsatzes bestimmt worden (s. Anm. 1). Es wird angenommen, dass der Luftwiderstand $a + bv + cv^2$ sei, wobei $v$ die Geschwindigkeit am Ende der Zeit $t$ bedeutet (s. Anm. 2). Es soll hieraus die senkrechte Erhebung $y$ berechnet werden, welche ein beliebiger Punkt der Rakete am Ende der Zeit $t$ über dem Fussboden erreicht hat.

Da am Ende der Zeit $t$ die Masse der Rakete

$$\frac{p - \psi(t)}{g}$$

ist, sowie die Kraft, welche dieselbe aufwärts treibt:

$$\varphi(t) - p - a - bv - cv^2,$$

so ist die Differentialgleichung der Bewegung:

$$\text{A)} \qquad \frac{p - \psi(t)}{g} \frac{d^2 y}{dt^2} = \varphi(t) - p - a - b\frac{dy}{dt} - c\left(\frac{dy}{dt}\right)^2.$$

Anmerkung 1. Die Auffindung der Functionen $\varphi$ und $\psi$ durch den Versuch ist wegen der kurzen Brennzeit einer Rakete sehr schwierig, aber jedenfalls nicht unmöglich. Man könnte sich von der Bestimmung der genannten Funktionen folgende Vorstellung machen, über welche ich jedoch ganz besonders bemerke, dass es eben nur eine Vorstellung ist, welche keineswegs durch irgend einen Versuch geprüft, noch irgendwie für practische Ausführung bestimmt ist.

Die Hülse der Rakete wird central in einem Blocke befestigt, welcher sich auf vollkommen horizontaler Ebene in einer Führung bewegen kann. Die Hülse wird den Block nach ihrer Entzündung fortbewegen, wobei die Bewegung wegen der Masse des Blockes und des geringen Restes von Reibung, welcher vermittelst Schnuren und Rollen durch Gegenwichte nicht ganz ausgeglichen ist, weit langsamer, als beim Aufsteigen vor sich gehen wird. Hierbei könnte die Curve $s = \Psi(t)$, welche den Abstand $s$

des Blockes von der Anfangslage angiebt, vielleicht durch den Apparat selbst aufgezeichnet werden. Ist nun das Gewicht der zu bewegenden Masse $P$, die Reibung $R$, so ist die Beschleunigung der von der Rakete bewegten Masse:

$$\frac{\varphi(t) - R}{P - \psi(t)} g.$$

Die Grösse dieser Beschleunigung würde man aus der vom Apparat aufgezeichneten Bewegungscurve $s = \Psi(t)$ finden, denn es ist:

$$1) \quad \frac{\varphi(t) - R}{P - \psi(t)} g = \frac{d^2 s}{dt^2} = \Psi''(t).$$

Ist bei einem zweiten Versuche die zu bewegende Masse $\frac{P_1}{g}$, die Reibung $R_1$, wobei der Apparat die Curve $s_1 = \Psi_1''(t)$ zeichnen möge, so erhält man:

$$2) \quad \frac{\varphi(t) - R_1}{P_1 - \psi(t)} g = \frac{d^2 s}{dt^2} = \Psi_1''(t)$$

Aus den Gleichungen 1) und 2), in denen $P$, $P_1$, $R$, $R_1$, völlig bekannte Grössen, $\Psi''(t)$, $\Psi_1''(t)$ aus der Zeichnung des Apparates hervorgegangene Functionen sind, lassen sich um $\varphi(t)$ und $\psi(t)$ bestimmen. — Die Bestimmung von $\psi(t)$ und $\varphi(t)$ dürfte wohl auf dem Versuchswege am Besten gelingen, sobald man einen rotirenden Apparat durch die Raketenhülse in Bewegung setzt.

Anmerkung 2. Es ist hier das Luftwiderstandsgesetz $a + bv + cv^2$ seiner Allgemeinheit wegen gewählt worden, in den nachfolgenden Rechnungen kann es doch immer auf das quadratische zurückgeführt werden, indem man $a = 0$, $b = 0$ setzt. Es wäre übrigens wohl möglich, dass im vorliegenden Falle Versuche dahin entscheiden könnten, dass man das Gesetz $a + bv + cv^2$ auch hier acceptirte, da es z. B. die Hutton'schen Versuchsresultate an zweizölligen Kugeln von 500′ bis 2000′ Geschwindigkeit sehr gut repräsentirte. Das vorliegende Gesetz kann übrigens für kleine Geschwindigkeiten nicht ganz richtige Resultate geben, da nach demselben z. B. für $v = 0$ der Luftwiderstand $a$ ist. Dies dürfte übrigens hier um so weniger schaden, als doch anfänglich die Führung der Rakete einen geringen Reibungswiderstand veranlasst.

Die Gleichung A) lässt sich zunächst in die Form bringen:

$$3) \quad \frac{p - \psi(t)}{cg} \cdot \frac{d^2 y}{dt^2} + \frac{1}{c}[a + p - \varphi(t)] + \frac{b}{c}\frac{dy}{dt} + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 = 0.$$

Setzt man zur Abkürzung:

$$4) \quad \frac{p - \psi(t)}{cg} = T, \frac{1}{c}[a + p - \varphi(t)] = T_1,$$

so erscheint die Bewegungsgleichung in folgender Gestalt:

$$T\frac{d^2 y}{dt^2} + \frac{b}{c}\frac{dy}{dt} + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + T_1 = 0$$

oder:

$$\text{I)} \qquad T\frac{dy'}{dt} + \frac{b}{c}\,y' + y'^2 + T_1 = 0.$$

Die vorstehende Gleichung kann durch die Substitution:

$$5) \qquad y' = \frac{\frac{dz}{dx}}{z}\,T = \frac{z'}{z}\,T$$

in eine lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung umgewandelt werden. Die Differentiation von 5), in welcher $z$ eine neue abhängige Variable bedeutet, ergiebt:

$$6) \qquad \frac{dy'}{dt} = -\frac{z'^2}{z^2}\,T + \frac{z''}{z}\,T + \frac{z'}{z}\,T'.$$

Führt man 5) und 6) in I) ein, so ergiebt sich hieraus:

$$\text{II)} \qquad z'' + \frac{\frac{b}{c} + T'}{T}\,z' + \frac{T_1}{T^2}\,z = 0.$$

Das Integral von II) hat bekanntlich die Form $z = Mu + Nv$, wobei $M$ und $N$ willkührliche Constante, $u$ und $v$ die particulären Integrale der der Gleichung II) sind, demnach ist die Form von $y'$:

$$y' = \frac{Mu' + Nv'}{Mu + Nv}\,T = \frac{u' + \frac{N}{M}v'}{u + \frac{N}{M}v}\,T,$$

oder, wenn man $\frac{N}{M} = Q$ setzt:

$$7) \qquad y' = \frac{u' + Qv'}{u + Qv}\,T.$$

Man erkennt sofort, dass $y'$ das allgemeine Integral der Gleichung I) ist, denn sein Ausdruck enthält eine willkührliche Constante $Q$, man würde dies übrigens auch finden, indem man 7) in I) einsetzt, welche dadurch zu Null gemacht wird, indem, wie vorausgesetzt wurde, $u$ und $v$ der Gleichung II) Genüge leisten. Der Ausdruck für die Ordinate $y$ ist nun hiernach:

$$\text{III)} \qquad y = P + \int \frac{\frac{du}{dt} + Q\frac{dv}{dt}}{u + Qv}\,T\,.\,dt,$$

wobei $P$ eine zweite willkührliche Constante und $u$ und $v$ die particulären Integrale der Gleichung II) sind.

Durch die Gleichung III) ist nun allerdings der Function von der Zeit $t$ die allgemeine Form vorgezeichnet, welche die Erhebung $y$ vom Fussboden angiebt, etwas Weiteres lässt sich aber auch überhaupt nicht thun, so lange die treibende Kraft $\varphi(t)$ und die Menge des verbrannten Treibsatzes $\psi(t)$ nicht durch den Versuch ausgemittelt ist und die Constanten $a$, $b$, $c$, $p$, $g$, wie sie sich für irgend einen speciellen Fall ergeben haben,

numerisch in die erste Differentialgleichung eingeführt worden sind. Ist dies aber geschehen, so ist in Gleichung I) $T$, $T_1$ und $\frac{b}{c}$ vollkommen bestimmt und die Integrationen, welche auf Gleichung III) führen, lassen sich wegen der linearen Form von II) jederzeit für eine etwaige numerische Berechnung ausführen.

Beispiel.

Eine Rakete lässt sich auch dann noch zum Steigen bringen, wenn ihre Hülse vollständig mit einem Satze ausgeschlagen wird, welcher hinlängliche treibende Kraft besitzt. In diesem Falle verbrennen, wie der Versuch lehrt, in gleichen Zeiten Satzcylinder von gleicher Länge, oder, anders ausgedrückt, die Längen der verbrannten Satzcylinder verhalten sich, wie die zur Verbrennung erforderlich gewesenen Zeiten. Man hat in diesem so eben in Betrachtung gezogenen Falle hinreichenden Grund, anzunehmen, dass die treibende Kraft der Rakete constant sei, sie ist im Nachfolgenden mit $k$ bezeichnet worden. Nennt man die Satzmenge, welche in der Zeiteinheit verbrennt, $q$, so ist die am Ende der Zeit $t$ verbrannte Satzmenge $q\,t$, oder der früheren Bezeichnung gemäss: $\psi(t) = q\,t$. Führt man diesen Werth und den Ausdruck $\varphi(t) = k$ in die Gleichung 3) ein, so erhält man als Differentialgleichung der Bewegung:

$$8)\qquad \frac{p-q\,t}{c\,g}\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{a+p-k}{c} + \frac{b}{c}\frac{dy}{dt} + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 = 0.$$

Vergleicht man diese Gleichung mit der allgemeinen Gleichung I), so findet man, dass im vorliegenden speciellen Falle

$$T = \frac{p-q\,t}{cg} \qquad T_1 = \frac{a+p-k}{c}$$

ist. Macht man nun der Gleichung 5) entsprechend die Substitution:

$$y' = \frac{z'}{z}\cdot\frac{p-q\,t}{c\,g},$$

so erhält man folgende No. II) entsprechende lineare Gleichung:

$$10)\qquad z'' + \frac{b\,g-q}{p-q\,t}z' + \frac{c\,g^2(a+p-k)}{(p-q\,t)^2}z = 0.$$

Die eigenthümliche Form dieser Gleichung führt leicht auf die Idee, die Substitution:

$$z = (p-q\,t)^\alpha$$

zu versuchen, wodurch man erhält:

$$11)\qquad \alpha(\alpha-1)q^2 - (b\,g-q)\,\alpha\,q + c\,g^2(a+p-k) = 0.$$

Dieser Gleichung wird durch die beiden Werthe von $\alpha$

$$12)\qquad \begin{cases} \alpha_1 = \frac{b\,g}{2q} + \sqrt{\frac{b^2g^2}{4q^2} - \frac{c\,g^2(a+p-k)}{q^2}} \\ \alpha_2 = \frac{b\,g}{2q} + \sqrt{\frac{b^2g^2}{4q^2} - \frac{c\,g^2(a+p-k)}{q^2}} \end{cases}$$

Genüge leistet.

Diese Ausdrücke sind stets reell, da in dem Ausdrucke des Luftwiderstandes $a$ eine sehr kleine Grösse ist, da ferner $k$ beträchtlich grösser, als $p$ sein muss, folglich das Glied: $-\frac{c g^2 (a + p - k)}{q^2}$ positiv ist. Der der Gleichung 7) entsprechende Ausdruck giebt demnach für $y'$:

$$13)\quad y' = -q \cdot \frac{\alpha_1 (p - q t)^{\alpha_1 - 1} + Q \alpha_2 (p - q t)^{\alpha_2 - 1}}{\alpha_1 (p - q t)^{\alpha_1} + Q (p - q t)^{\alpha_2}} \cdot \frac{p - q t}{c g},$$

man erhält sonach für $y$:

$$14)\quad y = P - \frac{q}{c g} \int \frac{\alpha_1 (p - q t)^{\alpha_1} + Q \alpha_2 (p - q t)^{\alpha_2}}{(p - q t)^{\alpha_1} + Q (p - q t)^{\alpha_2}} d t,$$

in welchem Ausdrucke $P$ und $Q$ die willkührlichen Constanten sind, während $\alpha_1$ und $\alpha_2$ an die Gleichungen 12) gebunden sind. Die Integration in Gleichung 14) lässt sich bei numerischen Rechnungen jederzeit durch Reihen ausführen, zumal, da man die Constante $Q$ bereits aus Gleichung 13) bestimmen und somit bei der Integration von 14) über ihren Werth nicht in Zweifel sein kann.

---

# Kleinere Mittheilungen.

---

**XVIII. Zur Axonometrie.** Von FRIEDRICH MANN, Professor an der Thurg. Kantonsschule. 1) Die Axonometrie umfasst bekanntlich zwei Hauptaufgaben:

*a*) Die Winkel, welche eine vom Ursprung des rechtwinkligen Coordinatensystems auf die Bildebene gefällte Senkrechte mit den Coordinatenaxen bildet, so zu bestimmen, dass die Sinus (Verkürzungsverhältnisse) sich zu einander verhalten wie drei gegebene Zahlen $m$, $n$ und $p$ (Reductionscoefficienten.

*b*) Das Coordinatensystem auf diese Bildebene zu projiciren.

Weissbach und Schlömilch lieferten zuerst auf analytisch trigonometrischem Wege das Material, das zur allgemeinen Lösung dieser beiden Aufgaben verwendet werden konnte; und ersterer hat in jüngster Zeit im Anhang I. seines Werkes auch eine algebraisch geometrische Begründung gegeben. Largiadèr stützt sich in seiner soeben erschienenen Schrift auf den Satz: „dass in demjenigen rechtwinkligen Parallelepiped, dessen im Ursprung $O$ zusammenstossende Kanten der Richtung nach in die Coordinatenaxen fallen und dessen Hauptdiagonale die von $O$ auf die

Bildebene gefällte Senkrechte ist, — dass in diesem Parallelepiped sich die Seitendiagonalen zu einander verhalten müssen wie die Reductionscoefficienten $m$, $n$ und $p$."

In nachstehender Entwickelung soll nur gezeigt werden, wie die Lösung der axonometrischen Probleme auch noch aus ganz anderen Eigenschaften des rechtwinkeligen Parallelepipeds hervorgeholt werden kann.

2) In Fig. 1, Taf. III sei $OO_1$ irgend ein rechtwinkeliges Parallelepiped, dessen Hauptdiagonale wir in Bezug auf Länge durch $d$ bezeichnen wollen. Die Seitendiagonalen können wir dann offenbar so herstellen, dass alle drei vom einen Endpunkt $O_1$ der Hauptdiagonale ausgehen. Verbinden wir die Endpunkte der so erhaltenen Linien $O_1A$, $O_1B$ und $O_1C$ paarweise durch Gerade, so erhalten wir ein spitzwinkeliges Dreieck $ABC$, dessen Seiten der Länge nach wieder die Seitendiagonalen unseres Parallelepipeds sind. Bezeichnen wir die Längen dieser Seitendiagonalen durch $d_1$ $d_2$ und $d_3$, so können wir den Satz aufstellen:

I) $d_1$ $d_2$ und $d_3$ müssen stets mögliche Seiten eines spitzwinkeligen Dreiecks sein.

Nennen wir die Winkel, welche die Hauptdiagonale $OO_1$ mit den Kanten $OA$, $OB$ und $OC$ bildet, beziehungsweise $\alpha$, $\beta$ und $\gamma$, so ist in den rechtwinkeligen Dreiecken $OO_1A$, $OO_1B$ und $OO_1C$ offenbar:

$$\text{II)}\quad \begin{cases} d_1 = d \sin\alpha,\ d_2 = d \sin\beta,\ d_3 = d \sin\gamma, \\ \text{also} \\ d_1 : d_2 : d_3 = \sin\alpha : \sin\beta : \sin\gamma. \end{cases}$$

Errichten wir in $O_1$ eine Ebene $E$ senkrecht auf $OO_1$ und legen wir durch $OO_1$ und $O_1A$ eine Ebene $M$, so steht $M$ offenbar senkrecht auf $E$. Die von $A$ auf $E$ senkrecht gefällte Gerade $AA_1$ muss daher vollständig in $M$ bleiben; und durch das Verbinden des Fusspunktes $A_1$ mit $O_1$ gewinnt man ein rechtwinkeliges Dreieck $AA_1O_1$. Jeder der Winkel $AO_1A_1$ und $O_1OA$ ergänzt nun den einen Winkel $OO_1A$ zu einem rechten, und es ist somit:

$$\text{Winkel } AO_1A_1 = \text{Winkel } \alpha.$$

Bezeichnen wir daher den Abstand $AA_1$ des Punktes $A$ von der Ebene $E$ durch $a_1$, so ist: $a_1 = d_1 \sin\alpha$. Durch ganz ähnliche Betrachtungen erhalten wir, wenn wir die Abstände der Punkte $B$ und $C$ von $E$ beziehungsweise $a_2$ und $a_3$ nennen:

$$a_2 = d_2 \sin\beta \text{ und } a_3 = d_3 \sin\gamma.$$

Substitutionen wie die für $d_1$ $d_2$ und $d_3$ in II) gefundenen Werthe, so gewinnen wir:

$$\text{III)}\quad \begin{cases} a_1 = d\,.\,\sin^2\alpha,\ a_2 = d\,.\,\sin^2\beta \text{ und } a_3 = d\,.\,\sin^2\gamma, \\ \text{also} \\ a_1 : a_2 : a_3 = \sin^2\alpha : \sin^2\beta : \sin^2\gamma. \end{cases}$$

Beachten wir die Relationen II) und III), so erkennen wir augenblicklich, dass

IV) $d:d_1 = d_1:a_1, \; d:d_2 = d_2:a_2, \; d:d_3 = d_3:a_3,$

dass mithin jede von $O_1$ ausgehende Seitendiagonale die mittlere geometrische Proportionale zwischen der Hauptdiagonale und dem Abstande des Endpunktes jener Seitendiagonale von der Ebene $E$ vorstellt.

Durch Addition der drei ersten Gleichungen in III) erhalten wir:

$$a_1 + a_2 + a_3 = d\,(\sin^2\alpha + \sin^2\beta + \sin^2\gamma).$$

Nun ist bekanntlich

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1,$$

mithin

V) $$\sin^2\alpha + \sin^2\beta + \sin^2\gamma = 2,$$

also

$$a_1 + a_2 + a_3 = 2\,d.$$

Wenn man daher die Abstände, welche die Endpunkte der drei von $O_1$ ausgehenden Seitendiagonalen in Bezug auf die Ebene $E$ darbieten, zusammenaddirt, so erhält man das Doppelte der Hauptdiagonale.

Diese Sätze bilden nun den stereometrischen Hülfsapparat, der zu einer höchst einfachen Lösung der Aufgabe $a$ verwendet werden kann.

3) Nehmen wir die Ebene $E$ als Bildebene und lassen wir die Coordinatenaxen längs $OC$, $OB$ und $OA$ fallen, so kommt alles darauf an, die Winkel $\alpha$, $\beta$ und $\gamma$ so zu bestimmen, dass

$$\sin\alpha : \sin\beta : \sin\gamma = m:n:p$$

stattfindet.

Halten wir aber diese Bedingung zusammen mit den Relationen in II) und III), so gewinnen wir augenblicklich:

$$d_1 : d_2 : d_3 = m:n:p\text{*)}$$

und

$$a_1 : a_2 : a_3 = m^2 : n^2 : p^2.$$

Soll die Aufgabe möglich sein, so dürfen die Zahlen $m$, $n$ und $p$ nicht beliebig gewählt werden, sie müssen vielmehr (nach I) als Zahlenwerthe von Dreiecksseiten aufgefasst, stets zu einem spitzwinkeligen Dreieck führen. Hat man sich, innerhalb dieser Bedingung, für die Reductionscoefficienten entschieden und stellt man drei Längen her, welche eine beliebig gewählte Längeneinheit beziehungsweise $m^2$, $n^2$ und $p^2$ mal enthalten, so können die so gewonnenen Linien als die Abstände $a_1$ $a_2$ und $a_3$ gelten. Man darf hierbei nur bedenken, dass es bei der Gewinnung der Winkelgrössen $\alpha$, $\beta$ und $\gamma$ nicht darauf ankommt, die absoluten Längen der unsere stereometrische Figur bestimmenden Linien festzuhalten, sondern dass es zu diesem Zwecke vollständig genügt, die Verhältnisse dieser Längen

*) Hierin liegt offenbar eine zweite Begründung des von Largiadèr benützten Satzes, der indess bei unserer Construction gar nicht angewendet wird.

zu wahren. Stellt man sich die halbe Summe der Abstände $a_1$ $a_2$ und $a_3$ her, so hat man (nach V) das $d$. Aus $a_1$ und $d$ gewinnt man aber $d_1$, indem man (siehe IV) die mittlere geometrische Proportionale sucht. Ist diese gefunden, so hat man den Winkel $\alpha$ zweimal. Erstens tritt er in dem durch $d$ und $d_1$ bestimmten rechtwinkeligen Dreieck auf und zwar gegenüber der Kathete $d_1$. Zweitens erscheint er aber auch schon in dem rechtwinkeligen Dreieck, das $d_1$ zur Hypotenuse und $a_1$ zur Kathete hat und zwar gegenüberstehend dieser letzteren.

Setzt man beziehungsweise $a_2$ und $a_3$ an die Stelle von $a_1$ und führt im Uebrigen die Construction in völlig gleicher Weise aus, so gelangt man zu den Winkeln $\beta$ und $\gamma$.

4) Der Figur, die bei Construction des Winkels $\alpha$ entstand, kann unmittelbar auch eine Formel für $\sin\alpha$ abgewonnen werden. Offenbar ist:

$$\sin\alpha = \frac{d_1}{d},$$

also

$$\sin^2\alpha = \frac{d_1^2}{d^2} = \frac{a_1 \,.\, d}{d^2} = \frac{a_1}{d} = \frac{2\,m^2}{m^2+n^2+p^2};$$

oder auch:

$$\sin\alpha = \frac{a_1}{d_1},$$

also

$$\sin^2\alpha = \frac{a_1^2}{d_1^2} = \frac{a_1^2}{a_1 \,.\, d} = \frac{a_1}{d} = \frac{2\,m^2}{m^2+n^2+p^2};$$

was mit den Endresultaten der Weisbach'schen Entwickelung vollständig übereinstimmt.

In den Sätzen, die wir unter 2) über das rechtwinkelige Parallelepiped entwickelten, liegen auch die Mittel, die Aufgabe $b$ (die zweite Hauptaufgabe der Axonometrie graphisch zu lösen. Um dies einzusehen, genügt ein Blick in die Figur.

5) Wir gehen nun an die Lösung der zweiten axonometrischen Hauptaufgabe, nämlich an die Herstellung der Projection des Axensystems auf einer Bildebene, der als Verhältnisszahlen der Verkürzungsverhältnisse die ganzen Zahlen $m$, $n$ und $q$ entsprechen. Nehmen wir die drei in $O$ zusammenstossenden Kanten $OA$, $OB$ und $OC$ des rechtwinkeligen Parallelepipeds $OO_1$ als Coordinatenaxen, so ist, wenn das Parallelepiped gemäss der Bedingung

$$\sin\alpha : \sin\beta : \sin\gamma = m : n : q$$

hergestellt ist, die in $O_1$ auf $OO_1$ errichtete Ebene $E$ die verlangte Bildebene. Es handelt sich lediglich darum, die Pyramide $ABCO$ auf $E$ zu projiciren. Nun ist leicht einzusehen, dass $A_1B_1$ (nämlich die Projection der Dreiecksseite $AB$ auf $E$) der Länge nach Kathete eines rechtwinkeligen Dreiecks ist, das $AB = O_1C = d_3$ zur Hypotenuse und $BB_1 - AA_1 = a_2 - a_1$ zur

anderen Kathete hat. Wie man aber $a_1$, $a_2$ und $d_2$ aus $m$, $n$ und $q$ herstellen kann, ist schon bei der Construction der Winkel $\alpha$, $\beta$ und $\gamma$ gezeigt worden. In ganz ähnlicher Weise gelangt man zu den Längen der Linien $A_1 C_1$ und $B_1 C_1$, nämlich zu den Projectionen der Dreiecksseiten $AC$ und $BC$. Stellt man irgendwo in der Papierebene aus den Seiten $A_1 B_1$, $A_1 C_1$ und $B_1 C_1$ ein Dreieck her, so hat man schon die Projection der Pyramidenbasis $ABC$ und es handelt sich dann nur noch um die Gewinnung von $O_1$, nämlich der Projection der Spitze. $O_1$ könnte im Innern des Dreiecks $A_1 B_1 C_1$ mittelst einiger Kreisbögen gefunden werden, wenn man zwei von den Längen $A_1 O_1$, $B_1 O_1$, $C_1 O_1$ hätte. Ein Blick in die Figur überzeugt uns aber, dass wir diese drei Längen schon haben, und zwar in derjenigen Figur, die wir entwerfen mussten, um die erste axonometrische Grundaufgabe zu lösen. Denn $A_1 O_1$ z. B. ist nichts anderes, als die eine Kathete eines rechtwinkeligen Dreiecks, in welchem $O_1 A = d_1$ Hypotenuse und $AA_1 = a_1$ die andere Kathete ist. Hat man, gestützt auf obige Bemerkungen, die Punkte $O_1$, $A_1$, $B_1$ in $C_1$ gefunden, so darf man nur den ersten derselben mit den drei letzten verbinden, um das projicirte Axensystem zu haben.

6) Ein junger Fachgenosse (Herr Graberg in Zürich), der sich bei seinen Arbeiten der geschilderten Methode bediente, hatte die Güte, mir vom Standpunkte des Zeichners aus folgende Modificationen vorzuschlagen.

$a$) Wenn man vom Punkte $O_1$ ausgeht (d. h. denselben in der Papierebene beliebig annimmt) und dann erst die Punkte $A_1 B_1 C_1$ zu demselben bestimmt, so gewinnt man den zweifachen Vortheil, dass man von den Seiten des Dreiecks $A_1 B_1 C_1$ nur zwei durch Construction zu bestimmen braucht, (die drei Längen $O_1 A_1$, $O_1 B_1$ und $O_1 C_1$ können ja unmittelbar einer schon früher entworfenen Figur entnommen werden) und dass man die eine der drei Axenprojectionen $O_1 A_1$, $O_1 B_1$ und $O_1 C_1$ der Richtung nach beliebig wählen kann. Namentlich letzterer Vortheil ist für den Zeichner gar nicht unerheblich.

$b$) Es ist $(A_1 B_1)^2 = d_2^2 - (a_2 - a_1)^2$. Bezeichnen wir $a_2 - a_1$ durch $u$, so können wir auch schreiben: $(A_1 B_1)^2 = (d_2 + u)(d_2 - u)$. Die Seite $A_1 B_1$ des Dreiecks $A_1 B_1 C_1$ ist mithin mittlere geometrische Proportionale zu den Längen $d_2 + u$ und $d_2 - u$. Eine beträchtliche Vereinfachung der zur Auffindung der Seite $A_1 B_1$ erforderlichen Construction tritt nun ein, wenn man sich bei der Herstellung der mittleren Proportionalen einer vom gewöhnlichen Verfahren abweichenden Constructionsweise bedient, welche, wenn wir nicht irren, durch Professor Gautier in Lausanne vorgeschlagen worden ist.*) Dieses Verfahren, aus zwei Längen $r$ und $s$ die mittlere geometrische Proportionale zu finden, besteht in Folgendem (Fig. 2, Taf. III): Man trage die kleinere ($s$ etwa) auf irgend einer Geraden auf,

*) Dasselbe findet sich bereits in der ersten Auflage des bekannten und sehr schätzenswerthen Lehrbuchs der Geometrie von Professor Dr. Kunze (Jena 1842) S. 176, §. 152. Anmerk. d. Red.

so dass $MN = s$ wird, durchschneide dann diese Gerade mit einem Radius $= r$ von $M$ aus nach $N$ hin und von $N$ aus nach $M$ hin, wodurch etwa die Punkte $P$ und $Q$ zum Vorschein kommen mögen. Sucht man dann die Spitze eines gleichschenkeligen Dreiecks, das $PQ$ zur Grundlinie und $r$ zur Schenkellänge hat und verbindet diese Spitze $T$ mit einem der Punkte $M$, $N$, so stellt die so gewonnene Verbindungslinie die mittlere geometrische Proportionale zwischen $r$ und $s$ dar. Der Beweis springt sofort in die Augen, wenn man von $T$ aus eine Senkrechte auf $MN$ fällt.

7) Bevor wir das Verfahren in allen seinen Einzelheiten kurz vorführen, das bei der Lösung der beiden axonometrischen Hauptaufgaben einzuschlagen ist, wollen wir einige Bezeichnungen einführen, nämlich:

$$A_1 B_1 = p_1, \; A_1 C_1 = p_2 \text{ und } B_1 C_1 = p_3;$$

ferner:

$$O_1 A_1 = k_1, \; O_1 B_1 = k_2 \text{ und } O_1 C_1 = k_3;$$

endlich:

$$a_2 - a_1 = u_1, \; a_3 - a_1 = u_2 \text{ und } a_3 - a_2 = u_3.$$

Beschreibt man über der Hauptdiagonale $d = \frac{1}{2}(m^2 + n^2 + q^2)$ einen Halbkreis, trägt man auf derselben vom einen Endpunkte aus die Längen $a_1$, $a_2$ und $a_3$ (nämlich $m^2$, $n^2$ und $q^2$) auf, und errichtet in den so gewonnenen Auftragungspunkten Senkrechte bis zum Kreisumfang hin, so sind dieselben nichts anderes, als $k_1$, $k_2$ und $k_3$. (Fig. 3, Taf. III.) Verbindet man die oberen Endpunkte dieser senkrechten mit dem vorhin erwähnten Endpunkt der Hauptdiagonale, so hat man die Seitendiagonalen $d_1$, $d_2$ und $d_3$. Durch das Abtragen der Stücke $a_1$, $a_2$ und $a_3$ sind ganz von selbst die Längen $u_1$, $u_2$ und $u_3$ zum Vorschein gekommen und es ist nun leicht, die Längen $d_1 + u_3$, $d_1 - u_3$, $d_2 + u_2$, $d_2 - u_2$ herzustellen und nach dem in 2 . $b$ geschilderten Verfahren zwischen den beiden ersten und dann auch zwischen den beiden letzten Längen die mittlere geometrische Proportionale aufzusuchen. Diese Proportionalen sind dann $p_3$ und $p_2$. Nun nehme man in der Papierebene den Punkt $O_1$, sowie die Richtung $O_1 Z_1$ der einen projicirten Axe beliebig an, und schneide von $O_1 u$ auf $O_1 Z_1$ das Stück $k_3$ ab, so erhält man $C_3$. Indem man dann von $C_3$ mit einem Radius $= p_2$ und von $O_1$ mit einem Radius $= k_1$ Bögen beschreibt, gewinnt man $A_1$; und $B_1$ kommt zum Vorschein, indem man in ganz gleicher Weise von den Punkten $C_3$ und $O_1$ aus mit den Längen $p_3$ und $k_2$ operirt. In dem Umstande, dass dann $A_1 B_1 = p_1$ werden muss, liegt eine Probe für die Richtigkeit der Zeichnung.

8) Wir wollen nun noch, gestützt auf unsere Constructionsweise, die Formeln für die Axenwinkel entwickeln.

Bezeichnen wir den Winkel $A_1 O_1 B_1$ durch $\varphi$, so ist im Dreieck $A_1 O_1 B_1$:

$$\cos \varphi = \frac{k_1^2 + k_2^2 - p_1^2}{2 k_1 . k_2}.$$

Da nun

$$k_1^2 = d_1^2 - a_1^2 = a_1 d - a_1^2;$$
$$k_2^2 = d_2^2 - a_2^2 = a_2 d - a_2^2;$$

und

$$p_1^2 = d_3^2 - (a_2 - a_1)^2 = a_3 d - a_2^2 + 2 a_1 a_2 + a_1^2,$$

so erhalten wir:

$$\cos\varphi = \frac{d(a_1 + a_2 - a_3) - 2 a_1 a_2}{2\sqrt{a_1 a_2 (d - a_1)(d - a_2)}}.$$

Beseitigen wir nun $a_3$, indem wir für dasselbe $2d - a_1 - a_2$ einsetzen,

$$\cos\varphi = -\frac{2[d^2 - (a_1 + a_1) d + a_1 a_2]}{2\sqrt{a_1 a_2 (d - a_1)(d - a_2)}}$$
$$= -\frac{(d - a_1)(d - a_2)}{\sqrt{a_1 a_2 (d - a_1)(d - a_2)}}$$
$$= -\sqrt{\frac{(d - a_1)(d - a_2)}{a_1 a_2}}.$$

Bedenken wir nun, dass:

$$d = \tfrac{1}{2}(m^2 + n^2 + q^2),$$
$$a_1 = m^2,\ a_2 = n^2 \text{ und } a_3 = q^2$$

ist, so erhalten wir:

$$\cos\varphi = -\frac{1}{2mn}\sqrt{(n^2 + q^2 - m^2)(m^2 + q^2 - n^2)}.$$

9) Legt man beim rechtwinkeligen Parallelepiped $O O_1$ durch $O$ eine Ebene $E_1$ senkrecht zur Hauptdiagonale, und setzt die Senkrechten $A A_1$, $B B_1$ und $C C_1$ rückwärts fort, bis sie Ebene $E_1$ in den Punkten $A_2$, $B_2$ und $C_2$ treffen, so überzeugt man sich leicht, dass die Summe dieser neuen Abstände $A A_2$, $B B_2$ und $C C_2$ gleich der einfachen Hauptdiagonale $O O_1$ sein muss. Denn: $A_1 A_2 + B_1 B_2 + C_1 C_2 = 3 . O O_1$ und $A A_1 + B B_1 + C C_1 = 2 . O O_1$.

10) Das gleiche Resultat hätten wir auch noch auf folgende Weise finden können: Denkt man sich $OA$, $OB$ und $OC$ seien der Grösse und Richtung nach drei in $O$ angreifende Kräfte, so ist $O O_1$ deren Resultirende. Zerlegt man jede der drei erstgenannten Kräfte in zwei Seitenkräfte, von denen die eine in $O O_1$ die andere in Ebene $E_1$ fällt, so muss einem bekannten Satze der Statik gemäss die Summe der drei längs $O O_1$ fallenden Seitenkräfte gleich der Resultirenden $O O_1$ sein. Diese drei Seitenkräfte sind aber in Bezug auf Grösse auch durch die Abstände $A A_2$, $B B_2$ und $C C_2$ ausgedrückt.

11) $O A_2$, $O B_2$ und $O C_2$ stellen offenbar die bei jener Zerlegung in die Ebene $E_1$ fallenden Seitenkräfte vor, und diese müssen, wie die Mechanik lehrt, unter einander im Gleichgewichte stehen. Fassen wir daher die Kräfte $O A_2$ und $O B_2$ mittelst des Parallelogramms der Kräfte zusammen, so muss die zum Vorschein kommende Resultirende mit $O C_2$ in eine und

dieselbe Gerade fallen, woraus hervorgeht, dass die Verlängerung von $OC_2$ genau in der Mitte der Geraden $A_2 B_2$ eintrifft. Ganz so lässt sich zeigen, dass auch die Verlängerungen von $O A_2$ und $O B_2$ beziehungsweise durch durch die Mitten der Geraden $B_2 C_2$ und $A_2 C_2$ gehen. Der Punkt $O$ ist mithin der Schwerpunkt des Dreiecks $A_2 B_2 C_2$.

12) Die Pyramide $ABCO$ muss sich auf $E_1$ genau so projiciren, wie auf der durch $O_1$ gehenden Bildebene $E$, woraus hervorgeht, dass der Punkt $O_1$ Schwerpunkt des Dreiecks $A_1 B_1 C_1$ sein müsse. $O_1 D$ ist aber die halbe Diagonale des aus $O_1 A_1$ $O_1 B_1$ und Winkel $A_1 O_1 B_1$ construirten Parallelogramms (da ja $C_1 O_1$ der Resultirenden aus $O_1 A_1$ und $O_1 B_1$ das Gleichgewicht halten muss); die ganze durch $O_1$ gehende Diagonale dieses Parallelogramms ist somit $= O_1 C_1$. Die ganze Construction, durch welche man zu projicirten Axen gelangt, läuft daher darauf hinaus, ein Parallelogramm zu construiren, das $O_1 A_1$ und $O_1 B_1$ zu zwei in einen Punkt $O$ zusammenstossenden Seiten und das ganze $O_1 C_1$ zu der durch $O_1$ gehenden Diagonale hat.

---

**XIX. Neue Restbestimmung der Taylor'schen Reihe.** Die Restbestimmung der Taylor'schen Reihe, mit welcher sich zuerst d'Alembert beschäftigte und welche später Lagrange, Ampère und Cauchy auf verschiedenen Wegen, u. A. auch mit Hilfe der Integralrechnung durchführten, soll sich aus der Entwickelung der Reihe selbst und zwar so unmittelbar ergeben, dass dazu die Definition des Differentialquotienten ausreicht. Denn nur alsdann lässt sich jene Reihe in den Elementen der höheren Analyse frühzeitig genug begründen, damit aus ihrer Anwendung auf die zahlreichen Fragen, deren Lösung sie in anschaulichster und bequemster Weise vermittelt, zugleich ihr wahrer Nutzen erkannt werden kann.

Bei allen mir bekannten Methoden der Darstellung dieser Reihe fallen aber die Restbetrachtungen entweder sehr umständlich aus, oder sie werden (oft unter Voraussetzung der Form der Reihenglieder) in der Differentialgleichung erst sehr spät angestellt oder gar in die Integralrechnung verschoben, so dass mittelst anderer künstlicher Verfahrungsarten die Fälle bereits erledigt sind, auf welche sich die, mit Berücksichtigung des Restausdruckes streng gerechtfertigte Anwendung der Reihe am fruchtbarsten erwiesen hätte.

Die folgende Entwickelungsmethode scheint den oben bezeichneten Anforderungen genauer zu entsprechen, in dem sie auf kurzem, sich gleichsam von selbst anbietendem Wege die Reihe und zugleich den Rest liefert, dabei aber nur der folgenden, unmittelbar aus der Definition des Differentialquotienten hervorgehenden Corollarien sich bedient. Nämlich:

A. Eine Funktion ist mit zunehmenden Veränderlichen selbst im

Wachsen oder im Abnehmen begriffen, jenachdem ihr erster Differentialquotient an sich positiv oder negativ ist.

B. Der Differentialquotient $f^{(n)}(x)$ kann innerhalb des Intervalls zweier Werthe $x$ und $x+y$ der Veränderlichen nicht endlich und stetig bleiben, wenn dies nicht bei den vorhergehenden Differentialquotienten $f^{(n-1)}(x), f^{(n-2)}(x) \ldots . f^1(x), f(x)$ der Fall ist.

C. Die Gleichung:

$$\frac{\partial f(x+y)}{\partial x} = \frac{\partial f(x+y)}{\partial y}$$

findet immer statt, wenn man voraussetzt, es bleibe $f(x+y)$ für alle zwischen $x$ und $x+y$ liegenden Werthe des Arguments endlich und stetig.

1.

Die verlangte, bis zur $n-1^{ten}$ Potenz des Zuwachses $y$ der Veränderlichen $x$ fortschreitenden Entwickelung der Funktion $f(x+y)$ sei:

$$f(x+y) = X_0 + X_1 y + X_2 y^2 + \ldots + X_{n-1} y^{n-1} + U,$$

wo $X_0, X_1 . X_2, \ldots X_{n-1}$ näher zu bestimmende Funktionen der einzigen Veränderlichen $x$, und $U$, der ebenfalls näher anzugebende sogenannte Restausdruck der Reihe, eine Funktion von $x$ und $y$ bedeutet.

Vorausgesetzt es bleibe $f(x+y$ von $y=0$ bis $y=y$ endlich und stetig, erhält man durch partielles Differentiiren nach $x$ und $y$ die Gleichung:

$$X_0' + y X_1' + y^2 X_2' + \ldots . + y^{n-2} X'_{n-2} + y^{n-1} X'_{n-1} + \frac{\partial U}{\partial x}$$

$$= X_1 + 2y X_2 + 3y^2 X_3 + \ldots . + (n-1) y^{n-2} X_{n-1} + \frac{\partial U}{\partial y}.$$

Dieser Gleichung geschieht identisch Genüge, wenn man über $X_0$, $X_1$, $X_{n-1}$, $U$ dergestalt verfügt, dass:

1) $X_1 = X_0'$; $2 X_2 = X_1'$; $3 X_3 = X'_2, \ldots . (n-1) X_{n-1} = X'_{n-2}$

und

2) $$y^{n-1} X'_{n-1} + \frac{\partial U}{\partial x} = \frac{\partial U}{\partial y}.$$

Zunächst ist klar, dass 1) und 2) im Ganzen nur $n$-Bedingungen zwischen den $n+1$ zu bestimmenden Grössen ausdrücken, und erst die weitere Bedingung, dass $U$ für $y=0$ verschwinde, zur vollständigen Bestimmung jener Grössen führen werde. In der That erhält man von dem:

$$X_0 = f(x),\ X_1 = f'(x),\ X_2 = \frac{1}{1.2} f''(x); \ldots X_{n-1} = \frac{1}{1.2\ldots(n-1)} f^{n-1}(x)$$

$$X^1_{n-1} = \frac{1}{1.2\ldots(n-1)} f^{(n)}(x).$$

Dies vorausgesetzt, geht nun die Gleichung 2) in die folgende über:

$$\frac{y^{n-1}}{1.2\ldots(n-1)} f^{(n)} + \frac{\partial U}{\partial x} = \frac{\partial U}{\partial x},$$

oder, wenn man, um abzukürzen:

$$U = \frac{y^n}{1.2..n} . u$$

setzt, und bemerkt, dass:

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{y^n}{1.2..n} . \frac{\partial u}{\partial x}; \quad \frac{\partial U}{\partial x} = \frac{y^{n-1}}{1.2...(n-1)} u + \frac{y^n}{1.2..n} . \frac{\partial u}{\partial y},$$

so ergiebt sich, wie leicht zu sehen, die Gleichung:

$$u - f^{(n)}(x) + \frac{y}{n}\left(\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial x}\right) = 0.$$

Die Integration dieser partiellen Differentialgleichung würde unmittelbar zu der bekannten Integralform des Restes führen. Man kann aber die Frage nach $u$ von einem ganz verschiedenen Gesichtspunkte aus betrachten, indem man zwei Werthe von $u$ zu ermittelten sucht, zwischen welchen der Ausdruck:

$$F(u) = u - f^{(n)}(x) + \frac{y}{a}\left(\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial x}\right)$$

wenigstens einmal das Zeichen ändert, zwischen welchen also ein Werth von $u$ liegen muss, wofür $F(u) = 0$ ist.

## 2.

In der soeben angeführten Gleichung setze ich für $u$ einmal:

$$u_1 = f^{(n)}(x),$$

so folgt:

$$F(u_1) = -\frac{y}{n} f^{(n+1)}(x)$$

und dann:

$$u_2 = f^{(n)}(x + y),$$

so folgt:

$$F(u_2) = f^{(n)}(x + y) - f^{(n)}(x).$$

In Hinsicht der Zeichen dieser beiden Werthe von $F(u)$ sind nun zwei Fälle zu unterscheiden: es können nämlich die Ausdrücke

$$f^{(n+1)}(x) \text{ und } f^{(n)}(x + y) - f^{(n)}(x)$$

entweder gleiche oder entgegengesetzte Zeichen haben.

Sind, im erstern Falle, die Zeichen jener Ausdrücke gleich, so sind die Zeichen von $F(u_1)$ und $F(u_2)$ einander entgegengesetzt. Wenn man daher die Annahme macht, es bleibe $F^{(n)}(x)$ von dem Werthe $x$ bis zu jenem $x + y$ der Veränderlichen endlich und stetig, so muss es nothwendig zwischen $u_1 = f^{(n)}(x)$ und $u_2 = f^{(n)}(x + y)$ einen Werth von $u$, und sofort von $x$ einer entsprechenden zwischen $x$ und $x + y$ geben, wofür $F(u)$ verschwindet.

Hiernach kann man den Werth einer zwischen 0 und $+1$ liegenden Zahl $x$ so bestimmen, dass

$$u = F^{(n)}(x + k\,y) \text{ und } F(u) = 0.$$

wird.

Sind, im zweiten Falle, die Zeichen der Ausdrücke:

$$f^{(n+1)}(x) \text{ und } f^{(n)}(x+y) - f^{(n)}(x)$$

einander entgegengesetzt, so muss $f^{(n+1)}(x)$ zwischen den Werthen $x$ und $x + y$ der Veränderlichen wenigstens Einmal sein Zeichen wechseln, folglich $f^{(n)}(x)$ innerhalb jenes Intervalls wenigstens Einmal vom Wachsen in's Abnehmen oder umgekehrt übergehen. (Satz A.)

3.

Dies vorausgesetzt, seien nun $x_0, x_1, \ldots$ die zwischen $x$ und $x + y$ liegenden Werthe der Veränderlichen, für welche $f^{(n+1)}(x) = 0$ wird, und zwar sei:

$$x < x_0 < x_1 < \ldots < x + y.$$

Setzt man nun für $u$ den Werth:

$$u_0 = f^{(n)}(x_0),$$

so folgt:

$$F(u_0) = f^{(n)}(x_0) - f^{(n)}(x),$$

weil $x_0$ eine von $x$ und $y$ ganz unabhängige, constante Grösse ist. Da ausserdem $x_0$ der kleinste der auf $x$ folgenden Werthe ist, wofür $f^{(n+1)}(x)$ verschwindet, so haben nothwendig:

$$f^{(n+1)}(x) \text{ und } f^{(n)}(x_0) - f^{(n)}(x) = F(u_0)$$

gleiche Zeichen. Der Voraussetzung nach sind aber die Zeichen von

$$f^{(n+1)}(x) \text{ und } f^{(n)}(x+y) - f^{(n)}(x) = F(u_2)$$

einander entgegengesetzt: folglich müssen

$$F(u_0) \text{ und } F(u_2)$$

entgegengesetzte Zeichen haben. Es muss also zwischen

$$u_0 = f^{(n)}(x_0) \text{ und } u_2 = f^{(n)}(x+y)$$

ein Werth von $u$, und sofort zwischen $x_0$ und $x + y$ ein entsprechender Werth von $x$ liegen, wofür $F(u) = 0$ wird. Liegt aber dieser Werth zwischen $x_0$ und $x + y$, so ist es nicht minder gewiss, dass er auch in dem erweiterten Intervall von $x$ bis $x + y$ enthalten ist, dass man ihn also wieder durch $x + \varkappa\,y$ darstellen, und sofort

$$u = f^{(n)}(x + \varkappa\,y)$$

wie im vorigen Artikel setzen kann. Hierdurch sind die beiden früher unterschiedenen Fälle erörtert und auf dasselbe Resultat zurückgeführt. Ohne die ausdrücklich gemachte Voraussetzung, dass $f(x)$..(S. C.).. und $f^{(n)}(x)$ innerhalb des Intervalls von $x$ bis $x + y$ der Veränderlichen stets endlich und stetig bleiben, wären die vorangehenden Betrachtungen durchaus nicht statthaft. Jene Voraussetzung aber fände (S. B.) nicht statt, wenn nicht auch $f^{(n-1)}(x), f^{(n-2)}, \ldots f'(x), f(x)$ innerhalb des bezeichneten Intervalls endlich und stetig bleiben würden.

Fasst man Alles zusammen, so ergibt sich der Satz:

Wenn $f(x), f'(x), \ldots f^{(n)}(x)$ für alle zwischen $x$ und $x+y$ liegenden Werthe der Veränderlichen endlich und stetig bleiben, und wenn $\varkappa$ einen zwischen 0 und $+1$ liegenden Bruch von der Beschaffenheit bezeichnet, dass $u = f^{(n)}(x+\varkappa y)$ gesetzt, der Gleichung:

$$u - f^{(n)}(x) + \frac{y}{n}\left(\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial x}\right) = 0$$

Genüge leistet, so ist:

$$f(x+y) = f(x) + y f'(x) + \frac{y^2}{1.2} f''(x) + \ldots + \frac{y^{n-1}}{1.2\ldots(n-1)} f^{(n-1)}(x)$$
$$+ \frac{y^n}{1.2\ldots n} f^{(n)}(x+\varkappa y).$$

Gratz, am 8. März 1859. Professor Dr. A. WINCKLER.

---

**XX. Ueber eine Umgestaltung der Ampère'schen Formel.** Von GUSTAV ROCH, Schüler des polytechnischen Institutes zu Dresden. Die Vereinfachungen, welche die Dynamik, sowie die Lehre von der Anziehung dadurch erleiden, dass man die wirksamen Componenten $X$, $Y$, $Z$ als Differentialquotienten einer Funktion (des Potentiales) betrachtet, machen es wünschenswerth, auch in die Lehre vom Elektromagnetismus eine ähnliche Kräftefunktion einzuführen. Die Bestimmung derselben für die Wirkung von elektrischen Strömen ist der Zweck dieser Arbeit.

Die Ampère'schen Formeln für die Wirkung zweier Stromelemente geben die Werthe der drei Componenten $X$, $Y$, $Z$ der Wirkung und durch Integration einer totalen Differentialgleichung mit drei unabhängig Variablen kann aus ihnen die Potentialfunktion $V$ bestimmt werden. Im Allgemeinen aber existirt keine Lösung einer solchen Gleichung und diess ist auch der Fall für die Wirkung zweier Stromelemente. Es soll aber gezeigt werden, dass eine solche Funktion existirt für die Wirkung geschlossener Curven und es ist dies, streng genommen, auch der einzig mögliche Fall.

Als Grundlage für die folgende Rechnung diente der für viele besonders auf krummlinige Stromleiter bezügliche Entwicklungen sehr bequeme Ausdruck der gegenseitigen Anziehung zweier Stromelemente.

$$-i\, i_1\, d s_1\, r^{-\frac{1}{2}} \frac{\partial\left(r^{-\frac{1}{2}} \frac{\partial r}{\partial s_1}\right)}{\partial s}\, ds.$$

Es seien $x$, $y$, $z$ und $x_1$, $y_1$, $z_1$ die Coordinaten des wirksamen und des afficirten Elementes. Dann sind die Componenten $X$, $Y$, $Z$

$$1) \qquad X = i\,i_1\,ds_1\,r^{-\frac{1}{2}}\,\frac{\partial\left(r^{-\frac{1}{2}}\frac{\partial r}{\partial s_1}\right)}{\partial s}ds\,.\,\frac{\partial r}{\partial x_1} \text{ etc.}$$

wenn

$$r^2 = (x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 + (z - z_1)^2.$$

Man hat nun:

$$\frac{\partial f(r)}{\partial x}\cdot\frac{\partial \varphi(r)}{\partial y} = \frac{\partial f(r)}{\partial r}\,\frac{\partial \varphi(r)}{\partial r}\cdot\frac{\partial r}{\partial x}\frac{\partial r}{\partial y} = \frac{\partial f(r)}{\partial y}\cdot\frac{\partial \varphi(r)}{\partial x}.$$

Diese Formel darf aber nicht sofort in 1) angewendet werden, da $r^{-\frac{1}{2}}\frac{\partial r}{\partial s_1}$ noch andre von $x_1$ und $s$ abhängige Grössen ausser $r$ enthält. Es ist $\varphi(r)$ aber gleich $r$. Man muss daher schreiben:

$$\frac{\partial f(r,x,y)}{\partial x}\frac{\partial r}{\partial y} = \frac{\partial_x f}{\partial x}\cdot\frac{\partial r}{\partial y} + \frac{\partial_r f}{\partial x}\frac{\partial r}{\partial y}$$

$$\frac{\partial f(r,x,y)}{\partial y}\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{\partial_y f}{\partial y}\frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial_r f}{\partial y}\frac{\partial r}{\partial x},$$

und hierin ist:

$$\frac{\partial_r f}{\partial x}\frac{\partial r}{\partial y} = \frac{\partial_r f}{\partial y}\frac{\partial r}{\partial x}$$

und mithin allgemein:

$$\frac{\partial f(r,x,y)}{\partial x}\frac{\partial r}{\partial y} = \frac{\partial f(r,x,y)}{\partial y}\frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial_x f}{\partial x}\frac{\partial r}{\partial y} - \frac{\partial_y f}{\partial y}\frac{\partial r}{\partial x}.$$

Hiernach ist:

$$X = i\,i_1\,ds_1\left\{r^{-\frac{1}{2}}\frac{\partial\left(r^{-\frac{1}{2}}\frac{\partial r}{\partial s_1}\right)}{\partial x_1}\frac{\partial r}{\partial s}\right.$$
$$\left. + r^{-\frac{1}{2}}\frac{\partial_s\left(r^{-\frac{1}{2}}\frac{\partial r}{\partial s_1}\right)}{\partial s}\frac{\partial r}{\partial x_1} - \frac{\partial_{x_1}\left(r^{-\frac{1}{2}}\frac{\partial r}{\partial s_1}\right)}{\partial x_1}\frac{\partial r}{\partial s}\right\}ds.$$

In den letzten beiden Differentialquotienten ist $r$ als constant anzusehen. Man kann sie daher schreiben:

$$r^{-\frac{1}{2}}\frac{\partial\left(r^{-\frac{1}{2}}\frac{\partial r}{\partial s_1}\right)}{\partial s}\frac{\partial r}{\partial x_1} = r^{-2}\frac{\partial\left(r\frac{\partial r}{\partial s_1}\right)}{\partial s}\frac{\partial r}{\partial x_1} = -\frac{\partial\left(r\frac{\partial r}{\partial s_1}\right)}{\partial s}\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial x_1}$$

$$r^{-\frac{1}{2}}\frac{\partial\left(r^{-\frac{1}{2}}\frac{\partial r}{\partial s_1}\right)}{\partial x_1}\frac{\partial r}{\partial s} = -\frac{\partial\left(r\frac{\partial r}{\partial s_1}\right)}{\partial x_1}\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial s}.$$

Es ist aber $r\frac{\partial r}{\partial s}$ unabhängig von $r$. Man darf daher in den letzten beiden Differentialquotienten auch $r$ als veränderlich ansehen, und hat so nicht mehr partielle Differentialquotienten von der vorigen störenden Beschaffenheit. Es ist:

$$X = i\,i_1\,ds\,ds_1 \left\{ r - \tfrac{1}{2} \frac{\partial\left(r - \frac{1}{2}\frac{\partial r}{\partial s_1}\right)}{\partial x_1} \frac{\partial r}{\partial s} - \frac{\partial\left(r\frac{\partial r}{\partial s_1}\right)}{\partial s} \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x_1} + \frac{\partial\left(r\frac{\partial r}{\partial s_1}\right)}{\partial x_1} \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial s} \right\}.$$

Die Glieder in der geschlungenen Klammer können noch weier reducirt werden zu

$$\left\{\tfrac{1}{2}\frac{\partial r}{\partial s_1}\frac{\partial r}{\partial s} - r\frac{\partial\left(\frac{\partial r}{\partial s_1}\right)}{\partial s}\right\}\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial x_1} = \left(\tfrac{3}{2}\frac{\partial r}{\partial s_1}\frac{\partial r}{\partial s} - \frac{\partial\left(r\frac{\partial r}{\partial s_1}\right)}{\partial s}\right)\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial x_1}.$$

Diesen Ausdruck konnte man auch sehr bald aus:

$$\tfrac{3}{2}\cos\Theta\cos\Theta' - \cos\varepsilon$$

erhalten. Die Grösse

$$\frac{\partial\left(r\frac{\partial r}{\partial s_1}\right)}{s}$$

ist unabhängig von $x_1$, so dass man $X$ schreiben kann:

$$X = i\,i_1\,ds\,ds_1 \left\{\tfrac{3}{2}\frac{\partial r}{\partial s_1}\frac{\partial r}{\partial s}\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial x_1} - \frac{\partial}{\partial x_1}\left[\frac{1}{r}\frac{\partial\left(r\frac{\partial r}{\partial s_1}\right)}{\partial s}\right]\right\}.$$

Der zweite Theil der Klammer ist nunmehr ein Differentialquotient nach $x_1$. Den ersten kann man schreiben:

$$\tfrac{1}{2} r\frac{\partial r}{\partial s_1}\cdot r\frac{\partial r}{\partial s}\frac{\partial\left(\frac{1}{r}\right)^3}{\partial x_1}$$

$$= \tfrac{1}{2}\frac{d\left(\frac{1}{r}\frac{\partial r}{\partial s_1}\frac{\partial r}{\partial s}\right)}{\partial x_1} - \tfrac{1}{2}\left(\frac{1}{r^3}\right)\left[\frac{\partial r}{\partial s}\frac{\partial\left(r\frac{\partial r}{\partial s_1}\right)}{\partial x_1} + \frac{\partial r}{\partial s_1}\frac{\partial\left(r\frac{\partial r}{\partial s}\right)}{\partial x_1}\right].$$

Man überzeugt sich, da

$$\frac{\partial r}{\partial s} = \frac{\partial r}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s} + \text{etc.}$$

$$\frac{\partial r}{\partial s_1} = \frac{\partial r}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial s} + \text{etc.}$$

leicht, dass

$$\frac{\partial\left(r\frac{\partial r}{\partial s_1}\right)}{\partial x_1} = -\frac{\partial x}{\partial s},$$

und

$$\frac{\partial\left(r\frac{\partial r}{\partial s_1}\right)}{\partial x_1} = +\frac{\partial x_1}{\partial s_1},$$

so dass der erste Theil von $X$ zu

$$\tfrac{1}{2}\frac{\partial\left(\frac{1}{r}\frac{\partial r}{\partial s_1}\frac{\partial r}{\partial s}\right)}{\partial x_1} + \tfrac{1}{2}\left(\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial s}\frac{\partial x_1}{\partial s_1} - \frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial s_1}\frac{\partial x}{\partial s}\right)$$

wird.

Es ist daher:

$$X = \left[\frac{\partial}{\partial x_1}\left\{\frac{1}{2}\,\frac{1}{r}\,\frac{\partial r}{\partial s_1}\frac{\partial r}{\partial s} - \frac{1}{r}\,\frac{\partial}{\partial s}\left(r\frac{\partial r}{\partial s_1}\right)\right\} + \frac{\partial x_1}{\partial s_1}\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial s} - \frac{\partial x}{\partial s}\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial s_1}\right] i\, i_1\, d s\, d s_1.$$

Ebenso ist ein Ausdruck für $Y$ zu entwickeln und für $Z$. Man sieht, dass eine Potentialfunktion nur existirt, wenn man eine Funktion auffinden kann, deren Differentialquotient nach $x_1$ der Ausdruck:

$$\frac{\partial x_1}{\partial s_1}\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial s} - \frac{\partial x}{\partial s}\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial s_1}$$

ist, und wenn ähnlich die nach $y$ und $z$ geformt sind. Dann aber müsste, da:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x\,.\,\partial y} = \frac{\partial^2 V}{\partial y\,.\,\partial x} \text{ etc.}$$

ist, auch sein

$$\frac{\partial\left\{\left(\frac{\partial x_1}{\partial s_1}\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial s} - \frac{\partial x}{\partial s}\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial s_1}\right)\right\}}{\partial y_1} = \frac{\partial\left\{\left(\frac{\partial y_1}{\partial s_1}\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial s} - \frac{\partial y}{\partial s}\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial s_1}\right)\right\}}{\partial x_1}.$$

Man überzeugt sich leicht, dass dies nicht der Fall ist und es existirt demnach keine Potentialfunktion für die Wirkung zweier Stromelemente. Integrirt man den obigen Werth für $X$ aber nach $s$ und $s_1$ innerhalb zweier geschlossenen Curven, so fallen die Glieder

$$\frac{\partial x_1}{\partial s_1}\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial s} \text{ und } \frac{\partial x}{\partial s}\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial s_1}$$

weg, und es entsteht:

$$X = i\, i_1 \int_0^s\!\!\int_0^{s_1} \frac{\partial}{\partial x_1}\left\{\frac{1}{2}\,\frac{1}{r}\,\frac{\partial r}{\partial s_1}\frac{\partial r}{\partial s} - \frac{1}{r}\,\frac{\partial\left(r\frac{\partial r}{\partial s_1}\right)}{\partial s}\right\} d s\, d s_1,$$

$X$ die Componente der Wirkung zweier geschlossener Curven.

Die Bildung des Differentialquotienten nach $x_1$ aber wurde in einer Weise vorgenommen, die eine Aenderung der Schreibweise erlaubt. Denkt man sich innerhalb der geschlossenen Curven zwei feste Punkte $x, y, z$ und $x_1, y_1, z_1$ und misst von da ab die Coordinaten der Peripheriepunkte zu $\xi, \eta, \zeta$, und $\xi_1, \eta_1, \zeta_1$, so wird:

$$r^2 = [(x + \xi) - (x_1 + \xi_1)]^2 + \text{etc.}$$

und man darf die nach den früheren $x_1, y_1, z_1$ genommenen Differentialquotienten identificiren mit den nach den jetzigen genommenen. Dann darf man auch die Differentiation nach der Integration ausführen und es wird:

$$X = i\, i_1 \frac{\partial}{\partial x_1}\int_0^s\!\!\int_0^{s_1}\left(\frac{1}{2}\,\frac{1}{r}\,.\,\frac{\partial r}{\partial s}\frac{\partial r}{\partial s_1} - \frac{1}{r}\,\frac{\partial\left(r\frac{\partial r}{\partial s_1}\right)}{\partial s}\right) d s\, d s_1,$$

Die Potentialfunktion $V$ aber ist daher:

$$2)\qquad V = i\,i_1 \int_0^s\int_0^{s_1}\left[\tfrac{1}{2}\frac{1}{r}\frac{\partial r}{\partial s}\frac{\partial r}{\partial s_1} - \frac{1}{r}\frac{\partial\left(r\frac{\partial r}{\partial s_1}\right)}{\partial s}\right]ds\,ds_1,$$

$$3)\qquad x = \frac{\partial V}{\partial x_1},\quad y = \frac{\partial V}{\partial y_1},\quad z = \frac{\partial V}{\partial z_1}.$$

Diese Form für $V$ kann aber bedeutend vereinfacht werden.

Man hat:

$$\frac{1}{r}\frac{\partial r}{\partial s}\frac{\partial r}{\partial s_1} = \frac{1}{r}\frac{\partial\left(r\frac{\partial r}{\partial s_1}\right)}{\partial s} - \frac{\partial\left(\frac{\partial r}{\partial s_1}\right)}{\partial s}.$$

und durch die Integration fällt der letzte Theil weg, so dass entsteht:

$$V = -\tfrac{1}{2}i\,i_1\int_0^s\int_0^{s_1}\frac{1}{r}\frac{\partial\left(r\frac{\partial r}{\partial s_1}\right)}{\partial s}ds\,ds_1,\ \text{wobei} - r\frac{\partial r}{\partial s_1} = [x+\xi-(x_1+\xi_1)]\frac{\partial \xi_1}{\partial s_1} + \text{ etc.}$$

Demnach:

$$4)\qquad V = +\tfrac{1}{2}i\,i_1\int_0^{s_1}\int_0^{s}\frac{d\xi_1\,d\xi + d\eta_1\,d\eta + d\zeta_1\,d\zeta}{r}.$$

Dieser Werth genügt der Bedingung

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y_1^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z_1^2} = 0.$$

Derselbe lässt sich noch besonders vereinfachen, wenn $\xi$, $\eta$, $\zeta$ und $\xi_1$, $\eta_1$, $\zeta_1$ immer sehr klein sind gegen $r$. Man kann dann $\frac{1}{r}$ nach Potenzen derselben entwickeln, wenn man die Entfernung der Punkte, von denen aus $\xi$, $\eta$, $\zeta$, $\xi_1$, $\eta_1$, $\zeta_1$ gemessen werden, einführt. Sie sei $r'$, so ist:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{r} = \frac{1}{r'} &+ \frac{\partial\frac{1}{r'}}{\partial x}\xi + \frac{\partial\frac{1}{r'}}{\partial y}\eta + \frac{\partial\frac{1}{r'}}{\partial z}\zeta \\
&+ \frac{\partial\frac{1}{r'}}{\partial x_1}\xi_1 + \frac{\partial\frac{1}{r'}}{\partial y_1}\eta + \frac{\partial\frac{1}{r'}}{\partial z_1}\zeta_1 \\
&+ \frac{\partial^2\frac{1}{r'}}{\partial x\,\partial x_1}\xi\xi_1 + \frac{\partial^2\frac{1}{r'}}{\partial x\,\partial y_1}\xi\eta_1 + \frac{\partial^2\frac{1}{r'}}{\partial x\,\partial z_1}\xi\zeta_1 \\
&+ \frac{\partial^2\frac{1}{r'}}{\partial y\,\partial x_1}\eta\xi_1 + \frac{\partial^2\frac{1}{r'}}{\partial y\,\partial y_1}\eta\eta_1 + \frac{\partial^2\frac{1}{r'}}{\partial y\,\partial z_1}\eta\zeta_1 \\
&+ \frac{\partial^2\frac{1}{r'}}{\partial z\,\partial x_1}\zeta\xi_1 + \frac{\partial^2\frac{1}{r'}}{\partial z\,\partial y_1}\zeta\eta_1 + \frac{\partial^2\frac{1}{r'}}{\partial z\,\partial z_1}\zeta\zeta_1 + \cdots
\end{aligned}$$

Die sieben ersten Glieder fallen in dem Ausdrucke 4) weg. Setzt man nun:

$$5)\quad \begin{cases} \int_0^s \eta\, d\zeta = \alpha; & \int_0^s \zeta\, d\xi = \beta; & \int_0^s \xi\, d\eta = \gamma \\ \int_0^{s_1} \eta_1\, d\zeta_1 = \alpha_1; & \int_0^{s_1} \zeta_1\, d\xi_1 = \beta_1; & \int_0^{s_1} \xi_1\, d\eta_1 = \gamma_1 \end{cases}$$

$$6)\quad q = \alpha_1 \frac{\partial \frac{1}{r'}}{\partial x} + \beta_1 \frac{\partial \frac{1}{r'}}{\partial y} + \gamma_1 \frac{\partial \frac{1}{r'}}{\partial z},$$

so wird:

$$7)\quad V = \tfrac{1}{2}\, i\, i_1 \left(\alpha \frac{\partial q}{\partial x} + \beta \frac{\partial q}{\partial y} + \gamma \frac{\partial q}{\partial z}\right).$$

Ich habe diese Formeln zunächst auf die Ampère'sche Theorie des Magnetismus angewendet und besonders die Wirkung der dem afficirten Molekül sehr nahen Theilchen bestimmt.

---

**XXI. Ueber die Bewegung eines schweren Punktes auf einer vertical stehenden Plancurve.** Beim Unterrichte in der analytischen Mechanik kann man folgende nicht übele Aufgabe benutzen, die ich in keinem der mir bekannten Lehrbücher finde:

> Auf die Aussenseite einer gegebenen, vertical gestellten Plancurve ist ein schwerer Punkt aufgelegt ohne Mittheilung einer Anfangsgeschwindigkeit; an welcher Stelle wird er, längs der Curve herabfallend, die letztere verlassen? (Fig. 4, Taf. III.)

Die Achse $OZ$ sei im Sinne der Schwere genommen, $P_0$ die Anfangslage des beweglichen Punktes und die zugehörige Abscisse $ON = z_0$, ferner für eine andere Lage $P$ die Abscisse $ON = z$, $NP = y = f(z)$ und der Tangentenwinkel $SPT = \tau$ mithin $\tan\tau = \frac{dy}{dz} = y'$. Von dem beweglichen Punkte, dessen Masse $= 1$, dessen Gewicht daher $= g = PS$ sein möge, erleidet die Curve in $P$ den normalen Druck

$$PU = g \sin\tau = \frac{g y'}{\sqrt{1 + y'^2}},$$

jedoch nur dann, wenn $\angle SPT < 90^0$ also $y'$ positiv ist, weil im Gegenfalle der bewegliche Punkt ohnehin nicht mehr auf der Curve wäre; da unter dieser Voraussetzung $\sin\tau$ gleichfalls positiv ist, so hat man in der obigen Formel die Wurzel mit dem positiven Zeichen zu nehmen. Andererseits

wirkt die Centrifugalkraft dem Drucke entgegen; sie ist, wenn $v$ die Geschwindigkeit und $\varrho$ den Krümmungshalbmesser in $P$ bezeichnet,

$$PV = \frac{v^2}{\varrho} = \frac{2g(z-z_0)}{\frac{\sqrt{(1+y'^2)^3}}{y''}}.$$

Die genannte Gegenwirkung findet übrigens nur in dem Falle statt, wo die Curve ihre concave Seite nach der Richtung negativer $y$ hinkehrt, d. h. wenn $y''$ negativ ist; man muss daher, um den absoluten Betrag von $PV$ zu erhalten, der Wurzel das negative Vorzeichen geben. Die gesuchte Stelle findet sich nun dort, wo $PU = PV$ wird, bestimmt sich also durch die Gleichung

$$\frac{gy'}{\sqrt{1+y'^2}} = -\frac{2g(z-z_0)y''}{\sqrt{(1+y'^2)^3}}$$

oder:

$$1) \qquad y'(1+y'^2) + 2y''(z-z_0) = 0;$$

nach Substitution der Werthe $y' = f'(z)$ und $y'' = f''(z)$ ist hierin nur die eine Unbekannte $z$ enthalten.

Bei der Parabel überwiegt die Normalcomponente der Schwere immer die Centrifugalkraft, wenn die Parabelachse vertical steht; dagegen wird die Aufgabe möglich, wenn man die Parabelachse $AC$ horizontal legt (Fig. 5, Taf. III). Nehmen wir den Ausgangspunkt $P_0$ zum Coordinatenanfang und setzen $OB = b$, $OC = c$, und nennen $a$ den Halbparameter, so haben wir als Gleichung der Curve

$$y = b - \frac{(c-z)^2}{2a}, \quad z_0 = 0,$$

mithin nach No. 1)

$$a^2(c-z) + (c-z)^3 - 2a^2 z = 0$$

oder für $c - z = u$

$$u^3 + 3a^2 u - 2a^2 c = 0.$$

Diese Gleichung ist mittelst der Cardan'schen Formel auflösbar; man erhält:

$$2) \qquad z = c - \left\{\sqrt[3]{a^2(\sqrt{a^2+c^2}+c)} - \sqrt[3]{a^2(\sqrt{a^2+c^2}-c)}\right\}$$

Da ein negatives $z$ eine Unmöglichkeit anzeigen würde, so muss noch untersucht werden, ob $z$ positiv ausfällt. Es ist nun ohne Weiteres klar, dass der Ausdruck $u^3 + 3a^2 u - 2a^2 c$ mit $u$ gleichzeitig wächst und überhaupt nur für einen einzigen positiven Werth von $u$ verschwinden kann; für $u = 0$ wird er negativ, für $u = c$ positiv, mithin liegt die gesuchte Wurzel zwischen 0 und $c$, folglich ist auch $z$ zwischen 0 und $c$ enthalten.

Als zweites Beispiel diene eine Ellipse, deren grosse Achse vertical steht (Fig. 6, Taf. III); es ist dann, wenn der obere Scheitel zum Coordinatenanfang genommen, $AC = a$ und $BC = b$ gesetzt wird,

$$y = \frac{b}{a} \sqrt{2az - z^2}$$

und nach No. 1)

$$(a - z)\left[a^2 - \frac{a^2 - b^2}{a^2}(a - z)^2\right] - 2a^2(z - z_0) = 0.$$

Die Gleichung vereinfacht sich mittelst der Substitutionen

$$a - z = x, \quad a - z_0 = x_0, \quad \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a} = \varepsilon$$

und wird

$$3) \qquad \varepsilon^2 x^3 - 3a^2 x + 2a^2 x_0 = 0;$$

setzt man weiter

$$x = \frac{a\xi}{\varepsilon}, \quad x_0 = \frac{a\xi_0}{\varepsilon},$$

so wird noch besser

$$\xi^3 - 3\xi + 2\xi_0 = 0.$$

Die einfache trigonometrische Lösung hiervon besteht in den beiden Formeln

$$\sin\varphi = \xi_0, \quad \xi = 2\sin\tfrac{1}{3}\varphi,$$

und dies kann mit Hülfe der Trisection des Winkels construirt werden. Zieht man nämlich vom Brennpunkte $F$ nach $P_0$ und $P$ die Leitstrahlen $r_0$ und $r$, so ist

$$\frac{a - r_0}{a} = \frac{\varepsilon x_0}{a} = \xi_0, \quad \frac{a - r}{a} = \xi,$$

mithin nach dem Vorigen

$$4) \qquad \sin\varphi = \frac{a - r_0}{a}, \quad r = a - 2a\sin\tfrac{1}{3}\varphi.$$

Dem entsprechend schneidet man auf $BF$ die Strecke $FQ_0 = FP_0$ ab, beschreibt aus $B$ mit Radius $BQ_0$ einen Kreis und legt an diesen eine horizontale Tangente, welche den um die Ellipse beschriebenen Kreis $AD$ in $R$ schneidet; von dem Bogen $DR$ bestimmt man den dritten Theil $DS$, zieht $ST \perp CD$ und nimmt $BQ = 2\,ST$, dann ist der Rest $FQ$ der Leitstrahl des gesuchten Punktes $P$.

Diese Construction wird elementar, wenn $\varphi$ einen der Werthe $\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{8}, \frac{\pi}{16}$ etc. erhält; für $r_0 = a - \frac{a}{\sqrt{2}}$ ist z. B.

$$\varphi = 45^0, \quad r = a - 2a\sin 15^0,$$

doch setzt der für $r_0$ angenommene Werth voraus, dass $a$ mehr als $b\sqrt{2}$ beträgt.

Giebt man der Ellipse die umgekehrte Lage, indem man die kleine Achse vertical stellt, so kommt man auf eine ähnliche cubische Gleichung wie vorhin; doch lässt sich diese nur mittelst der Cardan'schen Formel auflösen.

Beim Kreise ist $b=a$, $\varepsilon=0$, mithin nach No. 3)

$$x=\tfrac{2}{3}\,x_0.$$

Dieser Werth hängt vom Radius $a$ nicht ab; hat man also für mehrere concentrische Kreise dasselbe $x_0$, so gilt auch für alle jene Kreise dasselbe $x$.

Für eine Hyperbel mit verticaler Hauptachse erhält man eine Gleichung, die äusserlich mit No. 3) übereinstimmt, worin aber

$$\varepsilon=\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{a}$$

ist. Da diese Gleichung keine positive Wurzel besitzt, so bleibt der bewegliche Punkt immer auf der Curve, wie leicht vorauszusehen war. Bei einer gleichseitigen Hyperbel (Fig. 7, Taf. III), deren eine Asymptote $BD$ vertical steht, sei $C$ der Anfangspunkt der Bewegung, $OCN \parallel BD$ die $z$-Achse, $OB=b$, $OC=c$; die Gleichung der Curve lautet dann

$$b\,c=(b-y)\,z \quad \text{oder} \quad y=\left(1-\frac{c}{z}\right)$$

und hieraus ergiebt sich nach No. 1)

$$b^2c^2+4\,c\,z^3-3\,z^4=0$$

oder einfacher

$$\zeta^4+4\,\alpha\,\zeta-3\,\alpha=0,$$

wobei

$$z=\frac{c}{\zeta},\quad \frac{c^2}{b^2}=\alpha$$

gesetzt worden ist.

Legt man die Basis einer Cycloide horizontal und nimmt den darüber befindlichen Scheitel zum Coordinatenanfang, so hat man als Differentialgleichung der Curve

$$y'=\sqrt{\frac{2\,a-z}{z}},$$

worin $a$ den Halbmesser des erzeugenden Kreises bedeutet. Die Gleichung 1) liefert sehr einfach

$$z=a+\tfrac{1}{3}\,z_0.$$

Für die Kettenlinie, deren Gleichung ist

$$z=\frac{c}{2}\left(e^{\frac{y}{c}}+e^{-\frac{y}{c}}\right) \quad \text{oder} \quad y=c\,l\left(\frac{z+\sqrt{z^2-c^2}}{c}\right),$$

ergiebt sich

$$z=2\,z_0;$$

wie beim Kreise ist dieser Werth unabhängig von dem Parameter der Curve.

Schlömilch.

**XXII. Allgemeinste Auflösung der Gleichung $x^3+y^3=z^2$ in relativen Primzahlen.** Von R. HOPPE in Berlin. Die Gleichung lässt sich zerlegen in

$$pq=z^2,\quad p=x+y,\quad q=(x+y)(x-2y)+3y^2,$$

woraus erhellt, dass $p$ und $q$ keinen Factor gemein haben können ausser 3. Demnach ist entweder

$$p=u^2,\quad q=v^2,\quad z=uv$$

oder

$$p=3u^2,\quad q=3v^2,\quad z=3uv.$$

Erster Fall. Da hier

$$4v^2=(2x-y)^2+3y^2$$

oder

$$3y^2=(2v-2x+y)(2v+2x-y)$$

ist, so giebt es stets zwei relative Primzahlen $\gamma$, $\delta$, welche die Gleichung erfüllen:

$$\gamma(2v-2x+y)=3\delta y,\quad \delta(2v+2x-y)=\gamma y,$$

woraus nach Elimination von $v$

$$4\gamma\delta x=(\gamma-\delta)(\gamma+3\delta)y.$$

Die Coefficienten von $x$ und $y$ können keinen Factor gemein haben ausser 3 und 4, nämlich 3, wenn er in $\gamma$ steckt; 4, wenn $\gamma$ und $\delta$ ungerade sind. Daher hat man

$$1)\qquad \varepsilon x=(\gamma-\delta)(\gamma+3\delta),\quad \varepsilon y=4\gamma\delta,\quad \varepsilon=1,3,4,12,$$

woraus hervorgeht

$$\varepsilon u^2=\gamma^2+6\gamma\delta-3\delta^2.$$

Hat nun $\gamma$, mithin auch $\varepsilon$ den Factor 3, so ist $\gamma^2+6\gamma\delta$ theilbar durch 9, folglich

$$\delta^2+\frac{\varepsilon}{3}u^2,$$

das ist die Summe zweier Quadrate, theilbar durch 3. Das ist unmöglich, weil $\delta$ nicht durch 3 theilbar ist. So behält $\varepsilon$ nur die Werthe 1 und 4, und man hat

$$\gamma^2+6\gamma\delta-3\delta^2=u_1^2$$

oder

$$3(2\gamma-\delta)\delta=(u_1-\gamma)(u_1+\gamma),$$

daher erfüllen zwei relative Primzahlen $\alpha$ und $\beta$ die Gleichungen

$$3\beta\delta=\alpha(u_1-\gamma),\quad \alpha(2\gamma-\delta)=\beta(u_1+\gamma),$$

woraus nach Elimination von $u_1$ erhalten wird

$$2\alpha(\alpha-\beta)\gamma=(\alpha^2+3\beta^2)\delta.$$

Die Coefficienten von $\gamma$ und $\delta$ können keinen Factor gemein haben als 3 und Potenzen von 2. Man hat

$$\zeta\gamma=\alpha^2+3\beta^2,\quad \zeta\delta=2\alpha(\alpha-\beta),\quad \zeta=2^n \text{ oder } =3\,.\,2^n.$$

Führt man diese Werthe in die Gleichungen 1) ein, so ergiebt sich nach leichten Reductionen

$$\varepsilon\zeta^2 x = (\alpha+\beta)\,[(\alpha+\beta)^3 - 8(\alpha-\beta)^3]$$
$$\varepsilon\zeta^2 y = 4(\alpha-\beta)\,[(\alpha+\beta)^3 + (\alpha-\beta)^3].$$

Setzt man $\alpha+\beta=a$, $\alpha-\beta=b$, so werden $a$ und $b$ alle Zahlen durchlaufen, die zugleich gerade oder zugleich ungerade sind. In den geraden Systemen sind aber alle Systeme enthalten, multiplicirt mit 2. Ohne Einschränknng ist daher

$$\vartheta x = a(a^3 - 8b^3), \quad \vartheta y = 4b(a^3+b^3), \quad \vartheta = 2^n \text{ oder } = 9\,.\,2^n.$$

Ist hier $a$ gerade und man substituirt

$$2b,\ -a,\ y,\ x \text{ für } a,\ b,\ x,\ y,$$

so erhält man nach Division durch 4 dieselben Ausdrücke wieder. Man kann demnach $a$ auf ungerade Werthe beschränken, ohne Systeme der $x$, $y$ einzubüssen. Unter dieser Annahme behält $\vartheta$ noch die Werthe 9 und 1, welche offenbar eintreten, jenachdem $a+b$ den Theiler 3 hat oder nicht.

Zweiter Fall. Haben $p$ und $q$ den Factor 3, so ist

$$12v^2 = (2x-y)^2 + 3y^2,$$
$$(2x-y)^2 = 3(2v-y)(2v+y),$$
$$\gamma(2x-y) = 3\delta(2v+y), \quad \delta(2x-y) = \gamma(2v-y),$$
$$2(\gamma^2-3\delta^2)\,x = (\gamma^2+6\gamma\delta-3\delta^2)\,y.$$

Theiler ist 4, wenn $\gamma$ und $\delta$ ungerade sind; 3, wenn es in $\gamma$ steckt, daher

$$\varepsilon x = \gamma^2 + 6\gamma\delta - 3\delta^2, \quad \varepsilon y = 2(\gamma^2 - 3\delta^2), \quad \varepsilon = 1,\ 3,\ 4,\ 12,$$

woraus

$$\varepsilon u^2 = \gamma^2 + 2\gamma\delta - 3\delta^2 = 3u_1^2 \text{ oder } = u_1^2,$$

jenachdem $\gamma$ und $\varepsilon$ den Factor 3 haben oder nicht. Ist 3 nicht Theiler, so kommt

$$u_1^2 = (\gamma-\delta)(\gamma+3\delta),$$
$$\alpha(\gamma-\delta) = \beta u_1, \quad \beta(\gamma+3\delta) = \alpha u_1,$$
$$\alpha^2(\gamma-\delta) = \beta^2(\gamma+3\delta),$$
$$(\alpha^2-\beta^2)\,\gamma = (\alpha^2+3\beta^2)\,\delta,$$
$$\zeta\gamma = \alpha^2+3\beta^2, \quad \zeta\delta = \alpha^2-\beta^2,$$
$$\varepsilon\zeta^2 x = \alpha^4 + 6\alpha^2\beta^2 - 3\beta^4, \quad \varepsilon\zeta^2 y = 3\beta^4 + 6\alpha^2\beta^2 - \alpha^4.$$

Ist 3 der Theiler, so setze man $3\gamma$ für $\gamma$, dann erhält man dasselbe, nur mit Vertauschung von $x$ und $y$. In den zwei letzten Gleichungen ist 3 Theiler, wenn es in $\alpha$ steckt; 4, wenn $\alpha$ und $\beta$ ungerade sind. Da aber

$$3\varepsilon\zeta^2 u_1^2 = \varepsilon\zeta^2(x+y) = 12\alpha^2\beta^2,$$

so kann $\varepsilon$ nicht den Factor 3 haben, da es den Factor 9 nicht hat, folglich behält der Coefficient von $x$ und $y$ nur die Werthe 1 und 4.

Alle Auflösungen sind demnach in folgenden enthalten:

I. $\vartheta^2 x = a(a^3-8b^3)$, $\vartheta^2 y = 4b(a^3+b^3)$, $\vartheta^2 z = a^6 + 20a^3b^3 - 8b^6$, wo $a$ ungerade, und $\vartheta = 3$ oder $= 1$ ist, jenachdem 3 Theiler von $a+b$ ist oder nicht.

II. $\eta^2 x = a^4 + 6a^2b^2 - 3b^4$, $\eta^2 y = 3b^4 + 6a^2b^2 - a^4$, $\eta^2 z = 6ab(a^4+3b^4)$, wo $a$ nicht theilbar durch 3, und $\eta = 2$ oder $= 1$ ist, jenachdem $a$ und $b$ beide ungerade sind oder nicht.

**XXIII. Das pythagoräische Dreieck.** Im Octoberhefte 1858 der *Nouvelles annales de mathématiques* (*T. XVII, p.* 395) löste H. Gérono die Aufgabe, ein Dreieck zu finden, dessen drei Seiten und Flächeninhalt eine arithmetische Reihe von der Differenz 1 bilden, dahin, dass nur das sogenannte pythagoräische Dreieck von den den Seiten 3, 4, 5 und dem Flächeninhalte 6 dieser Bedingung genüge. Im Januarheft 1859 derselben Zeitschrift (T. XVIII, p. 44) bemerkte H. Lebesgue, dieses Dreieck sei überhaupt das einzige in ganzen und rationalen Zahlen, welches der Bedingung genüge, für die drei Seiten und den Flächeninhalt eine arithmetische Reihe mit irgend einer Differenz herzustellen. Wir wollen dies auf andere Weise zeigen.

Es sei zunächst das Dreieck $ABC$ (dessen Flächeninhalt $\Delta$) ein ganz beliebiges. Wie gewöhnlich bezeichnen $a, b, c$ die den Eckpunkten $A, B, C$ gegenüberliegenden Seiten, $\varrho$ den Halbmesser des eingeschriebenen Kreises und die Stücke, welche auf den Seiten zwischen den Berührungspunkten mit jenem Kreise und den Eckpunkten liegen, mögen durch die den zunächst liegenden Ecken entsprechenden griechischen Buchstaben $\alpha, \beta, \gamma$ benannt werden, so dass also

$$a = \beta + \gamma, \quad b = \alpha + \gamma, \quad c = \alpha + \beta.$$

Nun ist bekanntlich

$$1) \qquad \Delta = \tfrac{1}{4}(a + b + c)(b + c - a) \,.\, tg\,\frac{A}{2},$$

wie auf die verschiedensten Weisen abgeleitet werden kann.

Ferner ist

$$a + c - 2b = 2\beta - (\alpha + \gamma)$$

und wegen $\frac{\alpha}{\varrho} = cotg\,\frac{A}{2}$ u. s. w. folgt daraus

$$2) \qquad \frac{a + c - 2b}{\varrho} = 2\,cotg\,\frac{B}{2} - \left(cotg\,\frac{A}{2} + cotg\,\frac{C}{2}\right).$$

Ist daher $b$ das arithmetische Mittel zwischen $a$ und $c$, d. h. ist $\frac{a + c - 2b}{\varrho} = 0$ so muss auch $2\,cotg\,\frac{B}{2} - \left(cotg\,\frac{A}{2} + cotg\,\frac{C}{2}\right) = 0$ sein, es muss $cotg\,\frac{B}{2}$ das arithmetische Mittel zwischen $cotg\,\frac{A}{2}$ und $cotg\,\frac{C}{2}$ sein, oder

bilden die Dreiecksseiten $a, b, c$ eine arithmetische Reihe, so muss dasselbe auch für $cotg\,\frac{A}{2}, cotg\,\frac{B}{2}, cotg\,\frac{C}{2}$ der Fall sein.

Um die Differenz dieser letzteren Progression anzugeben, kann man füglich folgenden Weg einschlagen. Es sei $a = x - d$, $b = x$, $c = x + d$, dann ist

$$\frac{sin\,A}{sin\,B} = 1 - \frac{d}{x}, \qquad \frac{sin\,C}{sin\,B} = 1 + \frac{d}{x},$$

also

$$\sin A + \sin C = 2 \sin B = 2 \sin (A + C)$$

und daraus

$$3)\qquad \frac{1 - 2 \cos A}{\sin A} + \frac{1 - 2 \cos C}{\sin C} = 0.$$

Nun ergiebt sich augenblicklich

$$\frac{1-2\cos A}{\sin A} = \frac{\left(\sin\frac{A}{2}\right)^2 + \left(\cos\frac{A}{2}\right)^2 - 2\left(\cos\frac{A}{2}\right)^2 + 2\left(\sin\frac{A}{2}\right)^2}{2 \sin\frac{A}{2} \cdot \cos\frac{A}{2}} = \tfrac{3}{2}\, tg\frac{A}{2} - \tfrac{1}{2}\, cotg\frac{A}{2}$$

und so nimmt die Gleichung 3) die neue Gestalt an:

$$\tfrac{3}{2}\left\{tg\frac{A}{2} + tg\frac{C}{2}\right\} - \tfrac{1}{2}\left\{cotg\frac{A}{2} + cotg\frac{C}{2}\right\} = 0,$$

$$3 = \frac{cotg\frac{A}{2} + cotg\frac{C}{2}}{tg\frac{A}{2} + tg\frac{C}{2}} = cotg\frac{A}{2} \cdot cotg\frac{C}{2}$$

mithin

$$cotg\frac{C}{2} = 3\, tg\frac{A}{2}.$$

Aber in jedem Dreiecke ist

$$cotg\frac{B}{2} = tg\frac{A+C}{2} = \frac{cotg\frac{A}{2} + cotg\frac{C}{2}}{cotg\frac{A}{2} \cdot cotg\frac{C}{2} - 1},$$

folglich in dem vorliegenden Falle

$$cotg\frac{B}{2} = \tfrac{1}{2}\, cotg\frac{A}{2} + \tfrac{3}{2}\, tg\frac{A}{2}.$$

Die drei Winkel sind demnach auf den Winkel $A$ zurückgeführt und der oben ausgesprochene Satz lässt sich bestimmter so fassen:

Seien $a = x - d$, $b = x$, $c = x + d$ die drei Seiten eines Dreiecks, so folgen dessen Winkel dem Gesetze, dass auch die Cotangenten ihrer Hälften in arithmetischer Progression stehen, indem $cotg\frac{A}{2} = cotg\frac{A}{2}$, $cotg\frac{B}{2} = \frac{1}{2}\, cotg\frac{A}{2} + \frac{3}{2}\, tg\frac{A}{2}$, $cotg\frac{C}{2} = 3\, tg\frac{A}{2}$ ist.

Für dieses speciellere Dreieck folgt aus 1) auch eine einfachere Formel für den Flächeninhalt, nämlich

$$4)\qquad \Delta = \tfrac{3}{4}\, x\,(x + 2d)\, tg\frac{A}{2}.$$

Dieses Dreieck ist in so weit noch allgemein, als für $x$ und $d$ jeder positive Werth gesetzt werden darf, welcher nur der Bedingung $x > 2d$ entspricht, indem $a + b > c$ sein muss. Der Winkel $A$ hingegen hängt selbst von $x$

und $d$ nach der bekannten Formel ab, welche die Winkel des Dreiecks **aus** den drei Seiten finden lehrt und welche hier die Gestalt besitzt:

$$5)\qquad tg\,\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{x-2d}{3(x+2d)}}.$$

Es liegt nun nahe, noch eine dieser zwei wenigstens bedingungsweise willkürlichen Grössen $x$, $d$ dadurch zu bestimmen, dass eine Eigenschaft des Dreiecks hinzutrete, welche bei einem Dreiecke von arithmetisch fortschreitenden Seiten wirklich stattfindet. Bei dem pythagoräischen Dreiecke setzt die Maasszahl des Flächeninhaltes die arithmetische Reihe der Seiten fort. Soll also in unserer Bezeichnung $\varDelta = x + 2d$ sein, so folgt durch Substitution dieses Werthes in 4), dass

$$tg\,\frac{A}{2}=\frac{4}{3x}$$

sein muss, und dieser Werth in Verbindung mit 5) liefert die Grösse

$$d=\frac{3x^3-16x}{6x^2+32}.$$

Ein solches Dreieck, dessen Seiten und Flächeninhalt in arithmetischer Reihe folgen, entsteht daher durch die Annahme

$$6)\qquad a=\frac{3x^3+48x}{6x^2+32},\quad b=x,\quad c=\frac{9x^3+16x}{6x^2+32}.$$

In der That folgt aus diesen Seiten der Flächeninhalt

$$\varDelta=\frac{6x^3}{3x^2+16}$$

und für die Winkel folgen die Werthe:

$$cotg\,\frac{A}{2}=\frac{3x}{4},\quad cotg\,\frac{B}{2}=\frac{3x}{8}+\frac{2}{x},\quad cotg\,\frac{C}{2}=\frac{4}{x},$$

welche den früher angegebenen Zusammenhängen gehorchen.

Die Werthe 6) sind aber keiner weiteren Bedingung unterworfen, als dass die Differenz $d$ positiv sei, d. h. $\frac{3x^3-16x}{6x^2+32}>0$ oder $x>\frac{1}{3}\sqrt{48}$ also etwa

$$x\geqq\tfrac{7}{3},$$

z. B. $x=3$ giebt $a=\frac{225}{86}$, $b=3$, $c=\frac{291}{86}$, $\varDelta=\frac{162}{43}$.

Ganz anders verhält es sich, wenn man die Bedingung hinzugefügt wissen will, dass $a$, $b$, $c$, $\varDelta$ nicht blos rationale, sondern auch **ganze** Zahlen seien. Dann muss ausser $x$ auch $d$ eine ganze Zahl sein; d. h.

$$d=\frac{3x^3-16x}{6x^2+32}$$

muss in ganzen Zahlen aufgelöst werden.

Aus dieser Gleichung folgt aber

$$x=d\left(\frac{6x^2+32}{3x^2-16}\right)=2d+\frac{64d}{3x^2-16}.$$

Es muss also $\frac{64d}{3x^2-16}$ eine ganze Zahl sein, oder durch Substitution des Werthes von $d$,

$$\frac{64x}{6x^2+32}$$

muss eine ganze Zahl sein. Das ist nur dann möglich, wenn

$$6x^2+32 \leqq 64x$$
$$x \leqq 10.$$

Da wir ausserdem wissen, dass in ganzen Zahlen $x \geqq 3$ sein muss, so sind nur die Werthe $x=3$ bis $x=10$ zu probiren, und von diesen liefert nur $x=4$ die ganzen Werthe $a=3$, $b=4$, $c=5$, $\Delta=6$.

Endlich ist das pythagoräische Dreieck das einzige rechtwinklige von den verlangten Eigenschaften. Denn bei $C=90^0$ ist $cotg\,\frac{C}{2}=\frac{4}{x}=1$, also $x=4$.

CANTOR.

---

**XXIV. Ueber eine Aufgabe aus der analytischen Mechanik.** Diese schon bekannte Aufgabe lautet: Es wird eine Curve von der Beschaffenheit gesucht, dass die Zeit, welche ein materieller Punkt braucht, um den Bogen zu beschreiben, in einem constanten Verhältnisse $k$ zu der Zeit stehe, die derselbe Punkt brauchen würde, um die entsprechende Sehne durchzulaufen, vorausgesetzt, dass der Punkt 1) der Wirkung der Schwere, 2) der Wirkung einer Kraft unterworfen ist, welche von einem festen Punkte herrührt und der Entfernung proportional ist (Fig. 8, Taf. III).

Diese Aufgabe wurde successive von Saladini*), Fuss**), Serret und Ossian Bonnet***) behandelt; allein es ist, so viel ich weiss, bis jetzt noch nicht bemerkt worden, dass man in beiden Fällen, nicht nur für $k=1$, sondern auch für jedes $k$ zu derselben Differentialgleichung

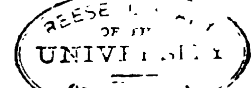
$$1)\qquad k\,.\,(d\varrho+\varrho\,tang\,\Theta\,.\,d\Theta)=\sqrt{d\varrho^2+\varrho^2 d\Theta^2}$$

gelangt, wenn $\varrho$, $\Theta$ die Polarcoordinaten der gesuchten Curve bezeichnen. Dies führt zu dem merkwürdigen Resultate, dass vorstehende Gleichung, wenigstens für diese beiden Fälle, unabhängig von der wirkenden Kraft sowohl, als auch von der Lage des Wirkungsmittelpunktes (*centre d'action*) ist, und mithin zu der Frage, ob diese Independenz nicht allgemein sei.

Bezeichnen nun $t_1$, $t_2$ respective die Zeiten, welche der materielle Punkt braucht, um den Bogen und die ihm entsprechende Sehne durch-

---

*) *Memorie dell' Instituto Nazionale Italiano.* Bd. I, Th. II, S. 43. 1806.
**) *Mémoires de l'Académie des sc. de St. Petersbourg* 1824, Bd. IX, S. 91.
***) *Journal de Liouville,* Bd. IX, S. 28, 116. 1844.



zulaufen; $r$ und $a$ die Entfernungen der Punkte $M$, $O$ vom Wirkungsmittelpunkte $A$ (wenn $O$ der Anfangspunkt der Bewegung ist), $F(r)$ die wirkende Kraft; setzt man $F_1(r) = \int F(r)\,dr$, so ergiebt sich

$$2)\qquad t_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\int\limits_0^s \frac{ds}{\sqrt{F_1(r) - F_1(a)}},\qquad t_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\int\limits_0^\varrho \frac{(d\varrho)}{\sqrt{F_1(r) - F_1(a)}}.$$

Es ist dabei zu bemerken, dass, wenn man zur Auffindung der Gleichung 1) zugleich $\varrho$ und $\Theta$ variiren lässt, $(d\varrho)$ eine specielle Bedeutung hat. Denkt man sich nämlich zwei unendlich nahe liegende Vectoren $OM$, $ON$, und auf $ON$ die Strecke $OM'$ so abgeschnitten, dass derselbe materielle Punkt, unter der Wirkung der Kraft $F(r)$, die Strecken $OM$, $OM'$ in gleichen Zeiten zurücklegt, so ist das Stück $M'N = (d\varrho)$, und entspricht dem Zeitincremente $dt_2$. Nun erhält man aus 2) die Werthe von $ds$ und $(d\varrho)$ als Function der Kraft $F(r)$ und der Zeit:

$$ds = \sqrt{2}\,\sqrt{F_1(r) - F_1(a)}\,.\,dt_1,\qquad (d\varrho) = \sqrt{2}\,\sqrt{F_1(r) - F_1(a)}\,.\,dt_2,$$

und durch Division

$$\frac{ds}{(d\varrho)} = \frac{dt_1}{dt_2};$$

woraus die Kraft eliminirt worden und somit die fragliche Independenz der Gestalt der gesuchten Curve von der Kraft bewiesen ist.

Zusatz. Aus der Vergleichung dieser letzten Gleichung mit 1) folgt

$$(d\varrho) = d\varrho + \varrho\, d\Theta\,.\, tang\,\Theta = NM' = Nm + mM',$$

wenn $Om = OM$ gemacht wird; daraus folgt aber

$$mM' = \varrho\, d\Theta\,.\, tang\,\Theta,$$

also

$$\angle\, mM'M = \frac{\pi}{2} - \Theta = SOM;$$

und wenn man sich einen Kreis durch die Punkte $O$, $M'$, $M$ denkt, so ergiebt sich, dass $OS$ die Berührende des Kreises bei $O$ ist, dass also der Mittelpunkt desselben auf der Verbindungslinie von $O$ mit dem Centrum $A$ liegt. Nach der frühern Bestimmungsweise der Punkte $M$, $M'$ ist aber der geometrische Ort derselben nichts Anderes als die Synchrone (*la courbe synchrone*) aller bei $O$ zusammenlaufenden Geraden. Als Endresultat ergiebt sich also, dass diese letztere unabhängig von der wirkenden Kraft und der Lage des Wirkungsmittelpunktes, und zwar ein Kreis ist, dessen Mittelpunkt auf der Verbindungslinie $OA$ liegt, und dessen Halbmesser gleich der in dieser Richtung, unter den Umständen der jedesmaligen Aufgabe, vom materiellen Punkte zurückgelegten Strecke ist, wie dies für die zwei einfacheren Fälle der Schwere und einer der Entfernung proportionalen Kraft direct bewiesen werden kann.

Leipzig. E. Bacaloglo.

**XXV. Zu der Quadratur der Epicycloide und der Hypocycloide.** Von der Cycloide ist folgender Satz bekannt (Schlömilch's Compendium der höheren Analysis Cap. XIV, §. 64d):

> Die Scheiteltangente schliesst mit der Senkrechten, welche auf sie aus einem Endpunkte einer zu ihr parallelen Cycloiden-Sehne gefällt wird, ein Flächenstück ein, welches halb so gross ist als der zwischen der Scheiteltangente und jener Sehne liegende Abschnitt des Rollkreises.

An Formeln für die Quadratur der Epicycloide und der Hypocycloide fehlt es zwar nicht, aber keine, der mir bekannten wenigstens, bietet irgend eine Analogie zu dem obigen Satze dar, während doch zu vermuthen ist, dass ein allgemeinerer Satz von der Epicycloide giltig ist, welcher denjenigen von der Cycloide als besonderen Fall in sich enthält. Die Entwickelung dieses allgemeineren Satzes bildet den Gegenstand der folgenden Zeilen.

Der Rollkreis habe seinen Mittelpunkt in $M_0$, wenn sich der beschreibende Punkt im Scheitel $S_0$ der Epicycloide als dem einen Endpunkt desjenigen Rollkreisdurchmessers befindet, dessen anderer Endpunkt $T_0$ auf den um den Mittelpunkt $N$ beschriebenen Bahnkreis tritt. Der beschreibende Punkt habe die Epicycloide von $S_0$ bis $P$ erzeugt, wenn der Mittelpunkt des Rollkreises die Lage $M$ einnimmt und der Endpunkt $T$ eines Durchmessers $ST$ auf den Bahnkreis tritt, so wird $SMP$ den in der Folge mit $\Theta$ bezeichneten Rollungswinkel darstellen. Setzen wir ferner

$$MT = a, \quad NT = b, \quad \frac{a}{b} = m, \quad \angle T_0NP = \varphi, \quad NP = r,$$

so wird $\angle T_0NT = m\Theta$, und der doppelte Inhalt des Epicycloidenausschnittes $S_0NP$ durch $\int_0^\varphi r^2 d\varphi$ angegeben. Zum Zweck der Ausführung des Integrals ziehen wir aus der Betrachtung des Dreiecks $NMP$ die Gleichungen:

$$1) \qquad \begin{cases} r \sin(\varphi - m\Theta) = a \sin\Theta, \\ r \cos(\varphi - m\Theta) = a \cos\Theta + a + b, \end{cases}$$

differenziiren dieselben und erhalten:

$$dr \,.\, \sin(\varphi - m\Theta) + r\cos(\varphi - m\Theta) \,.\, (d\varphi - m\,d\Theta) = a\cos\Theta \,.\, d\Theta,$$
$$dr \,.\, \cos(\varphi - m\Theta) - r\sin(\varphi - m\Theta) \,.\, (d\varphi - m\,d\Theta) = -a\sin\Theta \,.\, d\Theta,$$

durch Elimination von $dr$ sodann:

$$r(d\varphi - m\,d\Theta) = a \,.\, \cos\left\{\varphi - (m+1)\Theta\right\} \,.\, d\Theta$$

oder:

$$r^2 \frac{d\varphi}{d\Theta} = mr^2 + ar \,.\, \cos\left\{\varphi - (m+1)\Theta\right\}.$$

Die Gleichungen 1) aber wiederum geben:

$$r^2 = (a + b)^2 + a^2 + 2a(a + b)\cos\Theta$$
$$r\cos[\varphi - (m + 1)\Theta] = a + (a + b)\cos\Theta$$

somit, nach einigen Umwandlungen:

$$r^2 \frac{d\varphi}{d\Theta} = a^2 (m + 1)\left(2 + \frac{1}{m}\right)(1 + \cos\Theta)$$

und der doppelte Inhalt des Epicycloiden Ausschnitts $S_0 N P$:

$$\int_0^\Theta r^2 \frac{d\varphi}{d\Theta} \cdot d\Theta = a^2 (m + 1)\left(2 + \frac{1}{m}\right)(\Theta + \sin\Theta) = \frac{a}{b}(a + b)(2a + b)(\Theta + \sin\Theta)$$

Dieser Ausdruck kann zum Zweck der geometrischen Deutung in folgende Gestalt gebracht werden:

$$\frac{a}{b}(2a + b)^2 \cdot \Theta - \frac{a^2}{b}(2a + b)\Theta + \frac{a^2}{b}(2a + b)\sin\Theta + a(2a + b)\sin\Theta$$
$$= (2a + b)^2 \cdot m\,\Theta + a(2a + b)\sin\Theta - (2m + 1) \cdot a^2 \cdot (\Theta - \sin\Theta).$$

Das erste Glied ist der doppelte Inhalt des Ausschnitts $N S_0 S$ eines zum Bahnkreis concentrischen Kreises, das zweite Glied derjenige des Dreiecks $N S P$, und $a^2(\Theta - \sin\Theta)$ derjenige des Abschnitts $S P$ vom Rollkreis. Es bleibt also, wenn Gemeinschaftliches angenommen wird:

Fläche $S_0 S P = (2m + 1)$ . Abschnitt $S P$.

In Worten, wenn bemerkt wird, dass $S P$ Tangente der Epicycloide ist, und $2m + 1 = \frac{2a + b}{b}$: Irgend eine Tangente der Epicycloide schneidet von der Fläche zwischen dem betreffenden Curven-Ast und dem sämmtliche Aeste in ihren Scheiteln berührenden Kreise, und als Sehne des Rollkreises vor diesem, solche Stücke ab, welche im Verhältniss des grössten und kleinsten Abstands des Rollkreis-Umfangs vom Bahnkreis-Mittelpunkt stehen.

Für die Hypocycloide ist $m$ negativ zu nehmen.

Für die Cycloide wird der besagte Berührungskreis Scheitel-Tangente, ferner $b = \infty$, somit $m = \frac{a}{b} = 0$, also:

Fläche $S_0 S P$ = Abschnitt $S P$.

Addirt man zu beiden Flächen die congruenten rechtwinkligen Dreiecke, welche $S P$ mit den aus $P$ auf $S T$ und die Scheiteltangente gefällten Senkrechten bestimmt, so ergiebt sich der am Anfang vor der Cycloide ausgesprochene Satz.

Stuttgart, 27. April 1859. C. W. Baur.

---

**XXVI. Ueber die Krümmung der Flächen.** Von der Gauss'schen Definition der Krümmung der Flächen ausgehend, werde ich im Folgenden, bei geringer Aenderung der Ableitungsweise, eine auf abwickelbare Flä-

chen gleichfalls anwendbare Formel zur Messung der Krümmung aufzustellen versuchen.

Man betrachte einen Flächenpunkt und eine diesen Punkt in sich einschliessende, auf der Fläche so gezogene Linie, dass auf allen durch den betrachteten Punkt gelegten normalen Schnitten, von diesem Punkte aus, der constante Bogen $ds$ abgeschnitten werde, und sei $\omega$ die von dieser Linie begrenzte Oberfläche; man denke sich ferner durch alle Peripheriepunkte der erwähnten Linie die Normalen zu der Fläche, und von dem Mittelpunkte einer Kugel mit dem Radius $= 1$ Parallelen zu diesen Normalen gezogen, welche auf der Kugel einen gewissen Flächenraum $\Theta$ begrenzen, und sei $d\sigma$ der jedem $ds$ entsprechende veränderliche Kreisbogen auf der Kugel; es bezeichnen endlich $R_1$, $R_2$ die den beiden Hauptschnitten der Fläche $\varrho$ den dem normalen Schnitte im Azimute $\varphi$ entsprechenden Krümmungshalbmesser; so ist, da man die Flächen $\Theta$, $\omega$ an der Grenze als eben ansehen kann und $ds$ constant bleibt, die gesuchte Krümmung

$$1)\quad \lim.\frac{\Theta}{\omega} = \lim.\frac{\int_0^{2\pi} d\sigma^2 . d\varphi}{\int_0^{2\pi} ds^2 . d\varphi} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{d\varphi}{\varrho} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} d\varphi\left(\frac{\cos^2\varphi}{R_1} + \frac{\sin^2\varphi}{R_2}\right)$$

$$= \tfrac{1}{4}\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)^2 + \tfrac{1}{8}\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right)^2 = \frac{1}{\delta^2} + \tfrac{1}{8}\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right)^2,$$

wenn $\delta$ den Halbmesser der mittleren Krümmung darstellt. Für ein negatives $R_2$ wird

$$\tfrac{1}{4}\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right)^2 + \tfrac{1}{8}\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)^2 = \frac{1}{\delta_1^2} + \tfrac{1}{8}\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)^2.$$

Ist überdies $R_2$ absolut genommen $= R_1$, so reducirt sich der Ausdruck zu $\frac{1}{2R_1^2}$; und für $R_2 = \infty$, zu $\frac{1}{\frac{8}{3}R_1^2}$.

Ein von 1) etwas abweichender, für den Fall, wo $rt - s^2 \gtreqless 0$ aber nicht anwendbarer Ausdruck für die Krümmung ergiebt sich, wenn man vorstehende Voraussetzungen so umändert, dass $d\sigma$ constant bleibt, indem $ds$ variirt. Man findet alsdann

$$2)\quad \lim.\frac{\Theta_1}{\omega_1} = \frac{2\pi}{\int_0^{2\pi}\varrho^2\, d\varphi} = \frac{\frac{1}{2}\pi}{R_1^2\int_0^{2\pi}\frac{(1 + \tan^2\varphi)\, d.\tan\varphi}{\left(1 + \frac{R_1}{R_2}\tan^2\varphi\right)}} = \frac{1}{\frac{R_1 + R_2}{2}\cdot\sqrt{R_1 R_2}}.$$

Man darf sich nicht wundern, wenn sich für dieselbe Grösse verschiedene Ausdrücke finden lassen. Da nämlich alle diese unter die gemein-

schaftliche Form $\frac{1}{M^2}$ gebracht werden können, so drückt $M$ den Halbmesser derjenigen Kugel aus, welche in der Umgebung des betrachteten Punktes mit der Fläche zusammenfallen, also dieselbe Krümmung mit dieser haben, und mithin die osculirende Kugel derselben sein würde. Da aber im Allgemeinen eine solche Kugel nicht vorhanden ist, so kann $M$ weiter Nichts bedeuten, als den Halbmesser einer Kugel, welche sich der gegebenen Fläche, im betrachteten Punkte mehr oder weniger genau anschliesst, und es wird durch die verschiedenen Formeln, wenigstens bei der Gauss'schen Anschauungsweise, welche sonst die geeignetste ist, eine leichte Uebersicht der Krümmung der Flächen zu geben, nur ein höherer oder niederer Grad von Annäherung erzielt. Wenn nun aber die Gauss'sche Formel $\frac{1}{R_1 R_2}$ für die abwickelbaren Flächen unbrauchbar wird, so sprechen dafür einerseits die von Cournot*) angeführten Gründe, andererseits ist aber zu bemerken, dass in diesem Falle die auf der Kugel begrenzte Fläche I die Form II annimmt, also nicht durch $4\,d s_1 \,.\, d s_2$ ausgedrückt werden kann, wie dies im Falle I geschieht (siehe Fig. 9 u. 10, Taf. III). Es liegt also der Grund dieser scheinbaren Anomalie in der Natur der Sache selbst, nicht aber darin, dass die Gauss'sche Methode, wie es von einem gewissen Dr. Renard vor Kurzem behauptet wurde, auf einer Formenanalogie eher, als auf einer inneren reellen beruht, und man wird gewiss nicht sehr geneigt sein, zur Unterstützung der von Sophie Germain gegebenen Formel $\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$, die Krümmung der Flächen, nach demselben Dr. Renard,**) als die Grenze des (offenbar nicht homogenen) Verhältnisses $\frac{\omega}{d s}$ zu definiren, in welchem $d s$ dieselbe Bedeutung hat wie im Eingange dieses Aufsatzes, $\omega$ aber den Flächenraum bedeutet, der auf der Kugel mit dem Radius $= 1$ den körperlichen Winkel misst, welcher vor der Berührungsebene und den durch die Extremitäten von $d s$ an die verschiedenen normalen Schnitte gezogenen Tangenten, unter der Voraussetzung, dass diese im betrachteten Punkte zusammenlaufen, gebildet wird.

E. Bacaloglo.

---

**XXVII. Die Professur des Ramus.** Zum Beweise der hohen Meinung, welche Ramus von deutscher Gelehrsamkeit hatte, führte ich Bd. II, S. 357 die Stelle seiner *Schol. math.* an, in welcher er einen Gelehrten, vor Allen

*) *Théorie des fonctions, sec. édit. I vol. p.* 403.

**) *Thèse de doctorat soutenue devant la faculté des sciences de Paris,* 1856.

einen deutschen Gelehrten auffordert, fern von Hypothesen die Astronomie rein auf Thatsachen und Berechnungen zu gründen. Ich bemerkte damals, wie komisch es erscheine, wenn ein Flüchtling über eine Stelle verfüge, die ihm selbst nicht mehr zu Gebote stehe, und zeigte die Alternative, dass man annehmen müsse, die bereits 1567 für sich erschienene Einleitung sei 1569 trotz total veränderten Verhältnissen den *Scholis mathematicis* in wörtlichem Abdrucke angereiht worden, oder aber, dass man die wahrscheinlichere Auffassung Raum greifen lasse, es habe Ramus die testamentarisch von ihm aus eigenen Mitteln gegründete Professur im Auge gehabt. Da über diesen Gegenstand nicht viel bekannt ist, so dürfte es von Interesse sein, einen inzwischen von Frisch veröffentlichten Brief Keplers (*Joannis Kepleri astronomi Opera omnia edidit Ch. Frisch. I. pag.* 34) anzuführen, welcher zwar auch jene Frage, welche Professur gemeint sei, nicht direct beantwortet, aber doch die Vermuthung sehr unterstützt, dass eine wörtliche Auffassung die richtigere ist. Kepler schreibt nämlich im September 1597 an seinen ehemaligen Lehrer Maestlin in Tübingen:

. . . . *Non possum te Clarissime Domine praeceptor non certiorem reddere, mihi pro edito libello hunc honorem a Gallis habere, ut Regius professor Lutetiae Parisiorum ex pacto constitutus ego sim, aut certe illum, qui haec ad me scripsit, stultum fuisse necesse sit. Qui a vero is, qui mihi loco cedere volebat, interea mortuus est et procul dubio diversae sententiae successorem jam reliquit, ideo decrevi, quoad Deo placuerit, spreta regia professione in Styria manere. Exemplar epistolae ad me missae tibi transmitterem, nisi mihi constaret, te id pridem habere. Scripta est anno* 1569 *biennio ante me natum. Autor Ramus est in scholis suis (non Geometria) Goometricis folio* 49 *et* 50. *Quo loco Ramus praemium confirmate absque hypothesibus astrologiae spondet suae professionis cessionem. Si Ramus illas exterminatas cupit hypotheses, quae ut credantur postulantur, non probantur, et si hanc absque hypothesibus astronomiam laudat quae solius naturae apparatu orbium coelestium contenta est, quod quidem ante et post omnino innuere videtur: vicinus vel Ego vel Copernicus, vel uterque simul, nobisque professio debetur Ramea. Sin autem Ramus omnes omnino hypotheses rejicit seu veras et naturales, seu falsas, tum id est, quod supra dixi, stultus nempe, idque ut opinor vel te judice. Verum ut utriusque honori cousulatur, malo me professorem regium quam Romum stultum appellare. Hoc unum est.*

Es ist fast überflüssig, zu bemerken, dass Kepler unter dem Werke, über welches er so siegestrunken scherzt, seine Erstlingsschrift, das *Mysterium cosmographicum*, versteht. Die begeisterte Freude über seine Entdeckungen, welche nur er selbst zu würdigen wusste, bildet einen treffenden Zug seines Characters und spricht sich in den meisten seiner Werke aus, ganz besonders in der einigermassen mit mystischen Floskeln durchwebten *Harmonica mundi* (*Lincii* 1619). CANTOR.

---

**XXVIII. Bewegungserscheinungen im Kreise der galvanischen Kette, welche nicht durch das Ampère'sche Gesetz erklärt werden.** Bereits im 104. Bd., S. 413 von *Pogg. Annal.* machte Paalzow Mittheilungen über dergleichen Bewegungserscheinungen. Er legte auf eine Kupferplatte, welche mit dem einen Pole einer galvanischen Kette verbunden war, ein dünnes Platinblech, hierauf setzte er einen cylindrischen Halbring von gutleitender Kohle so auf das Platinblech, dass derselbe, das Blech in einer geraden Linie berührend, leicht in Schwankungen versetzt werden konnte. In der einen der ebenen Schnittflächen, welche durch die Halbirung des ganzen concentrischen Cylinderringes durch einen durch dessen Axe geführten Schnitt entstanden sind, befand sich eine kleine Grube und in dieser Quecksilber, in welches ein dünner, mit dem andern Pol der Kette verbundener Platindraht eintauchte. Als nun durch das beschriebene Leitersystem ein elektrischer Strom von hinlänglicher Stärke geleitet wurde, gerieth die Kohle in eine andauernde wiegende Bewegung. Bei dem Versuche, diese Bewegung durch das Ampère'sche Gesetz zu erklären, bemerkt man sogleich, dass die Einwirkung des Stromes im Zu- und Ableitungsdraht auf den Kohlenwieger nur sehr gering sein kann. Durch einige Versuche hat übrigens Paalzow bestimmt nachgewiesen, dass bei seinen Versuchen, wobei die Kohle in eine wiegende Bewegung gerieth, die electrodynamische Abstossung zwischen Platindraht und Kohle viel zu gering war, um letztere niederzudrücken, indem er nämlich die Kohle durch ein leicht bewegliches Messingstück, leichter als die Kohle ersetzte, bei welchem ein Strom von gleicher Stärke, als der zum Wiegen der Kohle angewendete, keine electrodynamische Abstossung hervorbrachte. Zugleich zeigte Paalzow, dass die von der Pole zum Platinblech übergehenden Funken das Platinblech an der Uebergangsstelle plötzlich so stark erhitzen, dass man daselbst eine Ausbiegung desselben sehen kann. In Folge dessen giebt er von dieser Erscheinung die Erklärung, dass an der Uebergangsstelle der Funken zwischen Kohle und Blech das letztere ausgebogen und so die Unterstützungsstelle der Kohle gehoben wird, die Kohle bewegt sich nun und berührt das Blech an einer andern Stelle, woselbst sie gehoben und wieder eine andre Stelle derselben zur Berührung mit dem Blech gebracht wird. So kommt dann auf ähnliche Weise wie beim Trevelyaninstrument eine regelmässige wiegende Bewegung zu Stande.

Aehnliche Erscheinungen, wahrscheinlich ebenfalls auf thermischen Wirkungen des electrischen Stromes beruhend, sind von Gore (siehe *Pogg. Annal.* Bd. 107, S. 455) mitgetheilt worden. Hierzu veranlasste denselben eine in einer Electro-Vergoldungsanstalt in Birmingham beobachtete Erscheinung, nämlich die, dass eine Messingröhre ($\frac{1}{2}''$ Durchmesser und 4$'$ Länge), die quer über zwei parallelen Schienen lag, zu wanken begann, als ein elektrischer Strom durch die Schienen geleitet wurde, indem jede Schiene mit dem Pol einer starken Batterie verbunden wurde, wobei der

Strom durch die eine Schiene, hierauf durch die Röhre und dann durch die andere Schiene zurückging. Nachdem die Röhre einige Zeit gewankt hatte, war sie auf den Schienen fortgerollt. Gore hatte, um diese Erscheinung zu studiren, Schienen von verschiedenem Metall und verschiedenen Dimensionen angewendet, ebenso hatte derselbe Hohlcylinder und Hohlkugeln von verschiedenen Dimensionen probirt und war hierbei zu folgenden Resultaten gelangt. Eine fortdauernd rollende Bewegung (auf einer kreisförmig geschlossenen Schienenbahn) zu erreichen; erfolgt weder bei sehr geringem noch sehr grossem Gewicht von Kugeln oder Röhren. Wo sie eintritt, bemerkt man auch immer ein knackendes Geräusch und oft Funkenübergang auf der der Bewegungsrichtung abgewendeten Seite der Kugeln oder Röhren, welche sich während des Rollens stark erhitzen. Bei starken Röhren, die bei Versuchen in grösserem Massstabe angewendet wurden, war die Erscheinung mit starken Vibrationen und musikalischen Tönen ähnlich wie beim Trevelyaninstrument verknüpft. Die Erscheinung tritt bei Strömen nicht ein, die so stark sind, dass das Metall an den Contactstellen zwischen Röhre und Schienen geschmolzen wird. Die Richtung, in welcher Kugeln oder Röhren sich zu bewegen anfangen, hängt nicht von der Stromrichtung ab, die genannten Gegenstände treten ihre Bewegung bald in der einen, bald in der andern Richtung an.

Gore selbst scheint geneigt zu sein, das Rollen der Kugeln und Röhren auf dieselbe Weise zu erklären, als den Paalzow'schen Versuch, nämlich durch fortwährende Hebung der Unterstützungspunkte der Kugeln oder Röhren. Ob diese Erklärung ausreichend ist, müssen spätere Versuche zeigen; bis jetzt sind über den Gegenstand Mittheilungen von Forbes (s. *Pogg. Annal.* Bd. 107, S. 458) und von Lerouz (s. *Pogg. Annal.* Bd. 107, S. 461) gemacht worden, welche jedoch wohl noch nicht zureichen, um ein entscheidendes Urtheil über die Zulässigkeit oder Unzulässigkeit der Gore'schen Erklärung abzugeben.

E. Kahl.

---

**XXIX. Beweis, dass die Combinationstöne objectiv sind.** Dove (Monatsberichte der Berl. Acad. 1859. Mai, *Pogg. Annal.* Bd. 107, S. 652) führt folgenden, in dieser Beziehung entscheidenden Versuch an. Von zwei Stimmgabeln mit dem Tonunterschied einer reinen Quinte wurde die eine vor das rechte Ohr, die andere im tönenden Zustande vor das linke Ohr gehalten. Hierbei wurde die den beiden Tönen als Combinationston entsprechende tiefere Octave nicht gehört, dieselbe trat aber sehr deutlich hervor, sobald beide Stimmgabeln gleichzeitig vor einem und demselben Ohre tönten. In ersterem Falle vernahm man gleichzeitig beide Töne, woraus man erkennt, dass nicht wie beim Auge ein gemeinsamer Eindruck hervorgebracht wird, sobald beide Augen, wie beim Stereoscop, etwas ver-

schiedene perspectivische Ansichten desselben Gegenstandes oder verschiedene Farbeneindrücke erhalten.

Der Dove'sche Versuch steht keineswegs mit der Hypothese von Helmholtz über die Combinationstöne in Widerspruch, indem er zeigt, dass die Combinationstöne nicht durch Vermischung von Toneindrücken im Gehirn entstehen. Nach der Ansicht von Helmholtz (*Pogg. Annal.* Bd. 99, S. 497) entstehen Combinationstöne nur bei starken primären Tönen, bei denen die Elongationen der schwingenden Körpertheilchen so gross sind, dass die elastische Rückwirkung nicht nur vom Ausschlag selbst, sondern auch vom Quadrate desselben abhängig ist. Hierbei findet die einfache Uebereinanderlagerung der Wirkungen nicht mehr statt, wenn Luftwellen, von zwei Tonerregern herrührend, zugleich auf einen Körper einwirken, welcher unsymmetrisch befestigt ist; es tritt im Gegentheil anstatt der zwei ursprünglichen starken Töne allein von den Schwingungsmengen $a$ und $b$ das Aggregat folgender schwächern Töne auf:

$$a,\quad b$$
$$2a,\quad a-b,\quad a+b,\quad 2b$$
$$3a,\quad 2a-b,\quad 2a+b,\quad a-2b,\quad a+2b,\quad 3b$$

etc.

Helmholtz, der den mathematischen Beweis dieses Satzes nur für einen Massenpunkt mitgetheilt, nach seiner Angabe jedoch auch für ein System von Massen geführt hat, ist der Meinung, dass die Wahrnehmung von Combinationstönen oft auf die Weise geschehe, dass die starken primären Töne das unsymmetrisch befestigte Trommelfell in Schwingungen versetzte, welches statt derselben allein ein System von Combinationstönen (Summations- und Differenztönen) in das Innere entsende — und mit dieser Ansicht steht Dove's Versuch vollkommen im Einklange. E. Kahl.

## XII.

# Ueber Fusspunktlinien beliebiger Ordnungen.

Von Franz Wetzig,
stud. math. in Leipzig.

Unter der Fusspunktlinie einer gegebenen Curve, der Basis, in Bezug auf einen gegebenen Punkt, den Pol, versteht man bekanntlich den geometrischen Ort der Fusspunkte der von dem Pol auf die Berührenden der Basis gefüllten Lothe. Die Basis wird hier als eine ebene Curve und der Pol in ihrer Ebene liegend vorausgesetzt. Construirt man zur Fusspunktlinie von demselben Pol aus wieder die Fusspunktlinie, so soll diese in Bezug auf die ursprüngliche Basis Fusspunktlinie zweiter Ordnung, deren Fusspunktlinie eine solche dritter Ordnung u. s. f. heissen. In Bezug auf die Fusspunktlinie von der Ordnung $+n$ als Basis soll die ursprüngliche Basis Fusspunktlinie $-n$ genannt werden. Unter einer Fusspunktlinie schlechthin ist die von der Ordnung $+1$ gemeint.

## I. Von den Fusspunktlinien $n^{ter}$ Ordnung im Allgemeinen.

### 1.

### Die Grundformeln.

In Bezug auf den Pol $O$ als Coordinatenanfang sei $r_0$ der Vector eines Punktes $P_0$ der Basis, dessen Anomalie $\varphi_0$; sei $\alpha_0$ der Winkel der Berührenden in $P_0$ mit dem Vector, d. h. die kleinste Drehung um $P_0$ in der positiven Richtung von $\varphi_0$, durch die eine mit dem Vector zusammenfallende Gerade zum Zusammenfallen mit der Berührenden gebracht wird, woraus hervorgeht, dass stets $\alpha_0 < \pi$, also $\sin\alpha_0$ positiv ist. Der Krümmungshalbmesser der Basis im Punkte $P_0$ heisse $\varrho_0$; er werde positiv genommen bei concaver Krümmung gegen den Pol, negativ bei convexer Krümmung. Der Fusspunkt $P_1$ des vom Pol auf die Berührende gefällten Lothes $OP_1$ heisse in Bezug auf $P_0$ als Punkt der Basis der zugehörige Punkt der Fusspunktlinie. Sein Vector $OP_1$ sei $r_1$, seine Anomalie $\varphi_1$, der Winkel der Berührenden der Fusspunktlinie in $P_1$ mit $r_1$ sei $\alpha_1$, der Krümmungshalbmesser $\varrho_1$. Analog soll für den zugehörigen Punkt $P_n$ der Fusspunktlinie $n_{ter}$ Ordnung,

wo $n$ eine positive oder negative ganze Zahl ist, der Vector $r_n$, die Anomalie $\varphi_n$, der Winkel der Berührenden mit dem Vector $\alpha_n$, der Krümmungshalbmesser $\varrho_n$ heissen.

Es sollen nun allgemeine Beziehungen zwischen $r_0$, $\varphi_0$, $\alpha_0$, $\varrho_0$ und $r_n$, $\varphi_n$, $\alpha_n$, $\varrho_n$ aufgestellt werden.

Nimmt man einstweilen $OP_0$ als Nulllinie, ist also $r_0{}^\wedge r_1 = \varphi_1$, so ist

1) für $\alpha_0 > \frac{\pi}{2}$ $\alpha_0$ der Aussenwinkel eines rechtwinkligen Dreiecks $OP_0P_1$ mit dem gegenüberstehenden spitzen Winkel $\varphi_1$, also

$$\alpha_0 = \varphi_1 + \frac{\pi}{2};$$

2) für $\alpha_0 < \frac{\pi}{2}$ ist $\alpha_0$ der Ergänzungswinkel des negativen Winkels $\varphi_1$ zu einem rechten, also

$$\alpha_0 - \varphi_1 = \frac{\pi}{2};$$

mithin ist in beiden Fällen

$$r_0{}^\wedge r_1 = \varphi_1 = \alpha_0 - \frac{\pi}{2}.$$

Für $r_1$ folgt unmittelbar

$$r_1 = r_0 \sin \alpha_0 = r_0 \cos \varphi_1.$$

Nun ist bekanntlich

$$\cot \alpha_1 = \frac{1}{r_1} \frac{d r_1}{d \varphi_1},$$

wofür man aus der vorhergehenden Gleichung durch Differentiation nach $\varphi_1$ den Werth erhält

$$\cot \alpha_1 = - \tan \varphi_1 = - \tan \left(\alpha_0 - \frac{\pi}{2}\right) = \cot \alpha_0.$$

Mithin ist

$$\alpha_1 = \alpha_0;$$

denn die Unbestimmtheit um ein Vielfaches von $\pi$ bewirkt keinen Unterschied in der Lage der Berührenden.

Ebenso ist nun aber

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \ldots\ldots$$
$$\alpha_0 = \alpha_{-1} = \alpha_{-2} = \ldots\ldots,$$

allgemein

$$\alpha_0 = \alpha_n.$$

Es ist also in allen einem gewissen Punkte der Basis zugehörigen Punkten der Fusspunktlinien der Winkel der Berührenden mit dem Vector nach Grösse und Richtung derselbe. Diese Gleichheit lässt sich auch geometrisch sehr leicht zeigen. Seien $P_0$ und $P_0'$ zwei benachbarte Punkte der Basis, ihre Vectoren $r_0$ und $r_0'$, ihre Berührenden $t_0$ und $t_0'$, so ist die Verbindungslinie $t_1$ der

ihnen entsprechenden Punkte $P_1$ und $P_1'$, deren Vectoren $r_1$ und $r_1'$ seien, Berührende der Fusspunktlinie. Es liegen aber die Punkte $O, P_0', P_1', P_1$ auf einem Kreise vom Durchmesser $OP_0'$, dessen Berührende $t_1$ ist, und folgt daraus einfach

$$r_0'^{\wedge}t_0 = r_1{}^{\wedge}t_1,$$

oder, da man $r_0'^{\wedge}t_0 = r_0{}^{\wedge}t_0$ setzen kann,

$$r_0{}^{\wedge}t_0 = r_1{}^{\wedge}t_1.$$

Wird dieser Winkel daher schlechthin $\alpha$ bezeichnet, so hat man

$$r_1 = r_0 \sin \alpha,$$

$$r_2 = r_1 \sin \alpha = r_0 \sin^2 \alpha,$$

$$r_3 = r_2 \sin \alpha = r_0 \cdot \sin^3 \alpha,$$

u. s. w.

$$r_{-1} = \frac{r_0}{\sin \alpha} = r_0 \sin^{-1} \alpha$$

$$r_{-2} = \frac{r_{-1}}{\sin \alpha} = r_0 \sin^{-2} \alpha$$

u. s. w.

allgemein

1) $$r_n = r_0 \cdot \sin^n \alpha.$$

Ebenso leicht ist nun die Bestimmung von $\varphi_n$. Man hat für positive $n$

$$r_0{}^{\wedge}r_1 = \alpha - \frac{\pi}{2},$$

$$r_1{}^{\wedge}r_1 = \alpha - \frac{\pi}{2},$$

. . . . . . .

$$r_{n-1}{}^{\wedge}r_n = \alpha - \frac{\pi}{2},$$

woraus durch Addition folgt:

$$r_0{}^{\wedge}r_n = n\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right).$$

Für negative $n$ ist:

$$r_{-1}{}^{\wedge}r_0 = \alpha - \frac{\pi}{2},$$

$$r_{-2}{}^{\wedge}r_{-1} = \alpha - \frac{\pi}{2}.$$

. . . . . . .

$$r_{-n}{}^{\wedge}r_{-n+1} = \alpha - \frac{\pi}{2},$$

woraus durch Addition folgt:

$$r_{-n}{}^{\wedge}r_0 = n\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right),$$

oder

$$r_0{}^{\wedge}r_{-n} = -n\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right),$$

so dass diese Gleichung aus der vorhergehenden durch Vertauschung von $+n$ mit $-n$ hervorgeht.

Bildet nun $r_0$ mit der beliebig anzunehmenden Nulllinie den Winkel $\varphi_0$, so ist

$$\varphi_n = \varphi_0 + r_0{}^\wedge r_n,$$

also für positive und negative $n$ die Gleichung gültig

$$2) \qquad \varphi_n = \varphi_0 + n\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right).$$

Wegen der Constanz des Winkels $\alpha$ hat man dazu noch die Gleichung

$$3) \qquad \frac{1}{r_0}\frac{d\,r_0}{d\,\varphi_0} = \frac{1}{r_n}\frac{d\,r_n}{d\,\varphi_n}.$$

Aus Gleichung 2) folgt die Differentialgleichung

$$d\,\varphi_n = d\,\varphi_0 + n\,.\,d\,\alpha.$$

Die geometrische Bedeutung von $d\,\alpha$ ergiebt sich durch Differentiation der Gleichung

$$\cot\alpha = \frac{1}{r_0}\frac{d\,r_0}{d\,\varphi_0}$$

nach $\varphi_0$, wodurch man erhält

$$d\alpha = \frac{\left(\frac{d\,r_0}{d\,\varphi_0}\right)^2 - r_0\frac{d^2 r_0}{d\varphi_0{}^2}}{r_0{}^2 + \left(\frac{d\,r_0}{d\,\varphi_0}\right)^2} d\,\varphi_0.$$

Berücksichtigt man nun, dass

$$r_0{}^2 + 2\left(\frac{d\,r_0}{d\varphi_0}\right)^2 - r_0\frac{d^2 r_0}{d\,\varphi_0{}^2} \gtrless 0$$

die Bedingung $\begin{matrix}\text{concaver}\\ \text{convexer}\end{matrix}$ Krümmung gegen den Pol ist, und daher die durch Einsetzung der Werthe von $\varrho_0$ und $\sin\alpha$ in Polarcoordinaten sich ergebende Gleichung

$$\frac{r_0{}^2 + 2\left(\frac{d\,r_0}{d\varphi_0}\right)^2 - r_0\frac{d^2 r_0}{d\,\varphi_0{}^2}}{r_0{}^2 + \left(\frac{d\,r_0}{d\varphi_0}\right)^2} = \frac{r_0}{\varrho_0 \sin\alpha}$$

auch hinsichtlich des Vorzeichens richtig ist, da $\sin\alpha$ stets positiv ist, so erhält man

$$d\,\alpha = \left(\frac{r_0}{\varrho_0 \sin\alpha} - 1\right) d\,\varphi_0.$$

Diese Gleichung lässt sich auch geometrisch sehr einfach herleiten. Es ist nämlich $\frac{r_0\,d\,\varphi_0}{\sin\alpha}$ das Bogenelement, daher $\frac{r_0\,d\,\varphi_0}{\varrho_0 \sin\alpha}$ der Contingenzwinkel zweier benachbarter Krümmungshalbmesser, und ergiebt sich für diesen sogleich aus der Figur

$$\frac{r_0\,d\,\varphi_0}{\varrho_0 \sin\alpha} = d\alpha + d\,\varphi_0.$$

Setzt man diesen Werth in die Gleichung

$$d\varphi_n = d\varphi_0 + n\,d\alpha$$

ein, so erhält man

$$4)\qquad d\varphi_n = d\varphi_0\left[n\left(\frac{r_0}{\varrho_0 \sin\alpha} - 1\right) + 1\right].$$

In dieser Gleichung ist $\frac{r_0}{\varrho_0 \sin\alpha}$ das Verhältniss des Vectors zur Projection des Krümmungshalbmessers auf den Vector.

Für $n = 1$ folgt

$$\frac{d\varphi_0}{d\varphi_1} = \frac{\varrho_0 \sin\alpha}{r_0};$$

in gleicher Weise muss aber sein

$$\frac{d\varphi_n}{d\varphi_{n+1}} = \frac{\varrho_n \sin\alpha}{r_n},$$

und folgt hieraus, wenn man das Verhältniss $\frac{d\varphi_n}{d\varphi_{n+1}}$ aus Gleichung 4) entnimmt

$$5)\quad \frac{\varrho_n \sin\alpha}{r_n} = \frac{n\left(\frac{r_0}{\varrho_0 \sin\alpha} - 1\right) + 1}{(n+1)\left(\frac{r_0}{\varrho_0 \sin\alpha} - 1\right) + 1},$$

welchem Ausdrucke man auch die Formen geben kann:

$$\frac{\varrho_n \sin\alpha}{r_n} = \frac{n - (n-1)\frac{\varrho_0 \sin\alpha}{r_0}}{n + 1 - n\frac{\varrho_0 \sin\alpha}{r_0}} = \frac{1 - \left(1 - \frac{1}{n}\right)\frac{\varrho_0 \sin\alpha}{r_0}}{1 + \frac{1}{n} - \frac{\varrho_0 \sin\alpha}{r_0}}.$$

Da nun $r_n = r_0 \sin^n\alpha$ bekannt ist, so ist in diesem Ausdrucke durch Vector, Berührungswinkel und Krümmungshalbmesser der Basis des zugehörigen Punktes der Fusspunktlinie $n^{\text{ter}}$ Ordnung, und somit überhaupt durch ein Element der Basis das zugehörige irgend einer Fusspunktlinie vollständig bestimmt.

Sei ferner $df_0 = \frac{1}{2} r_0^2\, d\varphi_0$ das von zwei benachbarten Vectoren eingeschlossene Flächenelement der Basis, $df_n = \frac{1}{2} r_n^2\, d\varphi_n$ das zugehörige der Fusspunktlinie $n^{\text{ter}}$ Ordnung, so erhält man unter Berücksichtigung der Gleichungen 1) und 4)

$$6)\qquad df_n = \sin^{2n}\alpha\left[n\left(\frac{r_0}{\varrho_0 \sin\alpha} - 1\right) + 1\right] df_0.$$

Endlich sei $ds_n$ das zum Bogenelement $ds_0$ der Basis gehörige Bogenelement der Fusspunktlinie $n^{\text{ter}}$ Ordnung, so hat man wegen des constanten Winkels $\alpha$ die Proportion

$$ds_0 : ds_n = r_0\, d\varphi_0 : r_n\, d\varphi_n,$$

woraus sich ergiebt

$$7)\qquad ds_n = \sin^n\alpha\left[n\left(\frac{r_0}{\varrho_0 \sin\alpha} - 1\right) + 1\right] ds_0.$$

Aus Gleichung 3) folgt noch die Relation zwischen den Differentialen der Vectoren

$$8)\qquad d\,r_n = \sin^n\alpha\left[n\left(\frac{r_0}{\varrho_0 \sin\alpha} - 1\right) + 1\right] d\,r_0.$$

Vermöge dieser Gleichungen sind nun, wenn die Basis gegeben ist, die Berührenden und Krümmungshalbmesser, die Quadratur und Rectification aller ihrer Fusspunktlinien bestimmt.

## 2.

Wir knüpfen zunächst an die Constanz des Winkels $\alpha$ und die daraus sich ergebenden Formeln 1) und 2)

$$r_n = r_0 \sin^n\alpha$$

und

$$\varphi_n = \varphi_0 + n\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right)$$

an.

1) Die logarithmische Spirale ist die einzige Curve, bei welcher der Winkel $\alpha$ für alle ihre Punkte derselbe ist. Ihre Fusspunktlinien müssen daher gleiche, nur durch Drehung verschiedene logarithmische Spiralen sein. In der That erhält man, wenn man in Gleichung 1) $r_0 = a\,.\,e^{\varphi\,.\,\cot\alpha}$ einsetzt und $\varphi_n$ statt $\varphi_0$ einführt

$$r_n = a \sin^n\alpha\, e^{-n\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right)\cot\alpha}\, e^{\varphi_n\,.\,\cot\alpha},$$

woraus eine Drehung um

$$n\left(\frac{lg \sin\alpha}{\cot\alpha} - \alpha + \frac{\pi}{2}\right)$$

folgt.

2) Ein bestimmter Winkel der Berührenden gegen den Vector kommt bei allen zusammengehörigen Fusspunktlinien gleich oft vor. Daher lassen sich auf alle vom Pol aus gleich viel Normalen fällen und an alle gleich viel Berührende legen. Die Fusspunkte dieser Normalen sind für alle Linien gemeinschaftliche Berührungspunkte. Jede Fusspunktlinie positiver Ordnung geht so oft durch den Pol und jede negativer Ordnung hat so viele unendliche Vectoren, als sich vom Pole Berührende an die Basis legen lassen (d. h. so oft $\alpha = 0$ wird), und zwar berühren die positiver $\frac{\text{gerader}}{\text{ungerader}}$ Ordnung sich im Pol und stehen auf denen $\frac{\text{ungerader}}{\text{gerader}}$ Ordnung senkrecht, während die unendlichen Vectoren der Linien negativer $\frac{\text{gerader}}{\text{ungerader}}$ Ordnung in eine Gerade fallen und auf denen der Linien $\frac{\text{ungerader}}{\text{gerader}}$ Ordnung senkrecht stehen.

3) Die gegenseitige Lage der zusammengehörigen Elemente der Fusspunktlinien verschiedener Ordnung lässt sich geometrisch veranschaulichen. Aus Gleichung 2) folgt nämlich

$$n = \frac{\varphi_n - \varphi_0}{\alpha - \frac{\pi}{2}},$$

und wenn man diesen Werth in 1) einsetzt, erhält man

$$r_n = r_0 (\sin\alpha)^{\frac{\varphi_n - \varphi_0}{\alpha - \frac{\pi}{2}}},$$

oder

$$r_n = r_0 (\sin\alpha)^{-\frac{\varphi_0}{\alpha - \frac{\pi}{2}}} e^{\frac{lg \sin\alpha}{\alpha - \frac{\pi}{2}} \varphi_n};$$

Hieraus folgt:

Alle zusammengehörigen Punkte liegen auf einer und derselben logarithmischen Spirale, deren Mittelpunkt der Pol ist und deren constanter Winkel $\gamma$ der Berührenden mit dem Vector gegeben ist durch

$$\cot\gamma = \frac{lg \sin\alpha}{\alpha - \frac{\pi}{2}};$$

Diesen Satz kann man umgekehrt als eine Eigenschaft der logarithmischen Spirale aussprechen, nämlich:

Bewegt sich der Scheitel eines rechten Winkels auf einer logarithmischen Spirale, während der eine Schenkel sich um ihren Mittelpunkt dreht, so bildet der andere Schenkel, wo er die Spirale zum zweiten Male schneidet, mit ihr einen constanten Winkel.

Ist die Basis selbst eine logarithmische Spirale, so liegen, weil der Winkel $\alpha$ für alle Punkte der Basis derselbe ist, alle die Reihen zusammengehöriger Fusspunkte auf logarithmischen Spiralen, die sich nur durch Drehung um den Pol unterscheiden.

3.

An die Gleichungen 4), 5), 7), 8) schliessen sich zunächst folgende Betrachtungen an:

1) Ist $\frac{r_0}{\varrho_0 \sin\alpha} = 1$, d. h. osculirt das Element der Basis die berührend daran gelegte logarithmische Spirale, deren Mittelpunkt der Pol ist,*) so erhält man

---

*) Die Bedingung $\frac{\varrho \sin\alpha}{r} = 1$ führt nämlich auf die Differentialgleichung

$$\frac{d^2 r}{d\varphi^2} - \frac{1}{r}\left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2 = 0,$$

welche durch die Gleichung der logarithmischen Spirale $r = a e^{b \cdot \varphi}$ integrirt wird.

$$d\varphi_n = d\varphi_0$$
$$d s_n = \sin^n \alpha \, . \, d s_0$$
$$d r_n = \sin^n \alpha \, . \, d r_0$$
$$\frac{\varrho_n \sin \alpha}{r_n} = 1.$$

Die logarithmische Spirale ist daher die einzige Curve, bei welcher als Basis für alle Punkte der Basis den zugehörigen Punkten der Fusspunktlinien Gleichheit der Winkeldifferentiale, und ein constantes Verhältniss $= \frac{1}{\sin \alpha}$ zweier in positiver Ordnung auf einander folgender Bogen- und Vectorendifferentiale, sowie dasselbe Verhältniss $\frac{1}{\sin \alpha}$ zweier auf einander folgender Krümmungshalbmesser zukommt.

Es liegt in diesem Falle, $\frac{r_0}{\varrho_0 \sin \alpha} = 1$, der Krümmungsmittelpunkt jedes Punktes $P_n$ auf der im Pole $O$ auf $r_n$ errichteten Senkrechten, und liegen alle diese Krümmungsmittelpunkte auf einer gleichen logarithmischen Spirale, als die Punkte $P_n$ selbst (vergl. §. 2, 3). Denn sei $t_0$ der Vector des Krümmungsmittelpunktes von $P_0$, $t_n$ der von $P_n$, so ist $t_0 = r_0 \cot \alpha$ und $t_n = r_n \cot \alpha$, woraus folgt

$$t_n = t_0 \sin^n \alpha,$$

und da auch $t_0 \hat{} t_n = r_0 \hat{} r_n$, so folgt die Richtigkeit der Behauptung.

2) In jedem andern Falle giebt es eine Grösse des absoluten Werthes von $n$, von welchen an die Anomalie der Fusspunktlinien mit wachsender Ordnung immer rascher wächst. Die Bogen- und Vectorendifferentiale nehmen dann, da für $\alpha \gtrless \frac{\pi}{2}$, $\lim . n \sin^n \alpha = 0$ wenn $n = +\infty$, $= \infty$ wenn $n = -\infty$ ist,*) mit wachsendem positiven $n$ beständig ab, mit wachsendem negativen $n$ beständig zu; und zwar geschieht das Wachsthum von Anomalie, Vector und Bogen der Fusspunktlinie mit denen der Basis in gleichem oder entgegengesetztem Sinne, je nachdem $n\left(\frac{r_0}{\varrho_0 \sin \alpha} - 1\right) + 1$ positiv oder negativ ist. Das Verhältniss zweier auf einander folgender Werthe des Winkeldifferentials nähert sich mit wachsendem positiven oder negativen $n$ immer mehr der Grenze 1, das zweier Bogen- und Vectorendifferentiale der Grenze $\frac{1}{\sin \alpha}$, und das Verhältniss $\frac{\varrho_n \sin \alpha}{r_n}$ ebenfalls der Grenze 1. Dies kann man nach dem Vorhergehenden so aussprechen:

---

*) Dies folgt einfach so: Für $\alpha \gtrless \frac{\pi}{2}$ lässt sich stets eine Zahl $m$ so bestimmen, dass $\lg n = - m \lg \sin \alpha$, und wird dann $n \, . \sin^n \alpha = \sin^{n-m} \alpha$. Nun wird aber $n - m = n + \frac{\lg n}{\lg \sin \alpha}$ mit wachsendem positiven $n$ über alle Grenzen gross, also $\lim \sin^{n-m} \alpha = 0$.

Die Fusspunktlinien nähern sich mit wachsender positiver oder negativer Ordnung in jedem Punkte immer mehr der Osculation mit der berührend an sie gelegten logarithmischen Spirale, deren Mittelpunkt der Pol ist. Und: die Fusspunktlinien beliebiger sich berührender Curven nähern sich mit wachsender Ordnung immer mehr der Osculation im Berührungspunkte.

3) Für $\alpha = \frac{\pi}{2}$ geht diese logarithmische Spirale in den mit der Normale $OP_0$ als Halbmesser vom Pol aus beschriebenen Kreis über, und nähern sich die in $P_0$ sich sämmtlich berührenden Fusspunktlinien mit wachsender Ordnung immer mehr der Osculation mit diesem Kreise. Da ferner dann

$$ds_n = \left[n\left(\frac{r_0}{\varrho_0} - 1\right) + 1\right] ds_0,$$

also in diesem einzigen Falle von einem gewissen Werthe von $n$ an das osculirende Bogenelement mit wachsender positiver oder negativer Ordnung beständig wächst: so kann man den genannten Kreis als die Grenzcurve ansehen, welcher sich die Fusspunktlinien mit wachsender Ordnung beständig nähern. Dies lässt sich noch strenger durch folgende Betrachtung begründen:

Giebt es überhaupt eine Grenzcurve, an die sich die Fusspunktlinien immer näher anschliessen, so muss sie eine solche Linie sein, die sich selbst als Fusspunktlinie erzeugt, d. i. ein Kreis, dessen Mittelpunkt der Pol ist, und zwar der mit der Normale als Halbmesser beschriebene, weil nur mit diesem alle Fusspunktlinien sich berührend treffen, Die Normale sei daher Nulllinie und es wird gefragt, welcher Werth $lim . r_n$ zu einem gewissen Werthe $lim . \varphi_n$ gehört. Es gehört nun zu jedem Punkte der Basis, für den $\alpha - \frac{\pi}{2}$ einen endlichen Werth hat, $lim\ \varphi_n = \pm \infty$ und $lim . r_n = 0$ für $n = +\infty$, $lim\ r_n = \infty$ für $n = -\infty$. Soll dagegen $lim\ \varphi_n$ einen endlichen Werth haben, so muss man sich $\alpha - \frac{\pi}{2}$ umgekehrt proportional mit $n$ abnehmend, den Punkt der Basis also immer näher an den Fusspunkt der Normale rückend denken.

Sei also

$$\alpha - \frac{\pi}{2} = \frac{\psi}{n},$$

so hat man

$$\varphi_n = n\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right) = \psi,$$

wozu der Vector gehört

$$r_n = r_0 \sin^n \alpha = r_0 \cos^n \frac{\psi}{n};$$

Lässt man nun $n$ über alle Grenzen wachsen, so bedeutet $r_0$ die Länge der Normale vom Pol und hat man

$$\lim r_n = r_0 \lim \cos^n \frac{\psi}{n}$$

$$= r_0 \lim \left(1 - \frac{1}{2}\frac{\psi^2}{n^2} + \ldots\right)^n = r_0 \lim \left(1 - \frac{1}{2}\frac{\psi^2}{n} \ldots\right),$$

also

$$\lim r_n = r_0.$$

Es ist mithin $\lim r_n$ unabhängig von $\psi$, d. i. constant, womit ebenfalls gezeigt ist, dass der aus dem Pol mit der Normale beschriebene Kreis Grenzkreis ist; und zwar ist derselbe als Fusspunktlinie unendlich hoher Ordnung des Elementes der Basis anzusehen, auf dem sein Vector senkrecht steht.

Lassen sich vom Pole aus mehrere Normalen auf die Basis fällen, so giebt es eben so viele Grenzkreise, wenn keine, keinen.

Der Lauf einer Fusspunktlinie sehr hoher positiver Ordnung, z. B. der Ellipse, deren Mittelpunkt der Pol ist, ist demnach folgender: In nahezu kreisförmiger Windung, deren Mittelpunkt der Pol, läuft sie vom Endpunkt der grossen Axe aus; die Windungen entfernen sich immer mehr von der Kreisform, indem sie sich immer näher an den Pol anschliessen und in jedem Punkte nahe die an sie berührend gelegte logarithmische Spirale osculiren, deren Winkel der Berührenden mit dem Vector wächst bis zum grössten Werthe, den er für die Ellipse hat. Von da an dehnen sich die Windungen wieder aus und nähern sich der Kreisform bis zum Anschluss an den mit der kleinen Halbachse beschriebenen Grenzkreis. Die Windungen der Fusspunktlinie sehr hoher negativer Ordnung entfernen sich, vom Endpunkt der grossen Axe ausgehend, immer mehr vom Pol und der Kreisform, um dann zum Anschluss an den mit der kleinen Halbachse beschriebenen Kreis zurückzukehren.

4) Ist $\varrho_0$ negativ, d. h. findet in $P_0$ convexe Krümmung gegen den Pol statt, so ist $\varrho_n$ stets positiv, die Krümmung in $P_n$ also concav. Bei positivem $\varrho_0$ wird $\varrho_n$ negativ, wenn Zähler und Nenner der Gleichung 5) entgegengesetztes Vorzeichen haben, d. i. für denjenigen Werth von $n$, für welchen $\frac{r_0}{\varrho_0 \sin \alpha}$ zwischen den beiden Werthen $\frac{n-1}{n}$ und $\frac{n}{n+1}$ liegt. Daher giebt es unter der unendlichen Reihe zusammengehöriger Fusspunktelemente eines, aber auch nur eines, welches gegen den Pol convex gekrümmt ist.

5) Hat $\frac{r_0}{\varrho_0 \sin \alpha}$ einen Werth $\frac{n-1}{n}$ so wird $d\varphi_n = 0$, $ds_n = 0$, $\varrho_n = 0$

und bricht daher die Reihe nach der einen Seite mit einer Spitze ab. Hat daher $\frac{r_0}{\varrho_0 \sin\alpha}$ einen der Werthe $\frac{0}{1}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \ldots$ so bricht die Reihe nach der positiven Seite zu mit einer Spitze ab, und zwar ist letzterer ein zugehöriger Wendepunkt vorangegangen, weil für das vorhergehende $n$, $\frac{r_0}{\varrho_0 \sin\alpha}$ den Werth $\frac{n}{n+1}$ hatte, also $\varrho_0 = \infty$ wurde. Hat dagegen $\frac{r_0}{\varrho_0 \sin\alpha}$ einen der für negative $n$ sich ergebenden Werthe $\frac{1}{0}, \frac{2}{1}, \frac{3}{2}, \frac{4}{3} \ldots$, so bricht die Reihe nach der negativen Seite mit einer Spitze ab; ein Wendepunkt kann aber in dieser nicht und überhaupt nur in dem vorhin angegebenen Falle vorkommen.

6) Es ist vielleicht die Bemerkung von Interesse, dass die Abhängigkeit, in der nach Gleichung 5) $\frac{\varrho_n \sin\alpha}{r_n}$ von $\frac{\varrho_0 \sin\alpha}{r_0}$ steht, sich geometrisch veranschaulichen lässt, wenn man $n$, $\frac{\varrho_0 \sin\alpha}{r_0}$ und $\frac{\varrho_n \sin\alpha}{r_n}$, oder einfacher, durch eine parallele Verschiebung des Coordinatensystems, $n$, $1 - \frac{\varrho_0 \sin\alpha}{r_0}$ und $1 - \frac{\varrho_n \sin\alpha}{r_n}$ als rechtwinklige Coordinaten einer Fläche betrachtet.

Setzt man nämlich

$$n = x,\ 1 - \frac{\varrho_0 \sin\alpha}{r_0} = y,\ 1 - \frac{\varrho_n \sin\alpha}{r_n} = z,$$

so erhält man

$$z = \frac{y}{1 + xy},$$

oder

$$x = \frac{1}{z} - \frac{1}{y}.$$

Diese Fläche kann man sich dadurch entstanden denken, dass eine gleichseitige Hyperbel, deren Scheitel vom Mittelpunkt den Abstand 1 hat, also $x \,.\, z = 1$, sich so bewegt, dass ihre Ebene der $xz$ Ebene beständig parallel ist und ihr Mittelpunkt auf einer gleichen gleichseitigen Hyperbel bleibt, welche die Axen der $x$ und $y$ zu Asymptoten hat. Die Fläche besteht aus 3 getrennten Theilen, die sich asymptotisch der über der gleichseitigen Hyperbel in der $xy$-Ebene auf dieser senkrecht stehenden Cylinderfläche nähern. Der mittlere Theil enthält die $x$ Axe und hat noch die $xy$-Ebene als asymptotische Ebene. Alle Schnitte parallel der Coordinatenebene sind gleichseitige Hyperbeln.

Endlich werde noch bemerkt, dass die Gleichung 5) sich auch als der $n$ gliedrige Kettenbruch schreiben lässt

$$\frac{\varrho_n \sin\alpha}{r_n} = \cfrac{1}{2 - \cfrac{1}{2 - \cfrac{1}{2 \ldots - \cfrac{1}{2 - \cfrac{\varrho_0 \sin\alpha}{\varrho_0}}}}}.$$

7) Die Gleichung 6) kann man mit Berücksichtigung von Gleichung 4) auch so schreiben:

$$d f_n = n \tfrac{1}{2} r_n^2 \, d\varphi_1 - (n-1) \tfrac{1}{2} r_n^2 \, d\varphi_0,$$

was man so in Worten aussprechen kann:

Trägt man auf jeden Vector der Basis und ihrer ersten Fusspunktlinie den entsprechenden Vector der Fusspunktlinie $n^{\text{ter}}$ Ordnung auf und bezeichnet die so erhaltenen Sectoren $F$ und $F_1$, so ist der Inhalt des entsprechenden Sectors der Fusspunktlinie $n^{\text{ter}}$ Ordnung

$$f_n = n \,.\, F_1 - (n-1) F.$$

## 4.

1) Aus den Gleichungen des §. 1 geht hervor, dass von besonderem Interesse diejenigen Curven sein werden, für welche $\frac{r_0}{\varrho_0 \sin\alpha}$, d. i. das Verhältniss des Vectors zur Projection des Krümmungshalbmessers auf den Vector eine constante Grösse ist.

Aus der Bedingung

$$\frac{r}{\varrho \sin\alpha} = 1 + \varkappa$$

erhält man die Differentialgleichung

$$\frac{d^2 r}{d\varphi} + (\varkappa - 1)\frac{1}{r}\left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2 + \varkappa r = 0,$$

welche vollständig integrirt wird durch

$$\left(\frac{r}{a}\right)^{\varkappa} = \sin(\varkappa\varphi + b),$$

wo $a$ und $b$ die willkürlichen Constanten sind.

Für $\varkappa = 0$ genügt obiger Differentialgleichung, wie schon oben erwähnt, die Gleichung der logarithmischen Spirale

$$r = a \,.\, e^{c \cdot \varphi},$$

welche Integralgleichung jedoch auch in der allgemeinen enthalten ist. Man setze nämlich in der letzteren statt der willkürlichen Constanten $a$

$$\left(\frac{\sin b}{a}\right)^{\frac{1}{\varkappa}},$$

so erhält man die für $\varkappa = 0$ identische Gleichung

$$r^{\varkappa} = a^{\varkappa} \frac{\sin(\varkappa\varphi + b)}{\sin b},$$

oder

$$r = a\,(\cot b\,.\,\sin \varkappa\,\varphi + \cos \varkappa\,\varphi)^{\frac{1}{\varkappa}},$$

woraus, wenn man zum Grenzwerth $\varkappa = 0$ übergeht, folgt

$$r = a\,.\,e^{\cot b\,.\,\varphi}.$$

2) Ueber die Natur der durch die Polargleichung

$$\left(\frac{r}{a}\right)^{\varkappa} = \sin\,(\varkappa\,\varphi + b)$$

bestimmten Linien ist Folgendes zu bemerken.

Durch Differentiation nach $\varphi$ erhält man

$$\frac{1}{r}\,\frac{d\,r}{d\,\varphi} = \cot\,(\varkappa\,\varphi + b),$$

d. i.

$$\cot \alpha = \cot\,(\varkappa\,\varphi + b),$$

$$\alpha = \varkappa\,\varphi + b,$$

d. h. der um die Constante $b$ verminderte Winkel der Berührenden mit dem Vector ist ein constantes Vielfaches der Anomalie.

Setzt man den gefundenen Werth von $\alpha$ in $\frac{r}{\varrho \sin \alpha} = 1 + \varkappa$ ein, so erhält man den Krümmungshalbmesser ausgedrückt durch den Vector, nämlich

$$\varrho = \frac{a^{\varkappa}\,.\,r^{1-\varkappa}}{1+\varkappa},$$

mithin ist der Krümmungshalbmesser proportional der Potenz $1 - \varkappa$ des Vectors.

Giebt man der willkürlichen Constanten $b$ den Werth $\frac{\pi}{2}$, so lautet die Gleichung der Linie

$$\left(\frac{r}{a}\right)^{\varkappa} = \cos \varkappa\,\varphi$$

und folgt:

So oft sich $\varphi$ um $\frac{\pi}{\varkappa}$ ändert, erhält $r$ wieder denselben Werth (wenn es nicht imaginär wird). Daher besteht jede solche Curve aus einer von $\varkappa$ abhängigen Anzahl congruenter Zweige; diese Anzahl ist endlich, wenn $\varkappa$ rational, unendlich, wenn $\varkappa$ irrational ist. Ist $\varkappa$ positiv, so sind diese Zweige geschlossen, berühren, da $\alpha = \varkappa\,\varphi + \frac{\pi}{2}$, für $\varphi = \frac{(2\,m+1)\,\pi}{2\,\varkappa}$ ihren Vector im Pol und stehen für $\varphi = \frac{m\,\pi}{\varkappa}$ auf dem sie halbirenden Maximalvector $r = a$ senkrecht. Ist dagegen $\varkappa$ negativ, so erstreckt sich jeder Zweig ins Unendliche; er steht für $\varphi = \frac{m\,\pi}{\varkappa}$ auf seinem Minimalvector $r = a$ senkrecht, und nähert sich von da nach beiden Seiten immer mehr den bei-

den gegen ersteren um $\frac{\pi}{2\varkappa}$ geneigten unendlich grossen Vectoren, welche aber nur dann Asymptoten sind, wenn $1+\frac{1}{\varkappa}$ positiv, also $\varkappa$ eine negative Zahl ist, deren absoluter Werth grösser als 1 ist.

Die Krümmung gegen den Pol ist entweder beständig concav oder beständig convex, je nachdem $1+\varkappa$ positiv oder negativ ist. Da der Krümmungshalbmesser proportional der Potenz $1-\varkappa$ des Vectors wächst, so wächst er, wenn $\varkappa$ positiv und $<1$ ist, mit $r$ von $\varrho=0$ im Pol, welcher also eine Spitze jedes Zweiges ist, bis $\varrho=\frac{a}{1+\varkappa}$ für $r=a$. Ist endlich $\varkappa$ negativ, so wächst $\varrho$ beständig mit wachsendem $r$.

3) Nimmt man nun eine Curve von der Gleichung

$$\left(\frac{r}{a}\right)^{\varkappa}=\sin(\varkappa\varphi+b)$$

als Basis für ein System von Fusspunktlinien, so ist nach Gleichung 5) für die Fusspunktlinie $n^{\text{ter}}$ Ordnung

$$\frac{\varrho_n \sin\alpha}{r_n}=\frac{n\varkappa+1}{(n+1)\varkappa+1},$$

dieser Werth also auch constant, und da durch die Bedingung der Constanz von $\frac{\varrho\sin\alpha}{r}$ die Polargleichung der Curve in der angegebenen Form bestimmt ist, so haben alle Fusspunktlinien positiver und negativer Ordnung mit der Basis $\left(\frac{r}{a}\right)^{\varkappa}=\sin(\varkappa\varphi+b)$ dieselbe Form der Polargleichung und unterscheiden sich nur durch die Grösse der Constanten. Es geht nämlich, wenn man von der Basis zur Fusspunktlinie $n^{\text{ter}}$ Ordnung fortschreitet, $\varkappa$ über in $\frac{n\varkappa+1}{(n+1)\varkappa+1}-1$, d. i. in $\frac{\varkappa}{1+n\varkappa}$. Die Gleichung der letzteren hat daher die Form

$$\left(\frac{r_n}{a'}\right)^{\frac{\varkappa}{1+n\varkappa}}=\sin\left(\frac{\varkappa}{1+n\varkappa}\varphi_n+b'\right),$$

wo $a'$ und $b'$ leicht bestimmt werden, indem man in der Gleichung der Basis der willkürlichen Constanten $b$ den Werth $\frac{\pi}{2}$ giebt. Alsdann bedeuten in $\left(\frac{r}{a}\right)^{\varkappa}=\cos\varkappa\varphi=\sin\left(\varkappa\varphi+\frac{\pi}{2}\right)$, $a$ und $b=\frac{\pi}{2}$ die Werthe von $r$ und $\alpha$ für $\varphi=0$. Da aber die Berührenden dieses Punktes auf dem Vector $a$ senkrecht stehen, so bleiben beide Werthe, $a$ und $\frac{\pi}{2}$, für alle Fusspunktlinien unverändert und muss daher für $\varphi_n=0$ folgen

$$r_n=a'=a,\quad b'=b=\frac{\pi}{2}.$$

Die zur Basis

$$\left(\frac{r}{a}\right)^{\varkappa} = \cos \varkappa \varphi$$

gehörige Fusspunktlinie $n^{ter}$ Ordnung hat daher die Gleichung

$$\left(\frac{r_n}{a}\right)^{\frac{\varkappa}{1+n\varkappa}} = \cos \frac{\varkappa}{1+n\varkappa} \varphi_n.$$

Dreht man die Nullllinie um $\frac{b}{\varkappa} - \frac{\pi}{2\varkappa}$, so folgt hieraus:

Die zur Basis

$$\left(\frac{r}{a}\right)^{\varkappa} = \sin(\varkappa \varphi + b)$$

gehörige Fusspunktlinie $n^{ter}$ Ordnung hat die Gleichung

$$\left(\frac{r_n}{a}\right)^{\frac{\varkappa}{1+n\varkappa}} = \sin\left[\frac{\varkappa}{1+n\varkappa}\varphi_n + \frac{b}{1+n\varkappa} + \frac{n\varkappa}{1+n\varkappa}\frac{\pi}{2}\right].$$

Für diesen Fall lässt sich der in §. 3, 3 bewiesene Satz vom Grenzkreise direct aus der Gleichung der Fusspunktlinie selbst herleiten. Setzt man nämlich in der für $b = \frac{\pi}{2}$ sich ergebenden Gleichung

$$r_n = a\left[\cos \frac{\varkappa}{1+n\varkappa}\varphi_n\right]^{\frac{1+n\varkappa}{\varkappa}}$$

für den Cosinus die ersten beiden Glieder seiner Entwickelung ein, so erhält man

$$r_n = a\left[1 - \frac{1}{2}\frac{\varkappa^2 \varphi_n^2}{(1+n\varkappa)^2}\right]^{\frac{1+n\varkappa}{\varkappa}}$$

$$= a\left\{\left[1 - \frac{\varkappa^2\varphi_n^2}{2(1+n\varkappa)^2}\right]^{-\frac{2(1+n\varkappa)^2}{\varkappa^2\varphi_n^2}}\right\}^{-\frac{\varkappa\varphi^2}{2(1+n\varkappa)}}.$$

Da nun bekanntlich $\lim\,(1+\delta)^{\frac{1}{\delta}}_{\delta=0} = e$, so folgt

$$\lim r_n = a \cdot \lim e^{-\frac{\varkappa\varphi_n^2}{2(1+n\varkappa)}},$$

d. i.

$$\lim r_n = a.$$

4) Unter den sämmtlichen zu einer Basis $\left(\frac{r}{a}\right)^n = \cos n\varphi$ gehörigen Fusspunktlinien **ist stets eine, und nur eine, beständig convex gegen den Pol gekrümmt**; alle andern haben concave Krümmung. Dies folgt direct aus dem §. 3, 4 gefundenen Satze, dass von allen zusammen-

gehörigen Elementen stets eines, und nur eines, convex gegen den Pol gekrümmt ist und jede dieser Linien stets dieselbe Krümmung gegen den Pol hat. Aus der Bedingung convexer Krümmung $1 + \varkappa < 0$ folgt weiter, dass bei beliebig gegebenen $\varkappa_0$ der Basis diejenige Fusspunktlinie gegen den Pol convex gekrümmt ist, deren Ordnungszahl $n$ zwischen $\frac{1}{\varkappa_0}$ und $1 + \frac{1}{\varkappa_0}$ liegt. Diese Fusspunktlinie ist zugleich die einzige, welche sich ihren unendlichen Vectoren asymptotisch nähert, denn es war $\varkappa < -1$ dafür die Bedingung. Geht man nun von dieser Linie als Basis aus, so haben, da für $\varkappa < -1$ der Werth $\frac{\varkappa}{1 + n\varkappa}$ für alle positiven $n$ positiv, für negative $n$ negativ ist, alle ihre Fusspunktlinien positiver Ordnung geschlossene, die negativer Ordnung ins Unendliche sich erstreckende Zweige, die sich keiner Asymptote nähern, so dass zwischen beiden die Basis gewissermaassen den Uebergang bildet. Weil endlich alle diese Linien, die Basis allein ausgenommen, beständig convex gekrümmt sind, die Fusspunktlinie einer convexen Basis aber nothwendig ausserhalb der letzteren und die convexe Basis einer convexen Fusspunktlinie innerhalb der letzteren liegt, da ferner der mit dem Halbmesser $a$ aus dem Pol beschriebene Kreis Grenzcurve sowohl für die Fusspunktlinie positiver, als die negativer Ordnung ist, so folgt:

> Unter einem Systeme von Fusspunktlinien $\left(\frac{r}{a}\right)^{\frac{\varkappa}{1+n\varkappa}} = \cos\frac{\varkappa}{1+n\varkappa}\varphi$ stellen diejenige, welche gegen den Pol convex gekrümmt ist, und ihre erste Fusspunktlinie die äussere und innere Grenze dar, von welcher aus mit wachsender negativer und positiver Ordnung eine beständige Annäherung der Fusspunktlinien an den Grenzkreis stattfindet.

5) Die Reihe der Fusspunktlinien geht nur nach einer Seite hin ins Unendliche, nähert sich also auch nur nach dieser hin dem Grenzkreise, wenn $\frac{r_0}{\varrho_0 \sin\alpha} = 1 + \varkappa$ einen Werth $\frac{m-1}{m}$ hat, wo $m$ eine positive oder negative ganze Zahl bedeutet (vergl. §. 3, 5). Sei zuerst $m$ positiv, so bricht die Reihe der Fusspunktlinien, weil die der Elemente, nach der positiven Seite zu ab. Aus $\frac{1}{1+\varkappa} = \frac{m}{m-1}$ folgt $\varkappa = -\frac{1}{m}$; jede Linie von der Gleichung $\left(\frac{r}{a}\right)^{-\frac{1}{m}} = \sin\left(-\frac{\varphi}{m} + b\right)$ ist aber, wie leicht zu sehen, Fusspunktlinie von der Ordnung $1 - m$ einer Geraden, deren Gleichung von der Form ist $\frac{a}{r} = \sin(\varphi + b')$; die Fusspunktlinie der Geraden selbst reducirt sich auf den Fusspunkt des vom Pol auf sie gefällten Lothes.

Sei $m$ negativ und schreibe man dafür $-m$, so wird $x = +\frac{1}{m}$, und ist die Linie $\left(\frac{r}{a}\right)^{+\frac{1}{m}} = sin\left(\frac{\varphi}{m} + b\right)$ Fusspunktlinie von der Ordnung $m-1$ eines Kreises, auf dessen Umfang der Pol liegt und dessen Gleichung daher in Bezug auf diesen als Coordinatenanfang die Form hat $\frac{r}{a} = sin\,(\varphi + b')$. Für die auf den Kreis nach negativer Seite hin folgende Fusspunktlinie wird $x = \infty$.

In welcher Beziehung nun beide Systeme zu einander stehen, ergiebt sich am einfachsten, wenn man der Constanten $b$ den Werth $\frac{\pi}{2}$ giebt. Alsdann hat man für das erste System

$$\left(\frac{r}{a}\right)^{-\frac{1}{m}} = cos\,\frac{\varphi}{m},$$

und seine Basis, die Gerade,

$$\frac{a}{r} = cos\,\varphi;$$

für das zweite System

$$\left(\frac{r}{a}\right)^{+\frac{1}{m}} = cos\,\frac{\varphi}{m},$$

und seine Basis, den Kreis, welcher obige Gerade in den Fusspunkt des vom Pole auf sie gefällten Lothes berührt,

$$\frac{r}{a} = cos\,\varphi.$$

Die Gleichung dieses Kreises folgt aber aus jener der Geraden, als die der Fusspunktlinie zweiter Ordnung, indem man $x = -1$ und $n = 2$ setzt. Nimmt man daher als Mittelglied den Fusspunkt des vom Pol auf die Gerade gefällten Lothes, d. h. sieht man den Kreis als Fusspunktlinie des dem Pol diametral gegenüberliegenden Peripheriepunktes an, so gehören beide Systeme von Fusspunktlinien als ein einziges zusammen, dessen Basis der genannte Punkt ist.

In der That ist man dazu berechtigt, indem die Berührende eines Punktes jede beliebige Lage hat, seine Fusspunktlinie also der geometrische Ort der Fusspunkte der auf alle durch ihn gelegten Geraden gefällten Lothe ist. Noch anschaulicher wird dies, wenn man sich den Punkt als Kreis von verschwindend kleinem Halbmesser denkt. Die Fusspunktlinie eines Kreises vom Halbmesser $R$, von dessen Peripherie der Pol den Abstand $a$ hat, ist nämlich, wenn die Gerade durch Pol und Mittelpunkt Nulllinie ist,

$$r = a\,cos\,\varphi + R\,(cos\,\varphi - 1),$$

woraus für $R = 0$ sich $r = a\,cos\,\varphi$ ergiebt.

Man kann daher sagen:

Die Fusspunktlinie $m^{\text{ter}}$ Ordnung eines Punktes in der Entfernung $a$ vom Pol hat die Gleichung

$$\left(\frac{r}{a}\right)^{\frac{1}{m}} = \cos\frac{\varphi}{m},$$

wo die Verbindungslinie des Pols mit dem gegebenen Punkt Nulllinie ist.

Der durch den Pol und den gegebenen Punkt gehende Kreis vom Durchmesser gleich ihrer Entfernung und die denselben im gegebenen Punkt berührende Gerade sind hier die innere und äussere Grenze, von wo aus eine beständige Annäherung der Fusspunktlinien an den Grenzkreis erfolgt. Für $m = -2$ erhält man die Parabel, deren Brennpunkt der Pol ist; ihre Basis ist also $\left(\frac{r}{a}\right)^{-\frac{1}{3}} = \cos\frac{\varphi}{3}$. Der Parabel entspricht auf positiver Seite die Fusspunktlinie des Kreises, die Cardioide, deren Gleichung ist $\left(\frac{r}{a}\right)^{\frac{1}{2}} = \cos\frac{\varphi}{2}$.

Seien $r$ und $r'$ zwei zu derselben Anomalie gehörige Vectoren zweier Fusspunktlinien entgegengesetzt gleicher Ordnung des Punktes, so ist für den einen

$$\left(\frac{r}{a}\right)^{\frac{1}{m}} = \cos\frac{\varphi}{m},$$

für den andern

$$\left(\frac{r'}{a}\right)^{-\frac{1}{m}} = \cos\frac{\varphi}{m},$$

woraus folgt

$$r \,.\, r' = a^2,$$

d. h.:

Für zwei Fusspunktlinien entgegengesetzt gleicher Ordnung des Punktes ist das Product zweier zu derselben Anomalie gehöriger Vectoren constant, nämlich gleich dem Quadrate des Abstandes des Punktes vom Pol.

6) Allgemein haben in einem System von Fusspunktlinien von der Form $\left(\frac{r}{a}\right)^{\varkappa} = \cos\varkappa\varphi$ je zwei dieser Linien entgegengesetzt gleiche Werthe von $\varkappa$, wenn für eine derselben, die man als Basis ansieht, $\varkappa$ einen solchen Werth hat, dass

$$\frac{\varkappa}{1 - n\varkappa} = -\frac{\varkappa}{1 + (n - k)\varkappa},$$

wo $k$ eine beliebige ganze Zahl bedeutet. Aus dieser Bedingung folgt

$$\varkappa = -\frac{2}{k}.$$

Ist nun $k$ eine gerade Zahl, so erhält man das vorhin betrachtete System von Fusspunktlinien des Punktes. Ein ungerades $k$ giebt das System von Fusspunktlinien, deren eines Glied die gleichseitige Hyperbel ist mit ihrem Mittelpunkt als Pol und der Hauptachse als Nulllinie. Die Gleichung dieser gleichseitigen Hyperbel ist nämlich

$$\left(\frac{r}{a}\right)^{-2} = \cos 2\varphi,$$

daher die ihrer Fusspunktlinie von der Ordnung $-n$

$$\left(\frac{r}{a}\right)^{-\frac{2}{1+2n}} = \cos\frac{2}{1+2n}\varphi;$$

die ihrer Fusspunktlinie von der Ordnung $n+1$, oder, was dasselbe ist, die der Fusspunktlinie von der Ordnung $n$ der Lemiscate, welche auf die gleichseitige Hyperbel folgt,

$$\left(\frac{r}{a}\right)^{\frac{2}{1+2n}} = \cos\frac{2}{1+2n}\varphi.$$

Das Product zweier zu derselben Anomalie gehöriger Vectoren zweier solcher Linien ist daher ebenfalls constant $= a^2$. Die gleichseitige Hyperbel ist in diesem Systeme die convex gekrümmte Curve, und sie und die Lemniscate bilden die äussere und innere Grenze, von wo aus die übrigen Linien sich immer näher an den Grenzkreis anschliessen.

## II. Von den Fusspunktlinien erster Ordnung insbesondere.

### 5.

Die Formeln des §. 1 ergeben für $n = 1$

$$1)\qquad \frac{d\varphi_0}{d\varphi_1} = \frac{\varrho_0 \sin\alpha}{r_0},$$

$$2)\qquad \varrho_1 = \frac{r_0^2}{2r_0 - \varrho_0 \sin\alpha},$$

$$3)\qquad df_1 = \frac{r_0 \sin\alpha}{\varrho_0} df_0 = \frac{1}{2}\frac{r_0^3 \sin\alpha}{\varrho_0} d\varphi_0,$$

$$4)\qquad ds_1 = \frac{r_0}{\varrho_0} ds_0.$$

Hieran knüpfen sich folgende Betrachtungen.

1) Die Gleichung 1) heisst in Worten:

Das Winkeldifferential der Basis verhält sich zum zugehörigen ihrer Fusspunktlinie wie die Projection des Krümmungshalbmessers der Basis auf ihren Vector zu diesem Vector. Je nachdem die Basis concav oder convex gegen den Pol gekrümmt ist, haben der Vector der Basis und der zugehörige der Fusspunktlinie gleiche oder entgegengesetzte Drehungsrichtung.

2) Aus der Gleichung 2) folgt:

Die Krümmung in $P_1$ ist concav, so lange der Krümmungshalbmesser von $P_0$ auf derselben Seite einer auf $r_0$ in der Entfernung $-r_0$ vom Pol errichteten Senkrechten liegt als $P_0$, convex, wenn auf der andern Seite. Liegt der Krümmungsmittelpunkt von $P_0$ auf jener Senkrechten, so ist wegen $\varrho_1 = \infty$, $P_1$ ein Wendepunkt der Fusspunktlinie. Dieselbe hat so viele in $O$ liegende Spitzen, so oft $r_0 = 0$ ist, d. i. so oft die Basis durch den Pol geht. Jedem Wendepunkte der Basis entspricht eine Spitze der Fusspunktlinie. Lassen sich vom Pol aus eine oder mehrere Berührende an die Basis legen, so liegt der Krümmungsmittelpunkt eines jeden zu einem Berührungspunkte gehörigen Fusspunktes (der mit dem Pol zusammenfällt), auf der Mitte des Vectors des Berührungspunktes.

3) Reducirt man die Gleichung 2) auf $\varrho_0$, so folgt

$$\varrho_0 = \frac{r_0}{\sin\alpha}\left(2 - \frac{r_0}{\varrho_1}\right).$$

Nimmt man als Fusspunktlinie die Gerade, d. i. $\varrho_1 = \infty$, so folgt für ihre Basis, d. i. die sie im Scheitel berührende Parabel, deren Brennpunkt der Pol ist, die Relation

$$\varrho = \frac{2r}{\sin\alpha},$$

oder

$$2r = \varrho \sin\alpha,$$

woraus sich eine sehr einfache Construction des Krümmungshalbmessers der Parabel ergiebt.

Auf gleiche Weise folgt für die Ellipse und Hyperbel, deren erste Halbachse $a$ ist, wenn man den Brennpunkt als Pol annimmt,

$$\varrho = \frac{r}{\sin\alpha}\left(2 - \frac{r}{a}\right),$$

da bekanntlich die Fusspunktlinie der aus ihrem Mittelpunkte mit dem Halbmesser $a$ beschriebene Kreis ist. Sei $r'$ der zu $r$ gehörige Vector aus dem andern Brennpunkt, so ist für die Ellipse $a = \frac{r + r'}{2}$, und folgt

$$\varrho = \frac{1}{\sin\alpha} \cdot \frac{2rr'}{r + r'},$$

d. h.: der Krümmungshalbmesser der Ellipse ist gleich dem harmonischen Mittel der beiden Vectoren aus den Brennpunkten, multiplicirt mit dem reciproken Cosinus des halben von ihnen eingeschlossenen Winkels.

4) Die Gleichungen 3) und 4) kann man in den beiden Sätzen aussprechen:

Trägt man vom Pol aus auf jeden Vector der Basis als Vector die Grösse $r' = r_0 \sqrt{\frac{r_0 \sin\alpha}{\varrho_0}}$ auf, so hat der von dieser Curve begrenzte Sector gleichen Inhalt mit dem entsprechenden Sector der Fusspunktlinie. Damit $r'$ reell sei, muss die Curve concav gekrümmt sein.

Und:

**Trägt man vom Pol aus auf jeden Vector der Basis die Grösse $r'' = \frac{r_0^2}{\varrho_0}$, die dritte Proportionale zum Krümmungshalbmesser und Vector auf, so hat die dadurch entstehende Curve gleiche Länge mit dem entsprechenden Stück der Fusspunktlinie.**

Mittelst dieser Sätze lassen sich Quadratur und Rectification verschiedener Linien auf einander reduciren. Als Beispiel diene Ellipse und Hyperbel, deren Brennpunkt der Pol ist. Ist $p$ ihr Parameter, $\varepsilon$ die numerische Excentricität, so ist die Fusspunktlinie ein mit dem Halbmesser $\frac{p}{1-\varepsilon^2}$ aus dem Mittelpunkt beschriebener Kreis.

Ferner ist

$$r_0 = \frac{p}{1 + \varepsilon \cos \varphi_0},$$

$$\sin \alpha = \frac{1 + \varepsilon \cos \varphi_0}{\sqrt{1 + 2 \varepsilon \cos \varphi_0 + \varepsilon^2}},$$

$$\varrho = \frac{r}{\sin \alpha}\left(2 - \frac{r_0 (1 - \varepsilon^2)}{p}\right),$$

und ergiebt sich

$$r' = \frac{p \sqrt{1 + \varepsilon \cos \varphi}}{1 + \varepsilon^2 + 2 \varepsilon \cos \varphi},$$

$$r'' = \frac{p (1 + \varepsilon \cos \varphi)}{(1 + \varepsilon^2 + 2 \varepsilon \cos \varphi)^{\frac{3}{2}}},$$

Es lässt sich daher durch eine einfache Construction mittelst des Kegelschnittes $r_0$ der Sector der Linie $r'$ durch einen Kreissector, der Bogen der Linie $r''$ durch einen Kreisbogen darstellen. Beide Linien sind geschlossen. Für $\varepsilon < 1$, d. h. wenn die Basis eine Ellipse ist, ist der Inhalt der geschlossenen Curve $r'$ gleich dem des Kreisses vom Halbmesser $\frac{p}{1-\varepsilon^2}$, der Umfang der Curve $r''$ gleich dem desselben Kreises. Für $\varepsilon > 1$, d. h. wenn die Basis eine Hyperbel ist, gehen beide Curven für $\cos \varphi = -\frac{1}{\varepsilon}$ durch den Coordinatenanfang (Brennpunkt), ihre Berührenden in diesen Punkten sind also den Asymptoten der Hyperbel parallel. Die Curve $r'$ hat nur einen Zweig, dem nächstliegenden der Hyperbel entsprechend, die Curve $r''$ hat zwei. Ist $\beta = arc \cos \frac{1}{\varepsilon}$ der halbe Asymptotenwinkel, so ist der ganze Inhalt von $r'$ gleich dem eines Kreissectors vom Centriwinkel $2\beta$ und Halbmesser $\frac{p}{1-\varepsilon^2}$, die Länge des entsprechenden Zweiges von $r''$ gleich die-

sem Kreisbogen, die Länge beider Zweige aber gleich dem Umfange des ganzen Kreises.

Für $\varepsilon = 1$ wird

$$r_0 = \frac{p}{1 + \cos\varphi_0}$$

die Gleichung einer Parabel, und wird

$$r' = \frac{p}{\sqrt{2}\cos\frac{\varphi}{2}},$$

$$r'' = \frac{p}{2\cos\frac{\varphi}{2}},$$

und da die Fusspunktlinie eine Gerade ist, so lässt sich der Sector dieser Linie durch ein geradliniges Dreieck und der Bogen durch eine gerade Linie darstellen. Noch werde bemerkt, dass in allen 3 Fällen zwischen $r_0$, $r'$ und $r''$ die Relation besteht

$$\frac{r'^3}{r''^2} = \sqrt{p\, r_0}.$$

Nimmt man die gleichseitige Hyperbel als Basis und ihren Mittelpunkt als Pol, so erhält man für $r''$ ihre Fusspunktlinie, die Lemniscate, selbst. Ihr Vector ist also die dritte Proportionale zum Krümmungshalbmesser und Vector der gleichseitigen Hyperbel.

6.

1) Aus der Betrachtung, dass der Vector der Fusspunktlinie sich stets parallel dem Krümmungshalbmesser der Basis, d. i. der Berührenden ihrer Evolute bewegt, ergiebt sich eine Beziehung zwischen Evolute und Fusspunktlinie. Sei nämlich $r'$ der Vector der Evolute vom Pol aus, $\alpha'$ dessen Winkel mit der Berührenden der Evolute, die mit dem Krümmungshalbmesser $\varrho_0$ der Basis, welcher den Bogen der Evolute darstellt, so hat man einfach

$$r_1 = \varrho_0 + r' \cos\alpha'.$$

Nimmt man z. B. als Evolute einen Kreis vom Halbmesser $a$, seinen Mittelpunkt als Pol und lässt die Nulllinie durch den Anfangspunkt der Abwickelung gehen, so ist $\alpha' = \frac{\pi}{2}$, und

$$r_1 = \varrho_0 = a\left(\varphi_1 + \frac{\pi}{2}\right),$$

d. h.

Die Fusspunktlinie der Kreisevolvente in Bezug auf den Mittelpunkt des Kreises als Pol ist eine Archimedeische Spirale.

2) Verändert man die Lage des Pols, so bleiben die zu demselben Punkt der Basis gehörigen Vectoren der so entstehenden Fusspunktlinie

einander parallel. Daraus folgt, dass, wenn die Gleichung der Fusspunktlinie einer gegebenen Basis in Beziehung auf irgend einen Pol kennt, dann auch die Gleichung der Fusspunktlinie in Bezug auf jeden andern Pol, dessen rechtwinklige Coordinaten gegen jenen $g$ und $h$ sind, bekannt ist. Denn sei $r_1'$ der mit $r_1$ parallele Vector vom zweiten Pol aus, so hat man einfach

$$r_1' = r_1 - g\cos\varphi_1 - h\sin\varphi_1.$$

Daher ist z. B. die Gleichung der Fusspunktlinie eines Kreises vom Halbmesser $a$, von dessen Mittelpunkt der Pol den Abstand $b$ hat,

$$r_1 = a - b\cos\varphi_1,$$

wenn die Verbindungslinie des Pols mit dem Mittelpunkt Nulllinie ist.

Die Fusspunktlinie der Ellipse in Bezug auf den Brennpunkt als Pol ergiebt sich leicht als ein Kreis von der Gleichung

$$r_1 = a\left(\varepsilon\cos\varphi_1 + \sqrt{1 - \varepsilon^2\sin^2\varphi_1}\right),$$

wo $a$ die grosse Halbaxe, $\varepsilon$ die numerische Excentricität bezeichnet. Setzt man $h = 0$, $g = a \cdot \varepsilon$, so erhält man als Gleichung der Fusspunktlinie in Bezug auf den Mittelpunkt

$$r_1 = a\sqrt{1 - \varepsilon^2\sin^2\varphi_1}.$$

---

# XIII.

## Zur Bestimmung des Querschnitts eines Körpers, dessen absolute Festigkeit in Anspruch genommen wird.

Von Dr. Eduard Zetzsche.

---

Nennen wir (mit Weisbach) diejenige Kraft $E$, welche ein Prisma vom Querschnitt 1 um seine eigene Länge ausdehnen oder zusammendrücken würde (insofern diess ohne Ueberschreitung der Elasticitätsgrenze möglich wäre) den Elasticitätsmodul, so wird ein an dem einen Ende festgehaltener prismatischer Körper von der Länge $a$ und dem Querschnitt $F$ durch eine in seiner Achsenrichtung wirkende Kraft $Q$ innerhalb der Elasticitätsgrenze um das Stück

$$\lambda = \frac{Q\,a}{F\,E}$$

ausgedehnt oder zusammengedrückt. Bei schweren Körpern besteht nun die ausdehnende oder zusammendrückende Kraft $Q$ entweder blos aus dem Gewicht $G$ oder neben diesem noch aus einer mit ihm in gleicher oder entgegengesetzter Richtung wirkenden Kraft $P$ und es ist dann

$$Q = G \pm P.$$

Da ferner innerhalb der Elasticitätsgrenze die Ausdehnung oder Zusammendrückung der wirkenden Kraft proportional ist, so würden $G$ oder $P$ allein den Körper an derselben Stelle, wo ihn $Q$ um $d\lambda$ ausdehnt, um $d\lambda_1$ oder $d\lambda_2$ ausdehnen, deren Werthe aus den Gleichungen

$$Q : G = d\lambda : d\lambda_1$$
$$Q : P = d\lambda : d\lambda_2$$
$$P : G = d\lambda_2 : d\lambda_1$$

zu entnehmen sind, so dass also

$$d\lambda_1 = \frac{G}{Q} d\lambda = \frac{G}{Q} \cdot \frac{Q}{P} d\lambda_2 = \frac{G}{P} d\lambda_2$$

$$d\lambda_2 = \frac{P}{Q} d\lambda$$

$$d\lambda_1 + d\lambda_2 = \frac{G}{Q} d\lambda + \frac{P}{Q} d\lambda = d\lambda$$

ist. Während aber $d\lambda_2$ an jeder Stelle des Körpers für gleichlange Stücken desselben denselben Werth hat, also constant ist, wächst $d\lambda_1$ in demselben Maasse, als die betrachtete Stelle $M$ von dem freien Ende $B$ gegen das festgehaltene Ende $A$ hinrückt (s. Fig. 1, Taf. IV); denn es ist ja eben das für diese Stelle in Rechnung zu ziehende Gewicht stets das Gewicht des von dieser Stelle aus gegen das freie Ende hin liegenden Stückes $MB$. Nur für eine unendlich kleine Erstreckung $dz$ des ganzen Körpers $AB$ bleibt die wirkende Kraft dieselbe. Ist nun das $dz$ vom freien Ende um $MB = z$ entfernt, so wiegt das Stück $MB$ des Körpers $\gamma F z$, wenn $\gamma$ das Gewicht der Volumeneinheit bedeutet, und es ist demnach

$$d\lambda_1 = \frac{\gamma F z}{FE} \cdot dz$$

und

$$d\lambda_2 = \pm \frac{P}{FE} dz$$

folglich:

$$d\lambda = d\lambda_1 + d\lambda_2 = \frac{1}{FE}(\gamma F z \pm P)\, dz$$

und die Gesammtausdehnung beträgt für die Länge $AB = a$:

$$\lambda = \frac{1}{FE}\int_0^a (\gamma F z \pm P)\, dz = \frac{\frac{1}{2}\gamma F a \pm P}{FE} \cdot a = \frac{\frac{1}{2} G \pm P}{FE} \cdot a,$$

worin $G = \gamma F a$ das Gesammtgewicht des Körpers bezeichnet.

Ist uns vorgeschrieben, dass in dem zu construirenden prismatischen

Körper keine bleibenden Dehnungen oder Zusammendrückungen eintreten sollen, dass also die Elasticitätsgrenze nicht überschritten werde, so müssen wir dafür sorgen, dass das Maximum der relativen Ausdehnung oder Zusammendrückung, d. i.

$$\left(\frac{d\lambda}{dz}\right)_{max.} = \left(\frac{\gamma F z \pm P}{F E}\right)_{max.}$$

kleiner bleibt, als die relative Ausdehnung oder Zusammendrückung $\sigma$, welche der Körper (durch den Tragmodul $T$ für die Flächeneinheit) an der Elasticitätsgrenze erleidet, und weil

$$\sigma : 1 = T : E; \quad \sigma = \frac{T}{E}$$

ist, so lautet unsere Bedingungsgleichung:

$$\frac{T}{E} \geqq \left(\frac{\gamma F z \pm P}{F E}\right)_{max.}$$

oder:

$$F T \geqq (\gamma F z \pm P)_{max.}$$

Nun ist aber:

I) für ein positves $P$ der Ausdruck $\gamma F z + P$,
ein positives Maximum $= G + P$ für $z = a$,
„ „ Minimum $= P$ für $z = 0$;

II) für ein negatives $P$ der Ausdruck $\gamma F z - P$,

A) wenn $G < P$
ein negatives Maximum $= - P$ für $z = 0$,
„ „ Minimum $= -(P - G)$ für $z = a$;

B) wenn $G > P$
ein absolutes Minimum $= 0$ für $z = \frac{P}{\gamma F} = z_0$,
„ positives Maximum $= G - P$ für $z = a$,
„ negatives „ $= - P$ für $z = 0$.

Für den Fall $2P = G$ ist

$$z_0 = \frac{P}{2P} = \frac{a}{2};$$

es ist dann auch nicht allein das positive Maximum und das negative gleich gross: $G - P = P$, sondern es wird zugleich selbst die Gesammtausdehnung $\lambda = 0$; wäre dagegen $G > 2P$, so ist das positive, wäre $G < 2P$, so ist das negative Maximum das grössere.

Damit also die Elasticitätsgrenze nicht überschritten werde, muss man nehmen:

I) für ein positives $P$:

$$F T \geqq \gamma F a + P$$

1) $$F \geqq \frac{P}{T - \gamma a}$$

und in diesem Ausdrucke ist natürlich $T > \gamma a$, weil das Tragvermögen $FT > G$ sein muss; wäre $\gamma a > T$, $a > \frac{T}{\gamma}$, so wäre $P \leqq -F(\gamma a - T)$ d. h. man müsste die Festigkeit durch eine dem Gewicht entgegenwirkende Kraft wenigstens von der Grösse $F(\gamma a - T)$ unterstützen, sonst ist $F$ in jedem Falle zu klein.

II) für ein **negatives** $P$ und zwar:

A) wenn $G < P$

$$2)\qquad \left.\begin{array}{r} FT \geqq P \\ F \geqq \frac{P}{T} \end{array}\right| \begin{array}{l} P > \gamma F a > \frac{P}{T}\gamma a, \\ T > \gamma a; \end{array}$$

B) wenn $G > P$ und genauer

*a*) wenn $P < G < 2P$:

$$3)\qquad \left.\begin{array}{r} FT \geqq P \\ F \geqq \frac{P}{T} \end{array}\right| \begin{array}{l} \frac{P}{T} \leqq F \leqq \frac{2P}{\gamma a}, \\ \gamma a < 2T; \end{array}$$

*b*) wenn $G > 2P$:

$$4)\qquad \begin{array}{c} FT \geqq \gamma F a - P, \\ F \leqq \frac{P}{\gamma a - T}. \end{array}$$

Weisbach giebt in der dritten Auflage seiner Ingenieur- und Maschinenmechanik, S. 320 für $F$ blos die Grenzwerthe:

$$5)\qquad F = \frac{P}{T - \gamma a},$$

$$6)\qquad F = \frac{P}{T},$$

$$7)\qquad F = \frac{P}{\gamma a - T}$$

und selbst ohne die Bedingungsgleichung, welche angiebt, wenn man sich der Formel 6), und wenn man sich der Formel 7) zu bedienen habe. Ein Blick auf die Formeln 1) bis 4) zeigt aber zur Genüge, dass man 4) mit Vorsicht anwenden müsse. Während wir nämlich bei 1) bestimmt $T > \gamma a$ voraussetzen mussten, haben wir für 4) nur die Bedingung:

$$\frac{G}{2} = \frac{\gamma F a}{2} > P \geqq (\gamma a - T) F$$

$$\gamma \frac{a}{2} > \gamma a - T,$$

welche erfüllt ist, wenn $T > \frac{\gamma a}{2}$ und wenn $\gamma a - T < 0$ ist.

Wäre $\gamma a - T < 0$, $\frac{T}{\gamma} > a$, so wird

$$F \leqq -\frac{P}{T-\gamma a};$$

da hier $F<0$, so ist der Querschnitt in jedem Falle mehr ausreichend, weil ja schon das Tragvermögen $FT>\gamma Fa$, d. h. $FT>G$ ist, der Körper also selbst dann nicht über die Elasticitätsgrenze ausgedehnt oder zusammengedrückt werden würde, wenn es sein ganzes Gewicht tragen müsste; um so weniger daher, wenn auch $(-P)$ noch einen Theil des Gewichts auf sich nimmt.

Ist dagegen $\gamma a>T>\frac{\gamma a}{2}$; $a>\frac{T}{\gamma}>\frac{a}{2}$, so sagt uns die Gleichung 4) dass, während man in 1) bis 3) sicherer geht, wenn man den Querschnitt grösser nimmt, als er sich aus den Gleichungen 5) oder 6) ergiebt, man in 4) besser den Querschnitt kleiner nimmt, als ihn Formel 7) liefert. So überraschend diess anfänglich erscheinen mag, so ist es doch wohl begründet. Ist nämlich

$$F_0=\frac{P}{\gamma a-T}$$

und wir setzen bei $n>1$ der Sicherheit wegen darin $\frac{T}{n}$ an die Stelle von $T$, so findet sich

$$F_1=\frac{P}{\gamma a-\frac{T}{n}}$$

$$\frac{F_0}{F_1}=\frac{\gamma a-\frac{T}{n}}{\gamma a-T}=\frac{n\gamma a-T}{n\gamma a-nT}=1+\frac{(n-1)T}{n(\gamma a-T)};$$

es ist also der sicherere Querschnitt kleiner. Oder ist beim Querschnitte $F_0=\frac{P}{\gamma a-T}$ das Gewicht $=G_0$ und beim Querschnitte $F_1=F_0-\delta^2$ das Gewicht $=G_1$, so soll

$$\begin{aligned}
&F_0 T=G_0-P=\gamma F_0 a-P,\\
&F_1 T=F_0 T-\delta^2 T>G_1-P=(F_0-\delta^2)\gamma a-P,\\
&F_0 T>(\gamma F_0 a-P)-\delta^2(\gamma a-T),\\
&0>-\delta^2(\gamma a-T)
\end{aligned}$$

sein, was offenbar der Fall ist, da wir ja $\gamma a>T$ voraussetzten. Je kleiner man also $F_1$ wählt, desto besser thut man; doch hat die Verkleinerung eine Grenze, die sie nicht überschreiten darf, durch die Bedingung:

$$G>2P$$
$$\gamma Fa>2P$$
$$F>\frac{2P}{\gamma a}$$

und somit ist

$$8)\qquad \frac{2P}{\gamma a}<F\leqq\frac{P}{\gamma a-T}.$$

Wäre endlich $P = \frac{1}{2} G$, so wäre

nach 3) $$F \geqq \frac{\frac{1}{2}\gamma F a}{T}; \quad 2T \geqq \gamma a,$$

nach 4) $$F \leqq \frac{\frac{1}{2}\gamma F a}{\gamma a - T}; \quad 2T \geqq \gamma a,$$

und nach beiden

$$\frac{\frac{1}{2}\gamma F a}{T} \leqq F \leqq \frac{\frac{1}{2}\gamma F a}{\gamma a - T}; \quad 2T \geqq \gamma a.$$

und somit $F$ ganz beliebig, so lange nur $\frac{a}{2} \leqq \frac{T}{\gamma}$ ist; aber es ist dann $P = \frac{1}{2}\gamma F a$, $F = \frac{2P}{\gamma a}$. Wäre $\gamma a = T$, so müsste $\frac{1}{2} F < F \leqq \infty$ sein; wäre $T > \gamma a$, so ist genau wie bei dem Falle $P < \frac{1}{2} G$ unter derselben Bedingung.

Wirkt blos das Gewicht des Körpers, ist also $P = 0$ und natürlich zugleich auch $G > 2P$, so ist

nach 1)
$$(T - \gamma a) F \geqq 0$$
$$T - \gamma a \geqq 0$$
$$T \geqq \gamma a;$$

oder nach 4)
$$(\gamma a - T) F \leqq 0,$$

also ebenfalls
$$\gamma a - T \leqq 0$$
$$T \geqq \gamma a$$

zu nehmen, und $F$ kann dabei jeden beliebigen Werth haben. Für $a > \frac{T}{\gamma}$ ist wiederum kein $F$ ausreichend.

Da in dem prismatischen Körper $\frac{d\lambda}{dz} = \frac{1}{FE}(\gamma F z \pm P)$ veränderlich ist und $F$ für $\left(\frac{d\lambda}{dz}\right)_{max.}$ bestimmt werden musste, so hat der Körper an den weniger in Anspruch genommenen Stellen einen zu grossen Querschnitt. Diess ist mindestens eine Materialverschwendung und vermehrt zweckwidrig das Gewicht des Prismas. Suchen wir daher das Gesetz auf, nach welchem der Querschnitt eines durch sein eigenes Gewicht und eine am freien Ende in derselben Richtung wirkende Kraft $P$ belasteten Körpers sich ändern muss, wenn er an jeder Stelle nur die daselbst nöthige Tragfähigkeit haben soll. Ist $F$ ein beliebiger Querschnitt eines solchen „Körpers von gleichem Widerstande" in der Entfernung $z$ vom freien Ende, und ist dieser Querschnitt in Anspruch genommen durch die Gesammtkraft $Q$, so muss nach 1)

$$F = \frac{Q}{T - \gamma dz}$$

sein, wenn wir das Volumenelement von der Höhe $dz$ über $F$ als Prisma be-

trachten (Fig. 2, Taf. IV); damit dies aber erlaubt sei, muss $dz$ ein Differenzial sein, und wir sind berechtigt, das unendlich kleine $\gamma\, dz$ zu vernächlässigen, haben also

$$F = \frac{Q}{T}$$

und die Querschnittszunahme

$$dF = \frac{dQ}{T}.$$

$Q$ wächst aber um das Gewicht des kleinen Prisma's über $F$ von der Höhe $dz$, und somit ist

$$dF = \frac{\gamma F\, dz}{T},$$

$$\int \frac{dF}{F} = \frac{\gamma}{T} \int dz = \beta \int dz,$$

wenn $\beta = \frac{\gamma}{T}$ gesetzt wird,

$$\log nat.\, F = \beta z + Const.,$$

9) $$F = e^{\beta z} \cdot e^{Const.}.$$

Dies ist die allgemeine Form, und aus ihr erhalten wir die einzelnen Fälle, wenn wir nach einander

$$P > 0, \quad P = 0 \text{ und } P < 0$$

setzen.

I. Wirkt nun am freien Ende $N$ die Kraft $+P$, so muss an ihm der Querschnitt $F_0 = \frac{P}{T}$ sein, und da $F_0$ zu $z = 0$ gehört, so ist $\frac{P}{T} = F_0 = 1 \cdot e^{Const.}$ und allgemein

10) $$F = F_0 e^{\beta z}.$$

Je grösser $z$, desto grösser wird $F$, und als Querschnitt am festgehaltenen Ende erhalten wir

$$F_a = F_0 e^{\beta a}.$$

Hätten wir die Abscissen als $\zeta$ vom festgehaltenen Ende $M$ ausgerechnet, also $\zeta = a - z$ genommen, so wäre

$$F = F_0 e^{\beta(a-\zeta)}; \quad F_0 e^{\beta a} = F e^{\beta \zeta},$$

und

11) $$\begin{cases} F = F_a e^{-\beta \zeta}, \\ F_a = F e^{\beta \zeta}. \end{cases}$$

Wählen wir endlich einen zwischen $M$ und $N_1$ in der Entfernung $d$ von $N$ gelegenen Punkt als Ausgangspunkt für die $\zeta_1$, setzen wir also $\zeta_1 = z - d$, so wäre der Querschnitt an jener Stelle, wo $\zeta_1 = 0$, $z = d$ ist, nach 10)

$$F_1 = F_0 e^{\beta d},$$

somit

12) $$F = F_0 e^{\beta(\zeta_1 + d)} = F_1 e^{\beta \zeta_1},$$

und

$$\begin{cases} F_0 = F_1 e^{-\beta d}, \\ F_a = F_1 e^{\beta d_1}, \\ d + d_1 = a; \end{cases}$$

in 12) wächst $\zeta_1$ von $-d$ bis $d_1 = a - d$, es sind also die beiden Fälle 10) und 11) zugleich darin enthalten.

II. Wäre $P$ negativ und sein absoluter Werth grösser, als das Gewicht $G_a$ des ganzen Körpers, so wären die spannenden Kräfte sämmtlich negativ, und somit bewirkt dann das mit $z$ zunehmende Gewicht eine Abnahme der spannenden Kraft (Fig. 3, Taf. IV); daher ist:

$$dQ = -\gamma F dz,$$
$$F = F_0 e^{-\beta z},$$
$$F_a = F_0 e^{-\beta a},$$

und $F < F_0$, $\frac{F_0}{F} = e^{\beta z}$, während früher $\frac{F}{F_0} = e^{\beta z}$ war.

Es ist demnach die Begrenzungsfläche umgestürzt; setzen wir aber $z' = a - z$, indem wir die $z'$ von $M$ aus zählen, so wird:

13) $$F = F_0 e^{-\beta(a-z')} = F_0 e^{-\beta a} e^{\beta z'} = F_a e^{\beta z'}.$$

III. Wäre der Querschnitt des Körpers von gleichem Widerstande an irgend einer Stelle $= 0$, so müsste an dieser Stelle die spannende Kraft $= 0$ sein; dies ist aber für ein positives $P$ nirgends der Fall, eben so wenig, wenn $P$ negativ, aber sein absoluter Werth grösser als $G_a$ ist. Wäre dagegen $P = 0$, so wäre $F_0 = 0$, $F = e^{\beta z} . e^{Const.}$, $0 = 1 . e^{Const.}$

14) $$F = 0 . e^{\beta z},$$

d. h. alle Querschnitte in endlicher Entfernung sind $= 0$.

Wäre endlich $P$ negativ und sein absoluter Werth kleiner als $G_a$, so ist an einer mittleren Stelle, etwa bei $z = a$, das Gewicht $G_{a_1} = P$, also die Spannung $= 0$ und auch der Querschnitt $F_{a_1} = 0$. Von $z = a_1$ bis $z = a$ sind die $dQ$ als positiv einzuführen, und wenn $z_1 = a - z$ gesetzt wird, so ist

$$\frac{dF}{F} = -\frac{\gamma dz}{T}, \quad F = e^{-\beta z_1} . e^{Const.};$$

für $z_1 = 0$ ist $F_a = 1 . e^{Const.}$, also

15) $$F = F_a e^{-\beta \zeta_1}.$$

Von $z = 0$ bis $z = a_1$ sind die $dQ$ wieder negativ einzuführen, und wenn $z_2 = z$, so ist

$$\frac{dF}{F} = -\frac{\gamma dz_2}{T}, \quad F = e^{-\beta z_2} e^{Const.};$$

für $z_2 = 0$ ist $F_0 = 1 e^{Const.}$, also

16) $$F = F_0 e^{-\beta z_2}.$$

Die Gleichungen 15) und 16) haben dieselbe Form wie 11) und lassen sich mit ihr in $F = F_1 e^{-\beta \zeta}$ zusammenfassen, wobei die $\zeta$ immer vom betreffenden (festen oder freien) Ende nach der Mitte hin zu rechnen sind. Unter der Voraussetzung, dass $F_a$ und $F_0$ nicht $= 0$, also dass $F_1 > 0$

ist, kann aber in $F = F_1 e^{-\beta \zeta}$ nur, wenn $\zeta = \infty$ ist, $F = 0$ sein, es sind daher alle Querschnitte in endlicher Entfernung vom einem Ende grösser als 0. Wenn wir aber in 15)

$$z_1' = z - a_1 = - z_1 + a - a_1$$

und in 16)

$$z_2' = a_1 - z_2 = a_1 - z$$

setzen, so gehen 15) und 16) über in:

$$\left.\begin{array}{l} F = F_a e^{-\beta(a-a_1)} e^{\beta z_1'} = F_{a_1} e^{\beta z_1'} \\ F = F_a e^{-\beta a_1} e^{\beta z_2'} = F_a e^{\beta z_2'} \end{array}\right\} \quad 17) \quad F = F_{a_1} e^{\beta z''} = 0 e^{\beta z_2''},$$

und da die Gleichung 17) mit 14) von gleicher Form ist, so müssten zugleich alle Querschnitte in endlicher Entfernung von $F_{a_1}$ gleich 0, und alle Querschnitte in endlicher Entfernung von einem Ende grösser als 0 sein. Da dies unmöglich ist, müssen in 15) und 16) $F_0$ und $F_a$ und alle übrigen Querschnitte mit $F_{a_1}$ gleich 0 sein, und in 14) ist auch der Querschnitt in unendlicher Entfernung $= 0$. Es ist sonach weder für $P = 0$, noch für ein negatives $P$, dessen absoluter Werth $< Ga$ wäre, ein Körper von gleichem Widerstande möglich.

Nachdem wir einmal die Querschnitte eines Körpers von gleichem Widerstande bestimmt haben, lässt sich auch leicht das Volumen jenes Stückes bestimmen, welches zwischen dem freien Ende und dem Querschnitte $F$ liegt; es ist nämlich

$$dV = F\,dz,$$

und daraus erhalten wir:

I. nach 10):

$$dV = F_0 e^{\beta z} dz,$$

$$V = \frac{1}{\beta} F_0 e^{\beta z} + Const. = \frac{TF}{\gamma} + Const.,$$

und weil für $z = 0$ auch $V = 0$, also

$$0 = \frac{1}{\beta} F_0 1 + Const. = \frac{TF_0}{\gamma} + Const. = \frac{P}{\gamma} + Const.$$

ist, so beträgt das Gewicht des in Rede stehenden Stückes

$$G = \gamma V = T \,.\, F_0 e^{\beta z} - TF_0 = T(F - F_0) = P(e^{\beta z} - 1),$$

und das Gewicht des ganzen Körpers

$$G_a = P(e^{\beta a} - 1) = T(F_a - F_0);$$

II. nach 13):

$$dV = F_a e^{\beta z'} dz',$$

$$V = \frac{1}{\beta} F_a e^{\beta z'} + Const. = \frac{TF}{\gamma},$$

$$0 = \frac{1}{\beta} F_a \,.\, 1 + Const. = \frac{TF_a}{\gamma} + Const. = \frac{TF}{\gamma} e^{-\beta z'} + Const.,$$

also das Gewicht des Stückes vom festen Ende bis zu $F$:

$$G = \gamma V = T(F - F_a) = TF(1 - e^{\beta - z'}) = Pe^{-\beta a}(e^{\beta z'} - 1),$$

und das Gewicht des ganzen Körpers:

$$G_a = T(F_0 - F_a) = P(1 - e^{-\beta a}).$$

Wäre der Körper prismatisch gemacht worden, so wäre sein Querschnitt $F' = \frac{P}{T - \gamma a}$ und sein Gewicht

$$G' = \gamma F' a = \frac{\gamma a P}{T - \gamma a} = P(\beta a + \beta^2 a^2 + \beta^3 a^3 + \beta^4 a^4 + \ldots),$$

und weil

$$e^{\beta a} - 1 = \beta a + \tfrac{1}{2}\beta^2 a^2 + \tfrac{1}{6}\beta^3 a^3 + \tfrac{1}{24}\beta^4 a^4 \ldots.) = 1 - e^{-\beta a}$$

ist, so haben wir in jedem der beiden Fälle an Material erspart:

$$G_a - G' = P\left(\tfrac{1}{2}\frac{\gamma^2 a^2}{T^2} + \tfrac{5}{6}\frac{\gamma^3 a^3}{T^3} + \tfrac{23}{24}\frac{\gamma^4 a^4}{T^4} + \ldots.\right).$$

Da der Körper blos rücksichtlich seiner absoluten Elasticität oder Festigkeit in Anspruch genommen werden soll, so stellen wir uns seine Querschnitte als ähnliche Figuren vor, deren Schwerpunkte in der Achse des Körpers liegen, und diese steht mit der ihr parallelen Kraftrichtung senkrecht auf jedem Querschnitte. Die allgemeine Form der Gleichungen 10) und 13) ist: $F = F_1 e^{\beta z}$. Jenachdem nun die Begrenzungslinie der Querschnitte $F$ und $F_1$ für rechtwinklige oder für Polarcoordinaten durch Gleichungen von der Form $\varphi(x, y) = 0$ und $\varphi(x_1, y_1) = 0$, oder von der Form $\psi(r, u)$ und $\psi(r_1, u_1)$ gegeben ist, wird

$$F = \int y\,dx = \int x\,dy$$

$$F_1 = \int y_1\,dx_1 = \int x_1\,dy_1$$

oder

$$F = \tfrac{1}{2}\int r^2\,du,$$

$$F_1 = \tfrac{1}{2}\int r_1^2\,du_1,$$

und

$$18)\quad \begin{cases} \int y\,dx = e^{\beta z}\int y_1\,dx_1, \\ \int x\,dy = e^{\beta z}\int x_1\,dy_1, \end{cases}$$

oder

$$19)\quad \tfrac{1}{2}\int r^2\,du = \tfrac{1}{2}e^{\beta z}\int r_1^2\,du_1,$$

worin die Integrale bestimmte, ihre Grenzen aber eben dadurch gegeben sind, dass die Integrale begrenzte Flächen bedeuten. — Eine oder die andere dieser drei Gleichungen zusammengenommen mit $\varphi(x, y) = 0$ oder $\psi(r, u) = 0$ bestimmt die Mantelfläche des Körpers vom gleichen Widerstande. Die Horizontalschnitte derselben sind Linien, deren Gleichungen die Form $\varphi(x, y) = 0$ oder $\psi(r, u) = 0$ haben, und wenn man in 18) vor dem Integriren beziehungsweise $y$ und $y_1$ oder $x$ und $x_1$ aus

den Gleichungen $\varphi(x,y)=0$ und $\varphi(x_1,y_1)=0$ entnimmt und einsetzt, so erhält man

$$20)\qquad \begin{cases} f(x)=f(x_1)\,.\,e^{\beta z}, \\ f_1(y)=f_1(y_1)\,.\,e^{\beta z}, \end{cases}$$

d. h. die Gleichungen der Verticalspuren in der Ebene $XZ$ oder $YZ$, oder allgemein die Gleichungen sämmtlicher Verticalschnitte parallel zur Achse der $x$ oder der $y$, jenachdem in 20) für $x_1$ und $y_1$ die Werthe für den Durchschnitt der Begrenzungslinie in $F_1$ mit der $x$- oder $y$-Achse oder andere [nach $\varphi(x_1,y_1)$ zulässige] Werthe einsetzt. Die Entfernung $y_0$ oder $x_0$ dieser Schnitte von der $x$- oder $y$-Achse in $F_1$ liefert die Gleichung $\varphi(x_1,y_1)=0$ selbst, wenn man in sie den in $f(x_1)$ oder $f_1(y_1)$ verwendeten Werth von $x_1$ oder $y_1$ einsetzt.

z. B. 1) Es sei der Querschnitt ein Quadrat, dessen Ecken in den Achsen liegen, dann ist:

$$\varphi(x,y)=\sqrt{y}-\sqrt{(\pm b)-(\pm x)}=0,$$

$$F=4.\int_0^b (b-x)\,dx,\quad F_1=4\int_0^b (b_1-x_1)\,dx_1;$$

die Gleichung der Spur in der Ebene $XZ$ oder $YZ$ (Fig. 4, Taf. IV):

$$b^2=b_1^{\,2}e^{\beta z},$$

$$b=b_1 e^{\frac{1}{2}\beta z}=b_1 n^z,\quad \text{wenn } n=e^{\frac{1}{2}\beta},$$

und die Gleichung der Verticalschnitte:

$$x=x_1 e^{\frac{1}{2}\beta z}=x_1 n^z,$$

worin aber $x_1$ nur von $-b_1$ bis $+b_1$ geht.

2) Es seien die Begrenzungslinien parallel zu den Achsen in den Entfernungen $c'$ und $c''$, dann ist

$$\varphi(x,y)=y\pm c''=0=x\pm c',$$

und die Gleichung der Verticalspur (Fig. 5, Taf. IV)

$$\left.\begin{array}{l} \text{in } XZ,\ F=4\int_0^{c'} c''\,dx=4c''c'=4c_1''c_1'\,.\,e^{\beta z} \\ \text{in } YZ,\ F=4\int_0^{c''} c'\,dx=4c'c''=4c_1'c_1''\,.\,e^{\beta z} \end{array}\right\} c''c'=c_1''c_1'\,e^{\beta z}.$$

Die Gleichung der Verticalschnitte dagegen lautet:

$$xy=x_1y_1\,e^{\beta z},$$

worin aber nach $\varphi(x_1,y_1)=0$ nur die Werthe $x_1=c_1'$ und $y_1=c_1''$ brauchbar sind, so dass durchweg

$$c''c'=c_1''c_1'\,e^{\beta z},$$

ist, und in dieser Gleichung sind wegen der vorausgesetzten Aehnlichkeit der Querschnitte $c'$ und $c''$ gleichzeitig mit $z$ variabel und zwar $\frac{c'}{c''}$

$=\frac{c_1'}{c_1''}$. Bei $c_1' = c_1'' = c_1$ geht dieser Querschnitt in den unter 1) betrachteten bei einer um 45° geänderten Achsenlage über, und es ist dann:

$$c = c_1 e^{\frac{1}{2}\beta z} = c_1 n^z,$$

wenn wieder $n = e^{\frac{1}{2}\beta}$ ist.

Wäre $c''$ für alle $z$ gleich gross, so bestünde die Mantelfläche aus zwei Ebenen, parallel $XZ$, und aus zwei Cylinderflächen von der Form $\pm c'' x = c_1'' e^{\beta z}$.

3) Für kreisförmigen Querschnitt ist:

$$\psi(r, u) = r - \varrho = 0,$$

$$F = \tfrac{1}{2}\int_0^{2\pi} \varrho^2\, du = \tfrac{1}{2}\varrho^2 \int_0^{2\pi} du = \pi \varrho^2,$$

$$F_1 = \tfrac{1}{2}\int_0^{\pi} \varrho_1^2\, du = \pi \varrho_1^2,$$

also

$$\pi \varrho^2 = \pi \varrho_1^2 e^{\beta z},$$

$$\varrho = \varrho_1 e^{\frac{1}{2}\beta z} = \varrho_1 n^z,$$

wenn abermals $n = e^{\frac{1}{2}\beta}$ ist.

Bei kreisförmigen Querschnitten sind also alle radialen Verticalschnitte congruente logarithmische Linien; bei quadratischen ist $b_1 = c_1\sqrt{2}$, $b = c\sqrt{2}$, also sind auch hier die Verticalschnitte durch die Diagonalen und parallel zu den Seiten unter einander sowohl, als mit den Verticalschnitten bei kreisförmigem Querschnitte congruent, nur dass der Anfangswerth $b_1$ einem $c$ gleich kommt, für welches $z = {}^{n}\log\sqrt{2}$ ist.

Sind die Querschnitte Linien höherer Grade, so ändert sich die Basis $n$ der Logarithmen, so z. B. schon bei kreisförmigen Querschnitten für Verticalschnitte durch Sehnen.

---

# XIV.

## Rechnung mit rationellen symmetrischen Functionen.

Von Dr. R. Hoppe,
Privatdocent in Berlin.

---

Bekanntlich lässt sich jede rationelle symmetrische Function der Wurzeln einer algebraischen Gleichung rational in deren Coefficienten ausdrücken. Ihre indepedente allgemeine Darstellung sei das letzte Ziel der vorliegenden Arbeit.

Da nach Verwandlung einer symmetrischen Function in einen einzigen Bruch Zähler und Nenner symmetrisch werden, so reducirt sich das genannte Problem auf den Fall ganzer Functionen. Jede ganze Function lässt sich in homogene Theile verschiedener Grade zerlegen, jeder homogene Theil wiederum in solche Theile, die ohne Aufhebung der Symmetrie nicht getheilt werden können, und welche geschlossene Functionen heissen mögen. Die letztere erhält man, indem man ein Glied durch alle möglichen Vertauschungen der Elemente in eine Anzahl der übrigen Glieder übergehen lässt: deren Summe nämlich ist eine geschlossene Function. Die durch Vertauschung der Elemente in einander übergehenden Glieder sollen gleichgebildete heissen.

Der Ausdruck einer geschlossenen symmetrischen Function sei

$$C(\overset{\alpha}{m_\alpha}, \ldots \overset{2}{m_2}, \overset{1}{m_1}),$$

wo $m_1, m_2, \ldots$ die Zahl der Elemente bezeichnen, welche in erster, zweiter u. s. w. Potenz mit dem darüber bemerkten Exponenten erscheinen.

Bezeichnet $n$ die Anzahl der vorhandenen Elemente und

$$l = m_1 + m_2 + \ldots m_\alpha$$

die aller verschiedenen Elemente, welche in jedem Gliede vorkommen, so ist

$$\frac{n!}{(n-l)!\, m_1!\, m_2! \ldots m_\alpha!}$$

die Anzahl der Glieder von $C$.

### I.

Nach diesen Vorbemerkungen sei die erste Aufgabe, das Product

$$P = C(\overset{1}{k})\, C(\overset{\alpha}{m_\alpha}, \ldots \overset{2}{m_2}, \overset{1}{m_1})$$

in eine Summe geschlossener Functionen zu entwickeln.

Da der erste Factor bei jeder Vertauschung von Elementen unverändert bleibt, so erhält man das Product, indem man ein Glied des zweiten Factors mit dem ersten Factor multiplicirt, und dann die Elemente derart vertauscht, dass jenes Glied in alle übrigen übergeht. Die Multiplication bewirkt, dass einige Potenzen um 1 erhöht werden. Es sei $x_\beta$ die Anzahl der $\beta^{\text{ten}}$ Potenzen, welche in die $(\beta+1)^{\text{te}}$ übergehen, und zur Abkürzung

$$l' = x_1 + x_2 + \ldots x_\alpha$$

dann ist

$$(\overset{\alpha+1}{x}, \overset{\alpha}{\overline{m_\alpha - x_\alpha + x_{\alpha+1}}}, \ldots \overset{2}{\overline{m_2 - \alpha_2 + x_1}}, \overset{1}{\overline{m_1 - x_1 + k - l'}})$$

die Form eines Gliedes des Products. Alle Glieder, in welchen sämmtliche $x$ dieselben Werthe haben, sind gleichgebildet, alle verschiedenen Systeme von Werthen der $x$ gehören zu verschiedenen geschlossenen Theilen. Folglich liefert die angedeutete Multiplication für jeden geschlossenen Theil soviel Glieder, so oft dasselbe System der $x$ vorkommt. Bei Vertauschung der $m_\beta$ Elemente, welche den Exponenten $\beta$ haben, bekommt nun $x_\beta$ so oft denselben Werth, als Combinationen $x_\beta^{\text{ter}}$ Classe zwischen $m_\beta$ Elementen möglich sind, d. i. durch Binomialcoefficienten ausgedrückt

$$(m_\beta)_{x_\beta}$$

mal. Ebenso treten

$$(n - l)_{k-l'}$$

mal $k - l'$ neue Elemente in erster Potenz als Factoren hinzu. Demnach ist

$$1) \qquad (m_1)_{x_1} (m_2)_{x_2} \ldots (m_\alpha)_{x_\alpha} (n - l)_{k-l'}$$

die Anzahl der Glieder, welche die Multiplication für den durch $x_1, \ldots x_\alpha$ charakterisirten geschlossenen Theil liefert.

Vertauscht man jetzt die Elemente so, dass jedes Glied des zweiten Factors in alle übrigen übergeht, so kann kein Glied des Products aus einem geschlossenen Theile in einen andern übergehen. Folglich multiplicirt sich die Gliederzahl eines jeden mit derselben Zahl 1). Setzt man also

$$P = \Sigma A C(\overset{\alpha+1}{\mu_{\alpha+1}}, \ldots \overset{2}{\mu_2}, \overset{1}{\mu_1}),$$

so ist

$$A \frac{n!}{(n-\lambda)!\, \mu_1! \ldots \mu_{\alpha+1}!} = \frac{n!}{(n-l)!\, m_1! \ldots m_\alpha!} \times$$
$$(m_1)_{x_1} (m_2)_{x_2} \ldots (m_\alpha)_{x_\alpha} (n-l)_{k-l'},$$

wo

$$\mu_1 = m_1 - x_1 + k - l'$$
$$\mu_\beta = m_\beta - x_\beta + x_{\beta-1}$$
$$\mu_{\alpha+1} = x_\alpha$$
$$l = S m; \quad l' = S x; \quad \lambda = S \mu$$

gesetzt ist und $S$ das Summenzeichen bedeutet.

Hieraus ergiebt sich der Werth

$$A=(m_1-x_1+k-Sx)_{k-Sx}(m_2-x_2+x_1)_{x_1}\dots(m_\alpha-x_\alpha+x_{\alpha-1})_{x\,\alpha-1}$$

oder, wenn man

$$k-Sx=x_0$$

setzt,

$$A=\prod_{\beta=1}^{\beta=\alpha}(m_\beta-x_\beta+x_{\beta-1})_{x\,\beta-1}.$$

Der erste Factor bestimmt die oberen Grenzen der $x$, nämlich $Sx \overline{\gtrless} k$, die übrigen die untern, $x \geqq 0$. Es hat sich ergeben

$$2)\quad \overset{1}{C}(k)\,\overset{\alpha}{C}(m_\alpha,\dots m_1)=\sum_{x_\alpha=0}\dots\sum_{x_1=0}^{Sx=k}\prod_{\beta=1}^{\beta=\alpha}(m_\beta-x_\beta+x_{\beta-1})_{x_{\beta-1}}\times$$

$$\overset{\alpha+1}{C}(x_\alpha,\overline{m_\alpha-x_\alpha+x_{\alpha+1}},\dots\overline{m_1-x_1+x_0})$$

wo

$$x_0=k-Sx.$$

## II.

Es soll eine geschlossene Function vom höchsten Exponenten $\alpha+1$ auf solche vom Exponenten $\alpha$ zurückgeführt werden.

Setzt man in Gleichung 2) $k$ nacheinander $=1,2,3,\dots$, so giebt es auf der rechten Seite immer nur ein Glied, welches resp. $1,2,3,\dots(\alpha+1)^{\text{te}}$ Potenzen enthält; die Anzahlen der anderen Potenzen hingegen sind unabhängige allgemeine Grössen. Man findet daher den gesuchten Werth von

$$Q=C\begin{pmatrix}\alpha+1 & & 1\\ \mu_{\alpha+1}, & \dots & \mu_1\end{pmatrix}$$

successive für $u_{\alpha+1}=1,2,3,\dots$; und $Q$ ist durch Gleichung 2) völlig bestimmt.

Es soll demgemäss die Richtigkeit des Ausdrucks

$$Q=\sum_{\sigma_\alpha=0}\dots\sum_{\sigma_1=0}^{S\sigma=\mu_\alpha=1}B\,\overset{1}{C}(\sigma_\alpha)\,C(\overset{\alpha}{\overline{\mu_{\alpha+1}+\mu_\alpha+\sigma_{\alpha+1}}}$$

$$\overset{\alpha-1}{\overline{\mu_{\alpha-1}-\sigma_{\alpha-1}+\sigma_{\alpha-2}}},\dots\overset{2}{\overline{\mu_2-\sigma_2+\sigma_1}},\overset{1}{\overline{\mu_1-\sigma_1+\mu_{\alpha-1}-S\sigma}})$$

wo $B$ Function der $\mu$ und der $\sigma$ ist, durch Einführung in die Gleichung 2) bewiesen werden. Sie giebt

$$P=\sum_{x_\alpha=0}\dots\sum_{x_1=0}^{Sx=k}A\sum_{\sigma_\alpha=0}\dots\sum_{\sigma_1=0}^{S\sigma=x_\alpha}B\,\overset{1}{C}(\sigma_\alpha)\times$$

$$C(m_\alpha+x_{\alpha-1}+\sigma_{\alpha-1},m_{\alpha-1}-x_{\alpha-1}+x_{\alpha-2}-\sigma_{\alpha-1}+\sigma_{\alpha-2},\dots$$

$$\dots m_2-x_2+x_1-\sigma_2+\sigma_1,m_1-x_1+k-Sx-\sigma_1+x_\alpha-S\sigma).$$

Hier treten in $B$ an die Stelle der $\mu$ die Werthe

$$\mu_1 = m_1 - x_1 + k - S x$$
$$\mu_2 = m_2 - x_2 + x_1, \text{ etc.}$$
$$\mu_\alpha = m_\alpha - x_\alpha + x_{\alpha+1}$$
$$\mu_{\alpha+1} = x_\alpha.$$

Setzt man

$$\sigma_1 = \varrho_1 - x_1, \; \sigma_2 = \varrho_2 - x_2, \ldots \sigma_{\alpha-1} = \varrho_{\alpha-1} - x_{\alpha-1}, \; \sigma_\alpha = \varrho_\alpha$$

so kommt nach Vertauschung der Summenzeichen

$$P = \sum_{\varrho_\alpha=0}^{S\varrho=k} \ldots \sum_{\varrho_1=0}^{1} C(\varrho_\alpha)\, C(m_\alpha + \varrho_{\alpha-1}, m_{\alpha-1} - \varrho_{\alpha-1} + \varrho_{\alpha-2}$$
$$\ldots m_2 - \varrho_2 + \varrho_1, m_1 - \varrho_1 + k - S\varrho)\, M$$
$$M = \sum_{Sx=S\varrho}^{Sx=k} \ldots \Sigma A B$$

Diese Gleichung wird befriedigt, wenn für $\varrho_\alpha = k$, $M = 1$, für jedes andere $\varrho_\alpha$, $M = 0$ ist. Dies ist der Fall, wenn

$$B = (-1)^{\mu_{\alpha+1} + \sigma_\alpha} \sum_{\gamma=0}^{\gamma=\alpha} \prod_{\beta=1}^{\beta=\gamma} (\mu_\beta + \sigma_{\beta-1})_{\mu_\beta} \prod_{\beta-\gamma+1}^{\beta=\gamma} (\mu_\beta + \sigma_{\beta-1} - 1)_{\mu_\beta}.$$

gesetzt wird. Zum Beweise sei

$$\tau_\beta = \varrho_\beta = \sigma_\beta + x_\beta \text{ für } \beta < \gamma$$
$$\tau_\beta = \varrho_{\beta+1} - 1 = \sigma_\beta + x_\beta - 1 \text{ für } \beta > \gamma - 1.$$

Dann erhält man nach Substitution der Werthe von $A$ und $B$.

$$M = \sum^{x} (-1)^{x + \varrho_\alpha} \prod_{\beta=1}^{\beta=\alpha} (m_\beta - x_\beta + x_{\beta-1})_{x_{\beta-1}} \times$$
$$\sum_{\gamma=0}^{\gamma=\alpha} \prod_{\beta=1}^{\beta=\alpha} (m_\beta - x_\beta + \tau_{\beta-1})_{\tau_{\beta-1} - x_{\beta-1}}$$
$$= \sum^{x} (-1)^{x_\alpha + \varrho_\alpha} \sum_{\gamma=0}^{\gamma=\alpha} \prod_{\beta=1}^{\beta=\alpha} (m_\beta - x_\beta + \tau_{\beta-1})_{\tau_{\beta-1}} (\tau_{\beta-1})_{x_{\beta-1}}$$

Lässt man $x_0$ statt $x_\alpha$ unabhängig variiren, so wird

$$x = k - x_0 - x_1 - \ldots x_{\alpha-1} = k - S x$$

und man kann obige Summe folgendermassen ordnen:

$$M = (-1)^{k + \varrho_\alpha} \sum_{\gamma=0}^{\gamma=\alpha} \sum^{x_{\alpha-1}} T_{\alpha-1} \sum^{x_{\alpha-2}} \ldots T_1 \sum^{x_0} T_0,$$

wo

$$T_0 = (-1)^{x_0} (m_\alpha - k + S x + \tau_{\alpha-1})_{\tau_{\alpha-1}} (\tau_0)_{x_0}$$
$$T_\beta = (-1)^{x_\beta} (m_\beta - x_\beta + \tau_{\beta-1})_{\tau_{\beta-1}} (\tau_\beta)_{x_\beta}$$

für $\beta = 1, 2 \ldots \alpha - 1$ zu setzen ist. Zur Summation wende ich folgende Formel an:

$$\sum^{x} (-1)^x (a + x)_e (b - x)_f c_x = \sum^{\lambda} (-1)^\lambda a_{e-\lambda} (b - c)_{f-c+\lambda} c^\lambda$$

die Summen zwischen den weitesten Grenzen genommen, eine Formel, welche man leicht durch partielle Differentiation der binomischen Entwickelung von

$$\left(1-\frac{x}{y}\right)^c x^a y^b$$

nach $x$ und $y$ erhält. Ihr zufolge ist

$$\overset{x_0}{\Sigma} T_0 = (-1)^{\tau_0} U_1 = (-1)^{\tau_0} (m_\alpha - k + x_1 + \ldots x_{\alpha-1} + \tau_{\alpha-1})_{\tau_{\alpha-1}-\tau_0}$$

$$\overset{x_1}{\Sigma} T_1 U_1 = \overset{\lambda_1}{\Sigma} (-1)^{\lambda_1} U_2 V_1 (\tau_1)_{\lambda_1}$$

$$U_2 = (m_\alpha - k + x_2 + \ldots x_{\alpha-1} + \tau_{\alpha-1})_{\tau_{\alpha-1}-\tau_0-\lambda_1}$$

$$V_1 = (m_1 - \tau_0 - \tau_1)_{\tau_0 - \tau_1 + \lambda_1}$$

$$\overset{x_2}{\Sigma} T_2 U_2 = \overset{\lambda_2}{\Sigma} (-1)^{\lambda_2} U_3 V_2 (\tau_2)_{\lambda_2}$$

$$U_3 = (m_\alpha - k + x_3 + \ldots x_{\alpha-1} + \tau_{\alpha-1})_{\tau_{\alpha-1}-\tau_0-\lambda_1-\lambda_2}$$

$$V_2 = (m_2 + \tau_1 - \tau_2)_{\tau_1 - \tau_2 + \lambda_2}$$

u. s. w., schliesslich

$$\overset{x_{\alpha-1}}{\Sigma} T_{\alpha-1} U_{\alpha-1} = \overset{\lambda_{\alpha-1}}{\Sigma} (-1)^{\lambda_{\alpha-1}} U_\alpha V_{\alpha-1} (\tau_{\alpha-1})_{\lambda_{\alpha-1}}$$

$$U_\alpha = (m_\alpha - k + \tau_{\alpha-1})_{\tau_{\alpha-1}-\tau_0-S\lambda}$$

$$V_{\alpha-1} = (m_{\alpha-1} + \tau_{\alpha-2} - \tau_{\alpha-1})_{\tau_{\alpha-2}-\tau_{\alpha-1}+\lambda_{\alpha-1}}$$

$$M = \sum_{\gamma=0}^{\gamma=\alpha} \overset{\lambda}{\Sigma} (-1)^{k+\varrho_\alpha+S\lambda} U_\alpha V_1 V_2 \ldots V_{\alpha-1} (\tau_1)_{\lambda_1} \cdots (\tau_{\alpha-1})_{\lambda_{\alpha-1}}.$$

Die Indices der Binomialcoefficienten $U_\alpha$, $V_1$, $V_2$, ... $V_{\alpha-1}$ müssen sämmtlich $=0$ sein, weil ihre Summe $=0$, und keiner negativ ist. Daraus geht hervor

$$\lambda_\beta = \tau_\beta - \tau_{\beta-1}, \quad S\lambda = \tau_{\alpha-1} - \tau_0.$$

Von der ganzen vielfachen Summe nach den $\lambda$ bleibt mithin nur ein Glied übrig, und man hat

$$M = \sum_{\gamma=0}^{\gamma=\alpha} (-1)^{k+\varrho_\alpha+\tau_{\alpha-1}} \prod_{\beta=1}^{\beta=\alpha-1} (\tau_\beta)_{\tau_\beta-\tau_{\beta-1}}$$

$$= \sum_{\gamma=0}^{\gamma=\alpha} (-1)^{k+\varrho_\alpha+\tau_{\alpha-1}} (\varrho_\gamma - 1)_{\varrho_\gamma-\varrho_{\gamma-1}-1}$$

$$\prod_{\beta=1}^{\beta=\gamma-1} (\varrho_\beta)_{\varrho_\beta-\varrho_{\beta-1}} \prod_{\beta=\gamma+1}^{\beta=\alpha-1} (\varrho_\beta - 1)_{\varrho_\beta-\varrho_{\beta-1}}$$

Alle Glieder dieser Summe würden verschwinden, wenn nicht

$$\varrho_0 \overline{\overline{<}} \varrho_1 \overline{\overline{<}} \ldots \varrho_\alpha$$

wäre. Da in diesem Falle die Gleichung $M=0$ der Behauptung gemäss ist, so kann man die Grössenordnung der $\varrho$ zur Voraussetzung machen. Aus ihr folgt, dass, wenn ein $\varrho$ verschwindet, alle vorhergehenden ein Gleiches thun. Ist also $\varrho_\delta = 0$, so verschwinden wegen des Factors

$$(\varrho_\gamma - 1)_{\varrho_\gamma - \varrho_{\gamma-1} - 1}$$

alle Glieder der Summe $M$ von $\gamma = 0$ bis $\gamma = \delta$, ingleichen diejenigen, in welchen $\varrho_\gamma = \varrho_{\gamma-1}$ ist. Der Ausdruck $M$ behält seine Form, enthält hingegen keine einander gleichen $\varrho$ mehr, nachdem man alle Factoren $= 1$ weggelassen hat.

Da nun $S\varrho \gtreqless k$ ist, so verschwinden für $\varrho_\alpha = k$ alle übrigen $\varrho$, mithin alle Glieder von $M$ bis auf das letzte, und man behält $M = 1$, wodurch die erste Behauptung bewiesen ist.

Es sei zur Abkürzung

$$R_\gamma = \prod_{\beta=1}^{\beta=\gamma} (\varrho_\beta)_{\varrho_{\beta-1}}$$

$$N_\gamma = \prod_{\beta=\gamma+1}^{\beta=\alpha-1} (\varrho_\beta - 1)_{\varrho_{\beta-1} - 1}$$

also

$$M = \sum_{\gamma=0}^{\gamma=\alpha} (-1)^{k+\varrho_\alpha+\tau_{\alpha-1}} R_{\gamma-1} N_\gamma (\varrho_\gamma - 1)_{\varrho_{\gamma-1}}$$

dann ist die Summe der zwei ersten Glieder

$$= (-1)^{k+\varrho^\alpha+\varrho_{\alpha-1}-1} \left\{ N_0 + R_0 N_1 (\varrho_1 - 1)_{\varrho_0} \right\}$$

$$= (-1)^{k+\varrho_\alpha+\varrho_{\alpha-1}-1} N_1 \left\{ (\varrho_1 - 1)_{\varrho_0 - 1} + (\varrho_1 - 1)_{\varrho_0} \right\}$$

$$= (-1)^{k+\varrho_\alpha+\varrho_{\alpha-1}-1} R_1 N_1,$$

daher (mit unverändertem Vorzeichen) die Summe der drei ersten Glieder

$$= \pm \left\{ R_1 N_1 + R_1 N_2 (\varrho_2 - 1)_{\varrho_1} \right\}$$

$$= \pm R_1 N_2 \left\{ (\varrho_2 - 1)_{\varrho_1 - 1} + (\varrho_2 - 1)_{\varrho_1} \right\} = \pm R_2 N_2$$

u. s. w., endlich die Summe der $\alpha$ ersten Glieder

$$= \pm R_{\alpha-1} N_{\alpha-1} = (-1)^{k+\varrho_\alpha+\varrho_{\alpha-1}-1} R_{\alpha-1}$$

und das letzte Glied

$$= (-1)^{k+\varrho_\alpha+\varrho_{\alpha-1}} R_{\alpha-1},$$

folglich $M = 0$, was allein noch zu beweisen war. Stellt man das Resultat zusammen, so erhält man

$$C\begin{pmatrix} \alpha+1 & & 1 & 2 \\ \mu_{\alpha+1}, & \ldots & \mu_2, & \mu_1 \end{pmatrix} = \sum_{\sigma_\alpha=0}^{S\sigma=\mu_{\alpha+1}} \ldots \sum_{\sigma_1=0}^{1} C(\sigma_\alpha) \times$$

$$C(\overline{\mu_\alpha + \mu_{\alpha+1} + \sigma_{\alpha-1}}^{\,\alpha},\ \overline{\mu_{\alpha-1} - \sigma_{\alpha-1} + \sigma_{\alpha-2}}^{\,\alpha-1}, \ldots$$

$$\ldots \overline{\mu_2 - \sigma_2 + \sigma_1}^{\,2},\ \overline{\mu_1 - + \sigma_1 \mu_{\alpha+1} - S\sigma}^{\,1}) \times$$

$$(-1)^{\mu_{\alpha+1}+\sigma_\alpha} \sum_{\gamma=0}^{\gamma=\alpha} \prod_{\beta=1}^{\beta=\gamma} (\mu_\beta + \sigma_{\beta-1})_{\mu_\beta} \prod_{\beta=\gamma+1}^{\beta=\alpha} (\mu_\beta + \sigma_{\beta-1} - 1)_{\mu_\beta},$$

wo $\sigma_0 = \mu_{\alpha+1} - S\,\sigma$ gesetzt ist.

Dieser Ausdruck ist etwas undeutlich für $\alpha = 1$, wo die Zahlen $\mu_\alpha + \mu_{\alpha+1} + \sigma_{\alpha-1}$ und $\mu_1 - \sigma_1 + \mu_{\alpha+1} - S\sigma$ identisch werden müssen.

Ihr Werth ergiebt sich aus der Betrachtung, dass

$$\mu_1 + 2\mu_2 + 3\mu_3 + \ldots (\alpha+1)\mu_{\alpha+1}$$

den Gradexponenten der linken, also auch der rechten Seite ausdrückt, und ist demgemäss $= \mu_1 + 2\mu_2 - \sigma_1$. Für diesen Fall lautet daher die Formel

$$C(\overset{2}{\mu}, \overset{1}{\nu}) = \sum_{\sigma=0}^{\sigma=\mu} (-1)^{\sigma+\mu} C(\overset{1}{\sigma}) \, C\left(\overset{1}{\overline{2\mu_1 + \nu - \sigma}}\right) \times$$
$$\left\{ (\mu + \nu - \sigma)_\nu + (\mu + \nu - \sigma - 1)_\nu \right\}.$$

Hiermit ist die Aufgabe gelöst, die Grössen $C$, in welchen die Elemente die sämmtlichen Wurzeln einer algebraischen Gleichung sind, durch Coefficienten dieser Gleichung auszudrücken. Jeder Coefficient ist von der Form $C(k^1)$. Durch wiederholte Anwendung der entwickelten Formel wird der höchste Exponent in $C$ successive von $\alpha$ bis auf 1 reducirt, so dass zuletzt nur Gleichungscoefficienten übrig bleiben. Die Ausführung besteht in einer blosen Substitution.

---

# Kleinere Mittheilungen.

**XXX. Ueber die Auflösung der Gleichung $x^3 + y^3 = x - y$ in rationalen Zahlen.** Von R. Hoppe. Durch die Substitutionen

$$y = \frac{1-u}{1+u} x, \quad y = \frac{3u-1}{3u+1} x$$

ergeben sich aus der genannten Gleichung die Werthe

$$\left.\begin{matrix} x \\ y \end{matrix}\right\} = (1 \pm u) \sqrt{\frac{u}{1+3u^2}} \quad \text{und} \quad \frac{3u \pm 1}{3\sqrt{u(1+3u^2)}}$$

beide rational, sobald $u$ die Bedingung

$$1) \qquad \frac{u}{1+3u^2} = z^2$$

erfüllt. Der eine geht durch Substitution von

$$\frac{1}{3u} \text{ für } u$$

in den andern über. Da nun offenbar $u$ nur von der Form $n^2$ oder $3n^2$ sein kann, so kann man ohne Beschränkung $u$ als Quadrat betrachten.

Es sei jetzt

$$\varphi(u) = \frac{2u}{1+3u^2} = v, \quad \psi(v) = \frac{2v}{1-3v^2} = w,$$

dann wird

$$\frac{w}{1+3w^2} = w\left(\frac{1-3u^2}{1+3v^2}\right)^2$$

ein Quadrat, wenn $w$ es ist, und

$$w = \frac{u}{1+3u^2}\left(2\,\frac{1+3u^2}{1-3u^2}\right)^2$$

ein Quadrat, wenn $u$ der Bedingung 1) genügt. Hat man also eine Lösung der Gleichung 1), so wird dieselbe auch nach Substitution von $\psi\varphi(u)$ für $u$ befriedigt. Setzt man

$$f(u) = \psi\varphi(u) = \frac{4u(1+3u^2)}{(1-3u^2)^2},$$

so ist

$$f^n(u) = fff\ldots f(u)$$

das allgemeine Glied einer unbegrenzten Reihe von Lösungen.

Specialauflösungen sind z. B. $u=1$, $u=\left(\frac{3}{11}\right)^2$; daraus ergeben sich folgende zwei Scalen:

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| $u=1$ | $2^2$ | $\left(\frac{28}{47}\right)^2$ | $\left(\frac{3}{11}\right)^2$ | $\left(\frac{3\cdot11\cdot2\cdot61}{23\cdot313}\right)^2$ |
| $x=1$ | $\frac{10}{7}$ | $\frac{28\cdot41\cdot73}{47\cdot2593}$ | $\frac{3\cdot5\cdot13}{11\cdot61}$ | $\frac{4026\cdot68034277}{7199\cdot58941127}$ |
| $y=0$ | $-\frac{6}{7}$ | $\frac{28\cdot25\cdot57}{47\cdot2593}$ | $\frac{3\cdot7\cdot8}{11\cdot61}$ | $\frac{4026\cdot35616925}{7199\cdot58941127}$ |
| und | | | | |
| $x=\frac{2}{3}$ | $\frac{13}{14}$ | $\frac{47\cdot4561}{28\cdot2593}$ | $\frac{11\cdot2\cdot37}{3^2\cdot61}$ | $\frac{7199\cdot100451629}{3\cdot4026\cdot58941127}$ |
| $y=\frac{1}{3}$ | $\frac{11}{14}$ | $\frac{47\cdot11\cdot13}{28\cdot2593}$ | $-\frac{11\cdot47}{3^2\cdot61}$ | $-\frac{7199\cdot3199573}{3\cdot4026\cdot58941127}$ |

Die Inversion der Functionen $\varphi$, $\psi$ giebt

$$u = \frac{1\pm\sqrt{1-3v^2}}{3v}, \quad v = \frac{\sqrt{1+3w^2}-1}{3w},$$

woraus hervorgeht

$$1-3v^2 = \frac{2v}{w}.$$

Ist also $w$ eine Lösung, so ist auch $v$ rational; $u$ wird alsdann gleichfalls rational und eine Lösung sein, wenn $2vw$ ein Quadrat ist. Andernfalls beginnt die Scale mit $w$, wie es der Fall ist mit den Werthen $w=1$, $w=\left(\frac{3}{11}\right)^2$, für welche

$$2vw = \frac{2}{3}, \quad \frac{2}{3 \cdot 11^2}$$

kein Quadrat ist.

Zum Zweck der Entwickelung des allgemeinen Gliedes der Scala sei

$$X(u) = \frac{2iu}{1+3u^2},$$

dann wird nach $2n$ maliger Functionirung

$$X^{2n}(u) = (-1)^n f^n(u).$$

Ferner sei

$$m = 1 + 3u^2, \quad r^2 = um,$$

$$X^n(u) = \frac{B_n}{A_n}, \quad r_n = A_n^2 - 3B_n^2,$$

wo $A_n$ und $B_n$ ganze Functionen von $u$ ohne gemeinschaftliche Factor sind; dann ist, wie sich leicht ergiebt, $A_n$ vom Grade $2^n$, $B_n$ vom Grade $2^n - 1$, $r_n$ vom Grade $4^n$. Durch fortgesetzte Substitution von $X(u)$ für $u$, durch welche

$$u \text{ in } \frac{2iu}{m}, \quad m \text{ in } \frac{r_0^2}{m^2}, \quad r^2 \text{ in } \frac{2iur_0^2}{m^3}, \quad r_n^2 \text{ in } m^{-4^n} r_{n+1}$$

übergeht, findet man ohne Schwierigkeit

$$X^n(u) = (2i)^n \left(\frac{rr_0r_1 \ldots r_{n-3}}{r_{n-2}}\right)^2.$$

Setzt man

$$A_n^2 = p_n, \quad 3B_n^2 = q_n,$$

dann wird

$$1 + 3[X^{n+1}(u)]^2 = 1 + 3\left(\frac{2iX^n(u)}{1+3[X^n(u)]^2}\right)^2 = \left(\frac{1-3[X^n(u)]^2}{1+3[X^n(u)]^2}\right)^2$$

oder

$$1 + \frac{q_{n+1}}{p_{n+1}} = \left(\frac{p_n - q_n}{p_n + q_n}\right)^2,$$

woraus hervorgeht

$$p_{n+1} = (p_n + q_n)^2, \quad q_{n+1} = -4p_nq_n.$$

Hat man mittelst dieser recurrenten Gleichungen $p_n$ und $q_n$ auf $u$ zurückgeführt, so erhält man

$$r_n = p_n - q_n, \quad f^n(u) = 4^n \left(\frac{rr_0r_1 \ldots r_{2n-3}}{r_{2n-3}}\right)^2.$$

---

**XXXI. Elementare Theorie der axonometrischen Projection.** Sind $OA$, $OB$, $OC$ (s. Taf. IV, Fig. 6) die drei in einer Ecke zusammenstossenden Kanten eines Würfels und $O'A'$, $O'B'$, $O'C'$ ihre Projectionen auf eine Bildebene $EF$, so bieten sich zwei Aufgaben dar hinsichtlich des Zusammenhanges zwischen jener körperlichen Ecke $OABC$ und ihrer Projection.

Man kann entweder die Würfelkante $OA$ und die Stellung der Ecke gegen die Bildebene als bekannt ansehen und daraus die Grössen und gegenseitigen Lagen von $O'A', O'B', O'C'$ herleiten; man kann aber auch umgekehrt annehmen, dass $O'A', O'B', O'C'$ der Grösse, nicht aber der Lage nach, gegeben seien und dann hat man zuerst die Winkel $A'O'B', B'O'C', C'O'A'$ zu ermitteln, unter denen jene Geraden aneinandergelegt werden müssen, wenn sie überhaupt als Projectionen von $OA, OB, OC$ dienen sollen; ferner ist die Würfelkante $OA$ und endlich die Stellung von $OABC$ gegen die Bildebene zu bestimmen. Die letztere Aufgabe ist das Fundamentalproblem der axonometrischen Projection; es wurde zuerst von Professor Weisbach mit Hülfe der sphärischen Trigonometrie gelöst (Polytechnische Mittheilungen von Volz und Karmarsch, Bd. I, S. 125), wobei freilich die Winkel $A'O'B', B'O'C', C'O'A'$ nur berechnet, nicht aber geometrisch construirt wurden; eine analytisch-geometrische Lösung des Problemes, die ich im zweiten Bande der Zeitschrift „Der Civilingenieur, herausgegeben von Prof. Dr. Zeuner," veröffentlichte und auch in meine analytische Geometrie des Raumes aufnahm, führte dagegen zu dem bemerkenswerthen Satze, dass die Projectionen $O'A', O'B', O'C'$ die Wihkel eines Dreiecks halbiren, dessen Seiten sich wie die Quadrate von $O'A', O'B', O'C'$ verhalten, worauf eine Construction der nöthigen Winkel leicht zu gründen ist. Die Einfachheit dieses Resultates liess erwarten, dass sich dasselbe auch mit elementaren Mitteln würde erreichen lassen, und in der That findet man bereits in der „Anleitung zum axonometrischen Zeichnen von Bergrath und Professor J. Weisbach, Freiberg 1857" einen geometrischen Beweis des vorhin ausgesprochenen Satzes. Wie mir scheint, kann aber die Sache noch weit einfacher gemacht werden, und dies ist es, was ich im Folgendem zeigen will.

Die Würfelkanten $OA$, $OB$, $OC$ schneiden bei hinreichender Verlängerung die Bildebene in Punkten $L, M, N$, die wir, dem Sprachgebrauche der descriptiven Geometrie gemäss, die Spuren der Kanten nennen; ebenso sind die Geraden $LM, MN, NL$ die Spuren der Ebenen $AOB, BOC, COA$. Da die Gerade $OA$ normal zur Ebene $BOC$ ist, so steht die Projection $O'A'$ senkrecht auf der Spur $MN$, und wenn daher $O'A'$ einerseits bis $L$, andererseits bis zum Durchschnitte $U$ mit $MN$ verlängert wird, so erscheint $LU$ als die zur Basis $MN$ gehörende Höhe des Spurendreiecks $LMN$. In gleicher Weise sind $MV$ und $NW$ die übrigen Höhen desselben Dreiecks. Ferner bemerkt man leicht, dass auch $OU$ senkrecht auf $MN$ steht, mithin $\angle OUL$ der Neigungswinkel der Ebene $BOC$ gegen die Projectionsebene ist; dem analog würden sich die Neigungswinkel von $COA$ und $AOB$ gegen $EF$ construiren lassen.

Wir betrachten nun erst das Spurendreieck mit seinen Höhen (s. Taf. IV, Fig. 7). Dasselbe zerfällt in drei Vierecke $O'VLW$, $O'WMU$, $O'UNV$, welche aus sehr naheliegenden Gründen Sehnenvierecke sind; zieht man

darin die Diagonalen $VW$, $WU$, $UV$, und benutzt den Satz von der Gleichheit aller über demselben Bogen stehender Peripheriewinkel, so findet man leicht die Gleichungen

$$\angle VLW = \angle MO'W = \angle NO'V$$
$$= \angle MUW = \angle NUV$$

mithin auch

$$\angle LUW = LUV,$$

denen noch zwei andere Gruppen von Gleichungen entsprechen. Ueberhaupt sind die in der Figur gleichmässig bezeichneten Winkel gleich. Hieraus folgt einerseits, dass die Geraden $LU$, $MV$, $NW$ die Winkel des Dreiecks $UVW$ halbiren, andererseits, dass die abgeschnittenen Dreiecke $VLW$, $WMU$, $UNV$ einander ähnlich sind. Durch die erste Bemerkung sind $LU$, $MV$, $NW$ oder $O'A'$, $O'B'$, $O'C'$ ihrer Lage nach bestimmt, sobald man die Seiten des Dreiecks $UVW$ kennt. Wir bezeichnen dieselben so, wie sie den Ecken $U$, $V$, $W$ gegenüberliegen, mit $u$, $v$, $w$ und haben dann aus der Aehnlichkeit der Dreiecke $UMW$ und $UVN$

$$v : UM = UN : w \text{ oder } v \,.\, w = UM \,.\, UN.$$

Beachtet man weiter, dass in dem rechtwinkligen Dreiecke $MON$ die Gerade $OU$ das Perpendikel von der Spitze des rechten Winkels auf die Hypotenuse darstellt, so hat man statt der vorigen Gleichung die folgende

$$v \,.\, w = \overline{OU}^2.$$

Die Gerade $OU$ kommt aber auch als Kathete in dem bei $O$ rechtwinkligen Dreiecke $UOL$ vor, worin $OO'$ senkrecht auf der Hypotenuse $UL$ steht; es ist daher $\triangle OO'U \sim \triangle LO'O$ oder, wenn $AA'$ parallel und gleich $A'O'$ gezogen wird, $\triangle OO'U \sim \triangle AA'O$. Unter Einführung der Bezeichnungen $OA = OB = OC = d$, $OO' = h$, $O'A' = AA' = a'$, $O'B' = b'$, $O'C' = c'$ liefern die genannten ähnlichen Dreiecke

$$OU : h = d : a' \text{ oder } OU = \frac{dh}{a'},$$

mithin ist nach dem Vorigen

$$v \,.\, w = \frac{d^2 h^2}{a'^2}$$

und analog für die übrigen Seiten

$$w \,.\, u = \frac{d^2 h^2}{b'^2}, \quad u \,.\, v = \frac{d^2 h^2}{c'^2}.$$

Hieraus ergeben sich die Gleichungen

$$1) \quad \begin{cases} u = \dfrac{dh}{b'c'} a' = \dfrac{dh}{a'b'c'} a'^2, \\ v = \dfrac{dh}{c'a'} b' = \dfrac{dh}{a'b'c'} b'^2, \\ w = \dfrac{dh}{a'b'} c' = \dfrac{dh}{a'b'c'} c'^2, \end{cases}$$

die unmittelbar das Verhältniss

$$u:v:w = a'^2 : b'^2 : c'^2$$

erkennen lassen. Die Geraden $O'L$, $O'M$, $O'N$ halbiren also die Winkel eines Dreiecks, dessen Seiten sind

$$\frac{a'^2}{k}, \quad \frac{b'^2}{k}, \quad \frac{c'^2}{k},$$

wobei $k$ eine Gerade von willkührlicher Länge bezeichnet. Gewöhnlich nennt man $c'$ die grösste der gegebenen Projectionen; für $k=c'$ wird dann die Construction am einfachsten.

Aus den ähnlichen Dreiecken $UO'O$, $OA'A$ und $OO'L$ erhält man noch

$$2) \quad O'L = \frac{a'h}{\sqrt{d^2-a'^2}}, \quad O'M = \frac{b'h}{\sqrt{d^2-b'^2}}, \quad O'N = \frac{c'h}{\sqrt{d^2-c'^2}},$$

$$3) \quad OL = \frac{dh}{\sqrt{d^2-a'^2}}, \quad OM = \frac{dh}{\sqrt{d^2-b'^2}}, \quad ON = \frac{dh}{\sqrt{d^2-c'^2}};$$

endlich bemerke man, dass zwischen den Katheten $MO$, $NO$ irgend eines rechtwinkligen Dreiecks und dem auf die Hypotenuse herabgelassenen Perpendikel $OU$ die bekannte Relation

$$OU = \frac{OM \, . \, ON}{\sqrt{(OM)^2 + (ON)^2}}$$

oder

$$\left(\frac{1}{OU}\right)^2 = \left(\frac{1}{OM}\right)^2 + \left(\frac{1}{ON}\right)^2$$

stattfindet; im vorliegenden Falle wird hieraus zufolge der Werthe von $OU$, $OM$, $ON$,

$$a'^2 = 2d^2 - b'^2 - c'^2,$$

d. i.

$$4) \quad d = \sqrt{\tfrac{1}{2}(a'^2 + b'^2 + c'^2)}.$$

Dass nun die Aufgabe durch die Formeln 1) bis 4) ihre vollständige Lösung gefunden hat, ist leicht zu übersehen; wird nämlich die grösste der gegebenen Projectionen mit $c'$ bezeichnet, so gelten folgende Constructionen (s. Taf. IV, Fig. 8). Man nehme in beliebiger Lage die Gerade $U'V' = c'$, beschreibe über ihr einen Halbkreis, trage in diesen die Sehnen $V'P = a'$, $U'Q = b'$ ein und fälle von $P$ und $Q$ auf $U'V'$ die Senkrechten $PR$ und $QS$. Aus den Seiten $U'V'$, $V'W' = V'R$ und $U'W' = U'S$ bilde man das Dreieck $U'V'W'$; dieses ist dem früheren Dreiecke $UVW$ ähnlich und daher geben seine Winkelhalbirenden $U'O'$, $V'O'$, $W'O'$ die Richtungen der Projectionen an. Nimmt man auf den Verlängerungen von $U'O'$, $V'O'$, $W'O'$ die Abschnitte $O'A' = a'$, $O'B' = b'$, $O'C' = c'$, so hat man die Projectionen $a'$, $b'$, $c'$ in die gehörige Lage gebracht. Die Projection des ganzen Würfels erscheint jetzt so, wie Fig. 9, Taf. IV zeigt, wobei der Raumersparniss wegen $a'$, $b'$, $c'$ in halber Grösse gezeichnet sind. Die Kante $d$ des Würfels ergiebt sich aus Formel 4), welcher die Construction in Fig. 10 entspricht. Will man endlich die Lagen von $OA = OB = OC = d$ gegen

die Projectionsebene bestimmen, so wählt man $O'O = h$ willkührlich, construirt $O'L$, $O'M$, $O'N$ nach den Formeln 2) und schneidet diese Strecken auf $O'A$, $O'B'$, $O'C'$ ab; man hat jetzt das Spurendreieck, mithin auch $OL$, $OM$, $ON$.

Wie man sich der ebenen Trigonometrie bedienen kann um die Winkel des Dreiecks $U'V'W'$ mithin auch

5) $\angle(a'b') = 90^0 + \frac{1}{2}W'$, $\angle(c'a') = 90^0 + \frac{1}{2}V'$, $\angle(b'c') = 90^0 + \frac{1}{2}U'$

und die Winkel $O'OL$, $O'OM$, $O'ON$ oder deren Complemente zu berechnen, das bedarf keiner näheren Auseinandersetzung; selbstverständlich kommt man damit auf die Formeln zurück, die a. a. O. entwickelt worden sind.

Den vorigen theoretischen Erörterungen fügen wir noch eine praktische Bemerkung bei in Beziehung auf die Construction der Winkel zwischen den Achsenprojectionen; als Beispiel diene hierzu das beliebte Verhältniss

$$a' : b' : c' = 9 : 5 : 10$$

also

$$u : v : w = 81 : 25 : 100.$$

Es wäre nicht rathsam, ein Dreieck nach den letzteren Verhältnissen zu construiren und dessen Winkel zu halbiren, denn jenes Dreieck würde den stumpfen Winkel $134^0\,0'\,44''$ enthalten und daher zu keiner genauen Zeichnung taugen; vielmehr wird man die halben Dreieckswinkel berechnen und hieraus nach No. 5) die gesuchten Winkel herleiten. Man findet

$$\tfrac{1}{2}U = 17^0\,48'\,53''\,3,\quad \tfrac{1}{2}V = 5^0\,10'\,44''\,7,\quad \tfrac{1}{2}W = 67^0\,0'\,22''.$$

Die Werthe von $\tan\frac{1}{2}V$ und $\tan\frac{1}{2}W$ sind nun bekannt und müssten soweit abgekürzt werden, als sie mit Hülfe eines Maasstabes aufgetragen werden können; dieses Verfahren gewährt aber keine grosse Genauigkeit und es ist daher besser, jene Tangentenwerthe in Kettenbrüche zu verwandeln und deren Näherungsbrüche zu benutzen. Dies giebt folgende Construction (Taf. IV, Figur 11). Man stelle die Geraden $PO'Q$ und $O'Z$ senkrecht zu einander, construire das rechtwinklige Dreieck $O'PX'$ aus den Katheten

$$O'P = 43,\quad PX' = 3,9$$

sowie das rechtwinklige Dreieck $O'QY'$ aus

$$O'Q = 28,\quad QY' = 9,$$

so sind $O'X'$, $O'Y'$, $O'Z$ die gesuchten Achsenprojectionen, auf denen man $a'$, $b'$, $c'$ in den Verhältnissen 9 : 5 : 10 abschneidet. Den angegebenen Katheten zufolge ist nämlich

$$\angle PO'X' = 5^0\,10'\,56''\,7,\quad \angle QO'Y' = 17^0\,49'\,8'';$$

mithin beträgt der Fehler beim ersten Winkel 12, beim zweiten 15 Secunden, womit eine für graphische Arbeiten fast überschwängliche Genauigkeit erreicht ist.

Schlömilch.

**XXXII. Noch ein Beweis des Völler'schen Satzes.** (Vergl. Jahrg. IV, Heft 2, Kl. Mittheil. VI.) Zieht man in einer ebenen Curve eine Sehne und legt durch deren Endpunkte Tangenten an die Curve, so nähert sich das Verhältniss des von der Sehne gebildeten Flächenabschnitts zu dem von ihr und den Tangenten eingeschlossenen Dreiecksinhalt, mehr und mehr der Grenze $\frac{2}{3}$, wenn die Sehne unendlich abnimmt.

Bildet die Tangente $PP' = r$ mit den Tangenten in $P$ und $P'$ die Winkel $\vartheta$ und $\eta$, so wird zwischen $r$ und $\vartheta$ eine Beziehung bestehen, welche mit $\vartheta = 0$ auch $r = 0$, aber für den unter der unbestimmten Form $\frac{0}{0}$ auftretenden Quotienten $\frac{r^2}{\vartheta^2}$ einen Grenzwerth $\alpha$ liefern muss, welcher nach der Regel über Ermittlung solcher Werthe auch den in folgender Gleichung genannten zwei weiteren Quotienten zukommen muss:

$$\alpha = Lim \frac{3\int_0^\vartheta r^2 d\vartheta}{\vartheta^3} = Lim \frac{r^2}{\vartheta^2} = Lim \frac{r\,dr}{\vartheta\,d\vartheta}.$$

Nun ist das Integral nichts anderes als der doppelte Inhalt des Flächenabschnitts zwischen Sehne und Curve, derjenige des Dreiecks zwischen Sehne und Tangenten aber:

$$\frac{r^2}{cot\,\vartheta + cot\,\eta} = \frac{r^2}{cot\,\vartheta + \frac{dr}{r\,d\vartheta}},$$

also das Verhältniss des Abschnitts zum Dreiecke:

$$\frac{1}{r^2}\left(cot\,\vartheta + \frac{dr}{r\,d\vartheta}\right)\int_0^\vartheta r^2 d\vartheta = \frac{1}{3}\cdot\frac{\vartheta^2}{r^2}\left(\frac{\vartheta\cos\vartheta}{\sin\vartheta} + \frac{r\,dr}{\vartheta\,d\vartheta}\cdot\frac{\vartheta^2}{r^2}\right)\frac{3\int_0^\vartheta r^2 d\vartheta}{\vartheta^3}.$$

mit $\vartheta = 0$ geht dieses Verhältniss also über in:

$$\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{\alpha}\left(1 + \alpha\cdot\frac{1}{\alpha}\right) = \frac{2}{3}.$$

Stuttgart, Juni 1859. C. W. Baur.

---

**XXXIII. Auflösung einer geometrischen Aufgabe.** (Aufgestellt im Crelle'schen Journale Bd. 51, S. 100, 1856.)

Aufgabe. Es sei eine krumme Linie $C$ in einer Ebene $E$ gegeben und in dieser Ebene ein Punkt $P$ von bestimmter Lage gegen $C$. Durch den Punkt $P$ gehe im Raume eine andere krumme Linie $D$, von einfacher, oder auch doppelter Krümmung. In dieser Linie bewege sich der Punkt $P$ mit der Ebene $E$ und der Linie $C$ stetig fort, und zwar so, dass die Ebene

$E$ entweder stets parallel mit sich selbst bleibt, oder auch so, dass sie mit den Tangenten an $D$ stets denselben Winkel macht. Dann ist die Frage, von welcher Beschaffenheit die Fläche $F$ sei, die von $C$ im Raume beschrieben wird; Gleichungen Schnitte u. s. f. — Desgleichen ist die Frage, wie $C$ beschaffen sein muss, wenn $D$ und $F$, und wie $D$, wenn $C$ und $F$ gegeben sind.

Auflösung. Es sei

$$1)\quad \begin{cases} (C) \ldots F(\xi, \eta) = 0 \text{ die Gleichung der Curve } C, \\ (D) \ldots x_1 = \varphi(z_1),\ y_1 = \psi(z_1) \text{ die Gleichungen der Curve } D, \end{cases}$$

auf ein Coordinatensystem bezogen, dessen Anfang $O$ mit dem Punkte $P$ und dessen $XY$-Ebene mit der Ebene $E$ in einem gewissen Momente zusammenfallen; $\alpha$ der Neigungswinkel der Tangente an die Curve $D$ zur $XY$-Ebene, welche als fest betrachtet wird; $\beta$ der Winkel zwischen einer auf dieser Tangente in der $XY$-Ebene gelegten Senkrechten und der $X$-Achse. Man lasse die Ebene $E$ parallel mit sich fortbewegen und zwar so, dass $O'X' // OX$ und $O'Y' // OY$, indem der Punkt $O'$ oder $P$ auf der Curve $D$ hingleitet; man drehe die Achsen $O'X'$, $O'Y'$ (nicht die Ebene) um den Winkel $\beta$ und alsdann die Ebene $X'O'Y'$ um die Gerade $O'X'$ um den Winkel $\varepsilon - \alpha$; so folgt durch Anwendung der bekannten Transformationsformeln

$$2)\quad \begin{cases} x'' = [y - \psi(z_1)] \sin\beta + [x - \varphi(z_1)] \cos\beta, \\ y'' = \{[y - \psi(z_1)] \cos\beta - [x - \varphi(z_1)] \sin\beta\} \cos(\varepsilon - \alpha) + (z - z_1) \sin(\varepsilon - \alpha), \\ z'' = -\{[y - \psi(z_1)] \cos\beta - [x - \varphi(z_1)] \sin\beta\} \sin(\varepsilon - \alpha) + (z - z_1) \cos(\varepsilon - \alpha). \end{cases}$$

Es ist aber auch vermöge der Relation $(C)$

$$F(x'' \cos\beta - y'' \sin\beta,\ x'' \sin\beta + y'' \cos\beta) = 0,\quad z'' = 0.$$

Also erhält man zuletzt die beiden Gleichungen

$$3)\quad \begin{cases} F\begin{Bmatrix} [x - \varphi(z_1)][\cos^2\beta + \sin^2\beta \sec(\varepsilon - \alpha)] + [y - \psi(z_1)][1 - \sec(\varepsilon - \alpha)] \sin\beta \cos\beta \\ [x - \varphi(z_1)][1 - \sec(\varepsilon - \alpha)] sn\beta\, cs\beta + [y - \psi(z_1)][sn^2\beta + cs^2\beta \sec(\varepsilon - \alpha)] \end{Bmatrix} = 0, \\ [y - \psi(z_1)] \cos\beta - [x - \varphi(z_1)] \sin\beta = (z - z_1) \operatorname{cotang}(\varepsilon - \alpha) \end{cases}$$

woraus $z_1$ zu eliminiren ist, nachdem man zuvor die Werthe von $\alpha$, $\beta$, $\varepsilon$ in $z_1$ ausgedrückt

$$4)\quad \sin\alpha = \frac{1}{\sqrt{1 + [\varphi'(z_1)]^2 + [\psi'(z_1)]^2}},\quad \operatorname{tang}\beta = \frac{\varphi'(z_1)}{\psi'(z_1)},\quad \varepsilon = \chi(\alpha),$$

eingeführt hat. Diese Rechnungen sind jedoch im Allgemeinen unausführbar. Für $\varepsilon = \alpha$ oder $\varepsilon =$ einer Constante erhält man die beiden in der Aufgabe aufgestellten Fälle; im ersteren Falle ist $z = z_1$ und es folgt aus 3) für die Gleichung der gesuchten Fläche:

$$5)\quad F[x - \varphi(z),\ y - \psi(z)] = 0.$$

Ist $\varepsilon - \alpha = \frac{\pi}{2}$, so ergiebt sich

$$F[x - \varphi(z_1) - (z - z_1) \sin\beta,\ y - \psi(z_1) + (z - z_1) \cos\beta] = 0,$$
$$[x - \varphi(z_1)] \sin\beta = [y - \psi(z_1)] \cos\beta;$$

jedoch unterscheidet sich dieser Fall von dem früheren nur durch die Lage der Ebene $E$.

Ist endlich die Curve $D$ eben und gestatten es die Data der Aufgabe, die Ebene derselben senkrecht zur Ebene $E$ anzunehmen, so ist $\beta'$, mithin auch $\frac{\varphi'(z_1)}{\psi'(z_1)}$ constant, und man kann durch gehörige Wahl der Achsen bewirken, dass $\beta = 0$; alsdann ergiebt sich aus 3)

$$6)\qquad \begin{cases} F\{x - \varphi(z_1),\ [y - \psi(z_1)] \sec(\varepsilon - \alpha)\} = 0, \\ y - \psi(z_1) = (z - z_1) \operatorname{cotang}(\varepsilon - \alpha). \end{cases}$$

Sind die Gleichungen nicht explicite, sondern unter der Form:

$$\varphi(x_1, z_1) = 0,\quad \psi(y_1, z_1) = 0$$

gegeben, so gelangt man zu der Gleichung der Fläche durch Elimination von $x_1, y_1, z_1$ aus diesen und den Gleichungen 3), worin selbstverständlich $x_1, y_1$ für $\varphi(z_1), \psi(z_1)$ zu schreiben ist.

Ist $D$ und $F$

$$x_1 = \varphi(z_1) \text{ und } z_1 = \psi(z_1),\ F(x, y, z) = 0$$

gegeben und wird nach der Natur der Curve $C$ gefragt, so ist in $F, x, y, z$ respective durch

$$x' \cos\beta - y' \sin\beta \cos(\varepsilon - \alpha) + z' \sin\beta \sin(\varepsilon - \alpha),$$
$$x' \sin\beta + y' \cos\beta \cos(\varepsilon - \alpha) - z' \cos\beta \sin(\varepsilon - \alpha),\ y' \sin(\varepsilon - \alpha) + z' \cos(\varepsilon - \alpha)$$

zu ersetzen, vorausgesetzt, dass der Coordinatenanfang auf der Curve $D$ liegt, und dann $z' = 0$ zu setzen; demnach ergiebt sich als Gleichung der gesuchten Curve $C$

$$7)\qquad \begin{cases} F[x' \cos\beta_0 - y' \sin\beta_0 \cos(\varepsilon_0 - \alpha_0), \\ \quad x' \sin\beta_0 + y' \cos\beta_0 \cos(\varepsilon - \alpha_0), \\ \quad y' \sin(\varepsilon_0 - \alpha_0)] = 0 \end{cases}$$

Die Werthe von $\alpha_0, \beta_0, \varepsilon_0$ ergeben sich aus 4) durch Setzen von $z_1 = 0$.

Sind dagegen $C$ und $F$

$$\Theta(x', y') = 0,\quad F(x, y, z)$$

gegeben und nach der Curve $D$ gefragt, so ist die Aufgabe nicht immer möglich. Vertauscht man nämlich in $F, x, y, z$ respective mit

$$\xi + x' \cos\beta - y' \sin\beta \cos(\varepsilon - \alpha) + z' \sin\beta \sin(\varepsilon - \alpha),$$
$$\eta + x' \sin\beta + y' \cos\beta \cos(\varepsilon - \alpha) - z' \cos\beta \sin(\varepsilon - \alpha),$$
$$\zeta + y' \sin(\varepsilon - \alpha) + z' \cos(\varepsilon - \alpha),$$

worin

$$\varepsilon = \chi(\alpha),\quad \sin\alpha = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{d\xi^2}{d\zeta^2} + \frac{d\eta^2}{d\zeta^2}}},\quad \operatorname{tang}\beta = -\frac{d\xi}{d\zeta} : \frac{d\eta}{d\zeta},$$

und $\chi$ eine der Form nach bekannte Function ist, und setzt in der sich ergebenden Gleichung $z' = 0$, so bekommt man

$$\begin{aligned} F[\xi &+ x' \cos\beta - y' \sin\beta \cos(\varepsilon - \alpha), \\ \eta &+ x' \sin\beta + y' \cos\beta \cos(\varepsilon - \alpha), \\ \zeta &+ y' \sin(\varepsilon - \alpha)] = 0, \end{aligned}$$

welche Gleichung mit $\Theta(x', y') = 0$, unabhängig von den speciellen Werthen von $x', y'$, identisch sein muss; die diese Identität bedingenden Rela-

tionen zwischen $\xi, \eta, \zeta$ bestimmen die gesuchte Curve. Da zur Bestimmung von $D$, wegen den durch die Integration einzuführenden Constanten, höchstens vier Bedingungsgleichungen nothwendig sind, die Anzahl derselben aber im allgemeinen grösser ausfallen wird, so erkennt man, dass die Aufgabe nicht immer möglich ist.

Ist $C$ oder $D$ eine Gerade und bewegt sich die Ebene $E$ parallel mit sich selbst, so entsteht eine Cylinderfläche, wie auch $D$ oder $C$ beschaffen sein mag.

$C$ sei eine Ellipse $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, deren Mittelpunkt auf der Ellipse $x=0$, $\frac{z^2}{C^2}+\frac{(y-B)^2}{B^2}=1$ gleitet; $z=\alpha$. Man findet für die Gleichung der erzeugten Fläche

$$y=B-B\sqrt{1-\frac{z^2}{C^2}}\pm b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}},$$

wenn man blos die eine Hälfte der zweiten Ellipse betrachtet. Die ebenen Schnitte parallel zur $XY$- oder zur $ZY$-Ebene sind zu den gegebenen congruente Ellipsen; die Schnitte parallel zur $XZ$-Ebene sind Curven vom vierten Grade; der Schnitt in der Entfernung $B$ ist eine Hyperbel, deren Achsen wie $\frac{a}{b}:\frac{C}{B}$ sich verhalten. Das zwischen der so erzeugten Fläche und den äussersten Grenzelementen enthaltene Volumen ist $=2\pi a b C$.

Leipzig. E. Bacaloglo.

---

**XXXIV. Ueber die Gleichung der Berührungsebene an einer Fläche.** Der einfachste und — insofern er zugleich die Existenz der Berührungsebene nachweist — logisch richtigste Weg zur Entwickelung der genannten Gleichung dürfte folgender sein, den ich in keinem Lehrbuche finde.

Wenn eine Fläche durch die Gleichung

$$1)\qquad z=f(x,y) \text{ oder } F(x,y,z)=0$$

gegeben ist, so hat man als Gleichung einer durch den Punkt $xyz$ an die Fläche gelegten Tangente

$$2)\qquad \frac{dx}{\xi-x}=\frac{dy}{\eta-y}=\frac{dz}{\zeta-z};$$

dabei sind $\xi, \eta, \zeta$ die laufenden Coordinaten der Tangente und es wird letztere als Verbindungslinie der Punkte $xyz$ und $x+dx$, $y+dy$, $z+dx$ angesehen. Zwischen $dx, dy, dz$ besteht aber zufolge Nr. 1) die Beziehung

$$3)\qquad dz=\frac{\partial f}{\partial x}dx+\frac{\partial f}{\partial y}dy$$

oder

$$4)\qquad \frac{\partial F}{\partial x}dx+\frac{\partial F}{\partial y}dy+\frac{\partial F}{\partial z}dz=0;$$

ersetzt man in 3) oder 4) $dx$, $dy$, $dz$ durch die ihnen proportionalen Coordinatendifferenzen aus Nr. 2), so erhält man

$$5)\qquad \zeta - z = \frac{\partial f}{\partial x}(\xi - x) + \frac{\partial f}{\partial y}(\eta - y)$$

oder

$$6)\qquad \frac{\partial F}{\partial x}(\xi - x) + \frac{\partial F}{\partial y}(\eta - y) + \frac{\partial F}{\partial z}(\zeta - z) = 0.$$

Jede dieser Gleichungen zeigt, dass alle durch den Punkt $xyz$ gehenden Tangenten in einer Ebene, der sogenannten Berührungsebene liegen; die obigen Gleichungen sind die Gleichungen dieser Ebene.

(Briefliche Bemerkung von Prof. Baur in Stuttgart.)

---

**XXXV. Eine neue Bestimmung des Verhältnisses der specifischen Wärme der Luft bei constantem Drucke zur specifischen Wärme bei gleichem Volumen, sowie des mechanischen Aequivalentes der Wärme.** Von Bergrath Professor Julius Weisbach. (Aus der Zeitschrift „Civil-Ingenieur", Neue Folge, V. Band, 2. Heft.) Bei meinen Versuchen über den Ausfluss der Luft, wovon im ersten Hefte dieses Bandes die Hauptergebnisse mitgetheilt worden sind, habe ich auch einige Versuche über das in neuerer Zeit durch Regnault in Zweifel gezogene Verhältniss der specifischen Wärme der Luft bei constantem Drucke zur specifischen Wärme bei constantem Volumen angestellt. Die Ausführungsweise dieser Versuche war insofern eine andere als die bekannte von Clement und Désormes, als ich hierbei comprimirte Luft aus einem Reservoir in die freie Luft ausströmen liess, während umgekehrt Clement und Désormes atmosphärische Luft in einen mit verdünnter Luft angefüllten Raum einströmen liessen. Bei beiden Methoden ist es natürlich nöthig, den Manometerstand der eingeschlossenen Luft 1) vor der Eröffnung, 2) unmittelbar nach der Eröffnung und 3) nachdem derselbe constant und folglich auch die Temperatur der eingeschlossenen Luft der der äusseren gleich geworden ist, zu beobachten; bei der von mir angewendeten Methode ist aber der Manometerstand ein positiver, wogegen er bei dem älteren Verfahren negativ ausfällt. Da ferner während des Ausströmens der Luft im Reservoir eine Verdünnung und damit verbundene Abkühlung, und dagegen während des Einströmens derselben eine Verdichtung und damit verbundene Erwärmung der Luft im Reservoir statt hat, so wird natürlich nach dem Abschluss der Mündung bei dem ersten Verfahren eine Erwärmung von Aussen und Steigen des Manometerstandes, und dagegen bei dem letzten Verfahren eine Abkühlung von Aussen und ein damit verbundenes Sinken des Manometerstandes eintreten.

Zu meinen Versuchen diente derselbe Dampfkessel von $4\frac{3}{8}$ Cubikmeter Inhalt, welchen ich bei den Versuchen über die Ausströmungsge-

schwindigkeit der Luft angewendet hatte. Auch wurde hierbei die Luft auf dieselbe Weise wie dort in den Kessel eingepresst, und es diente hierbei auch dasselbe Quecksilbermanometer zum Ablesen der Druckhöhen oder Manometerstände. Ebenso wurde an einem nebenhängenden Barometer der Barometerstand $b$ der äusseren Luft abgelesen.

Zum Ausströmen der Luft diente eine cylindrische Röhre von 4 Cubikmeter Weite, welche mittelst eines in ihr sitzenden Hahnes beliebig eröffnet und verschlossen werden konnte.

Der Versuch wurde auf folgende Weise ausgeführt. Nachdem die Luft im Kessel durch die Compressionspumpe ungefähr bis auf die doppelte Dichtigkeit zusammengedrückt worden war und sich so weit abgekühlt hatte, dass am Manometer ein bestimmter Stand abzulesen war, eröffnete ich den Hahn nur einige Secunden lang, so dass durch die gedachte Röhre ein Theil der Luft aus dem Reservoir ausströmen konnte. Nun wurde nicht allein der Manometerstand $h_1$ unmittelbar nach Beendigung des Ausströmens, sondern auch der Manometerstand $h_2$ beobachtet, nachdem die durch das Ausströmen abgekühlte Luft wieder die Temperatur der äusseren Luft angenommen und folglich das Zunehmen dieses Manometerstandes aufgehört hatte.

Ist $\delta$ der bekannte Ausdehnungscoefficient 0,00367 der Luft, $t$ die Temperatur und $p$ die Pressung der eingeschlossenen Luft vor und nach dem Versuche, sowie $t_1$ die Temperatur und $p_1$ die Pressung derselben unmittelbar nach erfolgtem Ausströmen, und bezeichnet $\varkappa$ das gesuchte Verhältniss $\frac{\omega}{\omega_1}$ der specifischen Wärme der Luft bei constantem Drucke $\omega$ zu der bei constantem Volumen $\omega_1$, so hat man (siehe Bd. I, §. 430, meiner Ingenieur- und Maschinenmechanik):

$$\frac{1+\delta t_1}{1+\delta t} = \left(\frac{p_1}{p}\right)^{\frac{\varkappa-1}{\varkappa}} = \left(\frac{b+h_1}{b+h}\right)^{\frac{\varkappa-1}{\varkappa}}.$$

Da sich nun während der Erwärmung der eingeschlossenen Luft unmittelbar nach dem Ausströmen das Volumen und folglich auch die Dichtigkeit derselben nicht ändert, so hat man auch

$$\frac{b+h_1}{1+\delta t_1} = \frac{b+h_2}{1+\delta t},$$

oder

$$\frac{1+\delta t_1}{1+\delta t} = \frac{b+h_1}{b+h_2};$$

es ergiebt sich daher durch Elimination von $\frac{1+\delta t_1}{1+\delta t}$,

$$\left(\frac{b+h_1}{b+h}\right)^{\frac{\varkappa-1}{\varkappa}} = \frac{b+h_1}{b+h_2},$$

oder

$$\frac{\varkappa - 1}{\varkappa} Log\left(\frac{b + h_1}{b + h}\right) = Log\left(\frac{b + h_1}{b + h_2}\right),$$

und folglich das gesuchte Wärmeverhältniss

$$\varkappa = \frac{\omega}{\omega_1} = \frac{Log\,(b + h) - Log\,(b + h_1)}{Log\,(b + h) - Log\,(b + h_2)}.$$

Bei kleinen Werthen der Differenzen $h - h_1$ und $h - h_2$ kann man

$$Log\left(\frac{b + h}{b + h_1}\right) = Log\left(1 + \frac{h - h_1}{b + h_1}\right) = \frac{h - h_1}{b + h}$$

und

$$Log\left(\frac{b + h}{b + h_2}\right) = Log\left(1 + \frac{h - h_2}{b + h}\right) = \frac{h - h_2}{b + h}$$

setzen, so dass nun annähernd das gesuchte Verhältniss

$$\varkappa = \frac{\omega}{\omega_1} = \frac{h - h_1}{h - h_2}$$

folgt.

Bei dem ersten meiner Versuche war der Barometerstand

$$b = 0{,}7342 \text{ Meter},$$

der Manometerstand vor der Eröffnung der Ausflussmündung

$$h = 0{,}7180,$$

ferner der Manometerstand unmittelbar nach Beendigung des Ausströmens, also im Momente der grössten Abkühlung

$$h_1 = 0{,}5890,$$

und der Manometerstand nach der erfolgten Ausgleichung der inneren Wärme mit der äusseren

$$h_2 = 0{,}6250 \text{ Meter}.$$

Hiernach ist nun

$$b + h = 0{,}7342 + 0{,}7180 = 1{,}4522,$$
$$b + h_1 = 0{,}7342 + 0{,}5800 = 1{,}3232,$$
$$b + h_2 = 0{,}7342 + 0{,}6250 = 1{,}3582,$$

wonach

$$Log\,(b + h) = 0{,}16203,$$
$$Log\,(b + h_1) = 0{,}12163,$$
$$Log\,(b + h_2) = 0{,}13328$$

folgt, und sich daher das Verhältniss der specifischen Wärme bei gleichem Drucke zu der bei gleichem Volumen:

$$\varkappa = \frac{0{,}16203 - 0{,}12163}{0{,}16203 - 0{,}13328} = \frac{4040}{2875} = 1{,}405$$

ergiebt.

Bei einem zweiten Versuche war

$$h = 0{,}6250 \text{ Meter},$$
$$h_1 = 0{,}4940 \quad \text{,,}$$
$$h_2 = 0{,}5300 \text{ Meter},$$

folglich

$$Log\,(b+h) = Log\,1{,}3572 = 0{,}13328,$$
$$Log\,(b+h_1) = Log\,1{,}2282 = 0{,}08927,$$
$$Log\,(b+h_2) = Log\,1{,}2642 = 0{,}10182,$$

so dass hiernach

$$\varkappa = \frac{13328 - 8927}{13327 - 10182} = \frac{4401}{3145} = 1{,}400$$

folgt.

Das Mittel aus beiden Werthen ist

$$\varkappa = 1{,}4025.$$

Da während der allerdings nur sehr kurzen Zeit des Ausflusses Wärme von Aussen in den Kessel dringt, so ist jedenfalls hierbei die Abkühlung der im Kessel zurückbleibenden Luft nicht so gross, als die Berechnung voraussetzt, und es giebt folglich die letztere noch immer einen etwas zu kleinen Werth.

Clement und Désormes fanden

$$\varkappa = 1{,}348,$$

nach Gay-Lussac ist

$$\varkappa = 1{,}375.$$

Rankine nimmt nach Thomson

$$\varkappa = 1{,}408$$

an, und Masson findet

$$\varkappa = 1{,}419.$$

Aus der bekannten Formel für die Schallgeschwindigkeit berechnet sich endlich

$$\varkappa = 1{,}4122.$$

Aus dem als bekannt anzusehenden Verhältnisse $\varkappa = \frac{\omega}{\omega_1}$ kann man auch mittelst der in Bd. I, §. 430 meiner Ingenieur- und Maschinenmechanik entwickelten Formel

$$L = \frac{\varkappa}{\varkappa - 1}\left[1 - \left(\frac{p_1}{p}\right)^{\frac{\varkappa-1}{\varkappa}}\right] Vp$$

für die mechanische Arbeit der Luft bei der Expansion das mechanische Aequivalent der Wärme berechnen.

Es ist in dieser Formel $V$ das gegebene Luftvolumen, $p$ die Pressung desselben vor und $p_1$ die Pressung desselben nach der Expansion. Bezeichnet noch $t$ die Temperatur vor und $t_1$ die Temperatur nach der Expansion, so hat man nach der zu Anfang angegebenen Formel

$$\left(\frac{p_1}{p}\right)^{\frac{\varkappa-1}{\varkappa}} = \frac{1+\delta t_1}{1+\delta t},$$

und daher auch

$$L = \frac{\varkappa}{\varkappa-1}\left(1 - \frac{1+\delta t_1}{1+\delta t}\right) Vp$$
$$= \frac{\varkappa}{\varkappa-1} \cdot \frac{\delta\,(t-t_1)\,Vp}{1+\delta t}.$$

Nun ist aber die Dichtigkeit oder das Gewicht eines Cubikfusses der atmosphärischen Luft:

$$\gamma = \frac{1,2575 p}{1 + \delta t},$$

wenn $p$ den Druck auf das Quadratcentimeter bezeichnet (siehe Bd. I, §. 361 meiner Ingenieur- und Maschinenmechanik), daher hat man hier, wo man für $p$ den Druck pro Quadratmeter einführen muss:

$$L = \frac{\varkappa}{\varkappa - 1} \delta (t - t_1) \frac{10000}{1,2575} . V\gamma.$$

Setzt man noch dem bekannten Ausdehnungscoefficienten $\delta = 0,00367$ und das Wärmeverhältniss $\varkappa = 1,41$ ein, so ergiebt sich die mechanische Arbeit, welche das Luftquantum $V\gamma$ verrichtet, wenn es aus der Temperatur $t$ in $t_1$ übergeht oder wenn es sich um $(t - t_1)$ Grad abkühlt,

$$L = 100,24 (t - t_1) V\gamma.$$

Da die specifische Wärme der Luft $\omega = 0,2377$ ist, so hat man den dem Temperaturverluste $t - t_1$ entsprechenden Verlust an Wärmemenge:

$$W = \omega (t - t_1) V\gamma = 0,2377 (t - t_1) V\gamma,$$

und daher

$$L = \frac{100,24}{0,2377} W = 421,7 W.$$

Die Zahl $A = 421,7$ ist nun das sogenannte mechanische Wärmeäquivalent, und drückt die mechanische Arbeit in Kilogrammmetern aus, welche einer Wärmeeinheit (*calorie*), d. i. derjenigen Wärmemenge entspricht, wodurch 1 Kilogramm Wasser um 1 Grad wärmer gemacht wird.

Joule fand für Wasser, Quecksilber und Eisen:

$$A = 425 \text{ bis } 426 \text{ Kilogrammmeter.}$$

Mehreres hierüber in der dritten Auflage des zweiten Bandes meiner Ingenieur- und Maschinenmechanik §§. 348, 349 u. s. w.

---

**XXXVI. Ueber magnetische Momente.** Wirken zwei geschlossene elektrische Stromcurven aus Entfernungen auf einander, so ist ihre Wirkung eine doppelte, Anziehung, Abstossung und ferner Drehung des losen Stromes um irgend eine Achse. Für die erstere Wirkung habe ich schon früher möglichst einfache Formeln entwickelt. Ich will jetzt dasselbe thun in Bezug auf Drehungen, d. h. die Momente berechnen, mit denen ein Strom einen andern um drei den Coordinatenachsen parallele Achsen zu drehen strebt. Es soll nur der Fall betrachtet werden, dass die Ströme sehr klein gegen ihre Entfernung sind und die Drehungsachsen durch Punkte $x, y, z$ und $x_1, y_1, z_1$ im Innern von wirksamen und afficirten Strome gelegt sind, von denen aus die Coordinaten der Peripheriepunkte zu $\xi, \eta, \zeta, \xi_1, \eta_1, \zeta_1$ gemessen werden. Führt man die Entfernung ein:

$$1) \qquad r^2 = (x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 + (z - z_1)^2,$$

und die je zweier Peripheriepunkte zu $r'$, so ist dann der zu benutzende Ausdruck für die $x$-Componente der Wirkung je zweier Elemente (s. Heft IV, p. 298):

$$a)\quad \tfrac{1}{2} i i_1 \, ds\, ds_1 \frac{\partial}{\partial x_1}\left\{\frac{1}{r}\frac{\partial r'}{\partial s}\frac{\partial r'}{\partial s_1} - 2\,\frac{1}{r}\,\frac{\partial\left(r'\frac{\partial r'}{\partial s_1}\right)}{\partial s}\right\} + \tfrac{1}{2} i i_1\, ds\, ds_1 \left(\frac{\partial \xi_1}{\partial s}\frac{\partial \frac{1}{r'}}{\partial s} - \frac{\partial \xi}{\partial s}\frac{\partial\frac{1}{r'}}{\partial s_1}\right).$$

Berechnet man das Moment $M_z$ um die $z$-Achse, so ist mit $\eta_1$ zu multipliciren und dann die Doppelintegration nach $s$ und $s_1$ auszuführen. Dann muss ein ähnlich gebildeter Ausdruck für $y$, die $y$-Componente multiplicirt mit $\xi_1$, abgezogen werden.

Man erhält aus obiger Formel sehr bald, indem man

$$\frac{1}{r}\frac{\partial r'}{\partial s}\frac{\partial r'}{\partial s_1} = \frac{1}{r}\,\frac{\partial\left(r'\frac{\partial r'}{\partial s_1}\right)}{\partial s} - \frac{\partial^2 r'}{\partial s\,\partial s_1}$$

setzt und die durch Integration offenbar wegfallenden Glieder weglässt:

$$\tfrac{1}{2} i i_1\, ds\, ds_1 \left\{\frac{\partial}{\partial x_1}\left[\eta_1\,\frac{\frac{\partial \xi}{\partial s}\frac{\partial \xi_1}{\partial s_1} + \frac{\partial \eta}{\partial s}\frac{\partial \eta_1}{\partial s_1} + \frac{\partial \zeta}{\partial s}\frac{\partial \zeta_1}{\partial s_1}}{r'}\right] + \frac{1}{r'}\frac{\partial \xi}{\partial s}\frac{\partial \eta_1}{\partial s_1}\right\}.$$

Für $r'$ benutzt man den schon in der früheren Abhandlung benutzten Werth, aus $r$ hergeleitet, wobei im ersten Gliede nur die ersten Differentialquotienten von $\frac{1}{r'}$, im zweiten nur die zweiten hereinkommen und sich so die Homogenität beider herstellt. Ist nun wieder:

$$2)\quad \begin{cases} \alpha = \int_0^s \eta\, d\zeta, \quad \beta = \int_0^s \zeta\, d\xi, \quad \gamma = \int_0^s \xi\, d\eta, \\ \alpha_1 = \int_0^{s_1} \eta_1\, d\zeta_1, \quad \beta_1 = \int_0^{s_1} \zeta_1\, d\xi_1, \quad \gamma_1 = \int_0^{s_1} \xi_1\, d\eta_1, \\ q = + \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x_1}\alpha + \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y_1}\beta + \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z_1}, \end{cases}$$

so entsteht nach einigen Reductionen:

$$3)\quad \begin{cases} Mz = \left(\alpha_1 \frac{\partial q}{\partial y_1} - \beta_1 \frac{\partial q}{\partial x_1}\right) \tfrac{1}{2} i i_1, \\ \text{Ebenso} \\ My = \left(\gamma_1 \frac{\partial q}{\partial x_1} - \alpha_1 \frac{\partial q}{\partial z_1}\right) \tfrac{1}{2} i i_1, \\ Mx = \left(\beta_1 \frac{\partial q}{\partial z_1} - \gamma_1 \frac{\partial q}{\partial y_1}\right) \tfrac{1}{2} i i_1. \end{cases}$$

Diese Gleichungen stehen in einem interessanten Zusammenhange mit den Werthen $X$, $Y$, $Z$ für die Kraftcomponenten. Man sieht sehr leicht ein, dass diese Grössen durch folgende Gleichungen gegeben sind:

$$4)\quad \begin{cases} X = \dfrac{\partial M_y}{\partial z_1} - \dfrac{\partial M_z}{\partial y_1}, \\ Y = \dfrac{\partial M_z}{\partial x_1} - \dfrac{\partial M_x}{\partial z_1}, \\ Z = \dfrac{\partial M_x}{\partial y_1} - \dfrac{\partial M_y}{\partial x_1}. \end{cases}$$

Es ist zu bemerken, dass die Gleichungen 2), 3), 4), sowie die früher gegebenen Werthe von $X$, $Y$, $Z$ ebensowohl für Ströme gelten, die doppelt gekrümmt sind, wie für solche, die in einer Ebene liegen. Es ist nur dann nöthig, die Bedeutung der Werthe $\alpha_1$, $\beta_1$, $\gamma_1$, $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ etwas näher zu betrachten.

Ist der Strom ein ebener, so sind diese Grössen die Producte der Fläche in den Cosinus der Winkel mit den drei Coordinatenebenen $yz$, $xz$, $xy$, oder der Winkel der Normale mit den Achsen $x$, $y$, $z$. Die Richtung der Normale soll so gewählt werden, dass von derselben aus gesehen die Strombewegung von links nach rechts geht. Ein negatives $i\alpha$, $i\beta$, $i\gamma$ lässt sich dann auf doppelte Weise erklären: durch entgegengesetzte Richtung der Normale oder negative Intensität, d. h. entgegengesetzte Stromrichtung. Beides kommt auf dasselbe hinaus.

$i$ selbst ist, da der Strom unendlich schmal in der Richtung der Normale ist, unendlich klein von der ersten Ordnung. Man kann aber die Intensität auf die Einheit der Ausdehnung in der Normale beziehen, so ist anstatt $i$ einzuführen $idn$.

$\alpha dn$, $\beta dn$, $\gamma dn$ sind dann proportional den Voluminas, die der Strom umströmt; es soll daher die Bezeichnung insoweit geändert werden, dass diese Volumina als $v$ und $v_1$ bezeichnet werden, während $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ die Cosinus der Winkel mit den Achsen bedeuten. Dann wird:

$$5)\quad \begin{cases} q = +\left(\dfrac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x_1} i\alpha + \dfrac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y_1} i\beta + \dfrac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z_1} i\gamma\right) v \\ Mz = \frac{1}{2} v_1 \left(i_1 \alpha_1 \dfrac{\partial q}{\partial y_1} - i_1 \beta_1 \dfrac{\partial q}{\partial x_1}\right), \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \end{cases}$$

während $V$ deren Differentialquotienten nach $x_1$, $y_1$, $z_1$ die Werthe von $X$, $Y$, $Z$ vorstellen wird:

$$6)\quad V = \frac{1}{2} v_1 \left(i_1 \alpha_1 \frac{\partial q}{\partial x_1} + i_1 \beta_1 \frac{\partial q}{\partial y} + i_1 \gamma_1 \frac{\partial q}{\partial z_1}\right).$$

Die Gleichungen 4) bleiben dieselben. Das Moment in Bezug auf die Normale ist Null, woher es auch kommt, dass aus den Momentengleichungen nur zwei Gleichgewichtsbedingungen folgen.

Doppelt gekrümmte Stromcurven zerlegt man in lauter geschlossene ebene Elemente. In allen ist die Normale nach der früher fixirten Weise

zu rechnen. Projicirt man daher den ganzen Strom auf eine Ebene, und es fallen zwei Theile auf einander, so ist die Wirkung derselben oder vielmehr die Projection dieser Theile gleich Null anzusehen oder als das Doppelte, je nach der Stromrichtung in den Projectionen. Die Werthe $v\alpha$, $v\beta$, $v\gamma$ erhält man dann wie folgt:

Man denke sich den bandförmigen Strom auf einen linearen reducirt, projicire diesen auf die Coordinatenebenen und trage über die Flächen die Länge $dn$ auf gleich der Breite des Stromes. Rechnet man dann die Flächen der Projectionen, sowie es angegeben ist, so sind die über ihnen stehenden Volumina die Werthe $v\alpha$, $v\beta$, $v\gamma$.

Diese Bezeichnung hat dann wenig Klarheit, doch soll sie beibehalten werden, weil es am bequemsten ist, sich ebene Ströme zu denken, welche die räumlichen in ihrer Wirkung ersetzen.

Aus der Entwickelung der Formeln 2), 3), 4) geht hervor, dass dieselben nicht genau sind in Bezug auf Grössen, die von derselben Ordnung sind, wie die Stromdimensionen, im Verhältnisse zu den übrigen Gliedern.

Es liegt nun nahe, die Gleichungen 4) durch allgemeine Betrachtungen zu begründen, die sich darauf stützen, dass die Momente sich ändern, wenn man vom Punkte $x_1$, $y_1$, $z_1$ zu einem sehr nahen $x_1 + a$, $y_1 + b$, $y_1 + c$ übergeht. Die Aenderungen könnten einmal durch $X$, $Y$, $Z$, dann durch die Differentiale von $M_x$, $M_y$, $M_z$ ausgedrückt werden. Nach der eben gemachten Bemerkung ist dies nicht möglich.

Ist der wirkende Strom nicht klein in Bezug auf $r$, so kann man ihn immer so zerlegen nach dem schon von Ampère angewandten Satze, dass die Wirkung eines grossen Stromes vollkommen ersetzt wird durch solche, die ihn vollkommen erfüllen und nach derselben Richtung umlaufen, indem sich die inneren Ströme gegenseitig vernichten (s. Fig. 12, Taf. IV). Die Summation dieser Wirkungen ist eine Integration, wobei auch die äusseren Ströme als rechteckig angesehen werden dürfen. Die Grenzen sind unabhängig von $x_1$, $y_1$, $z_1$. Alle früheren Gleichungen werden daher noch gelten, nur wird für $q$ die durch die Integration zu berechnende Summe einzuführen sein.

Die Wirkung zweier endlicher Ströme aus endlicher Entfernung kann ähnlich berechnet werden und zwar, wie man leicht einsieht, lässt sich dies auch auf die Momente ausdehnen. Ich halte es nicht für nöthig, erst dafür allgemeine Formeln zu entwickeln. — In einer späteren Abhandlung gedenke ich diese Gleichungen für eine Theorie des Magnetismus nach der Ampère'schen Hypothese zu benutzen.

Durch Vergleichung mit den Formeln, die Poisson (*Annales de l'Acad. franç. Année* 1821; *Tome V*) für die Wirkung eines mit magnetischem Fluidum überzogenen Molecüls giebt, bestätigt sich das schon von Ampère entwickelte Gesetz, dass die Anziehung einer geschlossenen Stromcurve genau dieselbe ist, wie die einer geschlossenen magnetischen Fläche.

Die Gleichungen 4) beruhen darauf, dass

$$\frac{\partial^2 q}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2 q}{\partial y_1^2}+\frac{\partial^2 q}{\partial z_1^2}=0.$$

Dies ist nicht unbedingt nöthig, sondern es kann in gewissen Fällen, wie man weiss, dieser Werth eine Grösse $k$ erreichen und dann ist:

$$7)\quad \begin{cases} X=\dfrac{\partial M_y}{\partial z_1}-\dfrac{\partial M_z}{\partial y_1}+i_1\alpha_1 k, \\ Y=\dfrac{\partial M_z}{\partial x_1}-\dfrac{\partial M_x}{\partial z_1}+i_1\beta_1 k, \\ Z=\dfrac{\partial M_x}{\partial y_1}-\dfrac{\partial M_y}{\partial x_1}+i_1\gamma_1 k. \end{cases}$$

Ich erlaube mir schliesslich noch auf einen Vorzug der Formel $a$) aufmerksam zu machen, den dieselbe vor einfacheren Formen der Ampère-schen Formel voraus hat; es ist dies der, dass man an ihr ganz besonders deutlich sieht, welche Glieder bei der Integration wegfallen und dass sie daher wohl am bequemsten eine Vergleichung zulässt der Wirkung von Stromelementen und magnetischen Fluidum. Wegen dieses Wegfallens einzelner Glieder darf auch die Bestätigung der Formel Ampère's durch die Versuche von Weber keine ganz vollständige genannt werden, da eine Unrichtigkeit der Formel in diesen Gliedern auf die Wirkung geschlossener Ströme, mit denen Weber nur experimentirte, gar nicht influiren würde.

Dresden. GUSTAV ROCH.

---

**XXXVII. Ueber das Aequivalent von Nickel und Kobalt.** Die Bestimmung chemischer Aequivalente gehört zu den Arbeiten, welche die grösste Umsicht erfordern, indem sowohl die Herstellung völlig reiner Präparate fast immer mit ziemlichen Schwierigkeiten verknüpft ist, als auch die Analyse derselben behufs der Aequivalentbestimmung mit ganz besonderer Sorgfalt geschehen muss. Abgesehen von der Befreiung von fremdartigen Metallen ist es z. B. äusserst schwierig, Metallchloride herzustellen, welche gänzlich frei von Oxyd sind, und somit darf man nur mit grosser Vorsicht den früher oft versuchten Weg betreten, aus einer gewogenen Menge wasserfreien Chlorides das Chlor durch Silberlösung auszufällen und zu bestimmen, um aus der Differenz zwischen Metallchlorid und Chlor die Menge des Metalls zu finden und hieraus dessen Aequivalent zu berechnen. Andererseits gelingt es oft nicht, durch Glühen in einem Gasstrome das Metall, resp. Oxyd, aus einem Salze von völlig constanter Zusammensetzung, z. B. einem Oxalate, völlig rein zu erhalten. Dergleichen Schwierigkeiten zu beseitigen und möglichst genaue Methoden zur Aequivalentbestimmung zu ermitteln, gehört nun um so mehr zu den verdienstlichsten Arbeiten, als man von vielen Seiten bemüht gewesen ist, Gesetzmässigkeiten unter den Aequivalentenzahlen selbst oder einfache Bezieh-

ungen derselben zu anderen Constanten der Elemente aufzufinden. Unter die gelungensten Versuche dieser Art gehören unstreitig die von R. Schneider zur Bestimmung des Aequivalents von Kobalt und Nickel angestellten, von denen ein Theil bereits in *Pogg. Annal.* Bd. 101, S. 387 veröffentlicht wurde, während eine zweite Versuchsreihe erst vor Kurzem (*Pogg. Ann.* Bd. 107, S. 616) zur Ausführung und Mittheilung kam. Beiden Aufsätzen entnehmen wir Folgendes.

Die ersten Versuche, die Aequivalente von Kobalt und Nickel zu bestimmen, sind von Rothoff angestellt und von Berzelius im Jahre 1818 (Schweigg. Journ. Bd. 22 S. 329) mitgetheilt worden. Gewogene Mengen Kobalt- oder Nickeloxydul wurden durch Uebergiessen mit Salzsäure und Abdampfen in wasserfreie Chloride verwandelt und hierauf der Chlorgehalt desselben durch salpetersaures Silberoxyd bestimmt. Rothoff hatte für Kobalt und Nickel je eine Bestimmung gemacht, aus denen Berzelius folgende Aequivalentenzahlen ableitete:

$$\begin{array}{ll} O = 100, & H = 1, \\ Ni\ 369{,}333, & 29{,}55, \\ Co\ 368{,}65, & 29{,}49. \end{array}$$

Berzelius und in seinem Gefolge Andere glaubten, dass die geringe Abweichung beider Aequivalente nur Beobachtungsfehler sei und dass demnach beide Aequivalente einander gleich seien. Theils Misstrauen in die Reinheit der von Rothoff verwendeten Nickel- und Kobaltpräparate, theils Kenntnissnahme von der Schwierigkeit, oxydfreie Chloride darzustellen, bewogen R. Schneider, die Aequivalentbestimmung auf folgendem Wege zu wiederholen.

Da die neutralen Oxalate von Nickel und Kobalt leicht rein zu erhalten sind, wurden diese aus völlig reinen Präparaten dargestellten Salze zur Analyse verwendet. Die längere Zeit im Wasserbade verbliebenen Salze, welche demohngeachtet noch chemisch gebundenes Wasser enthielten, wurden zur Bestimmung ihres Kohlenstoffgehaltes nach Art der organischen Elementaranalyse in einem langen Rohre, mit Kupferoxyd gemengt, verbrannt. Die Metallbestimmung geschah in einem Kugelrohr, in welchem das Oxalat zuerst in einem Strome trockener Luft, dann in einem Strome trockenen Sauerstoffs, dann in einem Strome von Wasserstoff stark geglüht wurde. Hierdurch wurde einerseits die vollständige Entfernung des Kohlenstoffes, andererseits die völlige Reduction, resp. Zusammensinterung der Metalle erzielt, so dass man schliesslich, ohne Oxydation fürchten zu müssen, wieder atmosphärische Luft in die erkalteten Röhren eindringen lassen durfte. Bei diesen Versuchen sind die grössten Vorsichtsmassregeln angewendet, unter andern auch beim Wägen von Röhrenapparaten als Tara wieder Röhrenapparate — zur Compensation der hygroscopischen Fehler — verwendet worden. Durch diese Versuche wurde zunächst das Verhältniss zwischen dem Aequivalente des Nickels und Kobalts zu dem des Koh-

lenstoffes, dessen Aequivalent völlig genau bestimmt ist, festgesetzt und hieraus die Zahlen berechnet, die in folgenden Tabellen für *Co* und *Ni* angeführt sind.

| Nr. des Versuchs. | Angewandte Mengen. | Nickelgehalt in Proc. | Kohlenstoffgehalt in Proc. | Aequivalent von *Ni* |
|---|---|---|---|---|
| I. | 1,1945 Gramm | — | 12,055 | 28,974 |
| | 3,208 „ | 29,107 | — | |
| II. | 2,5555 „ | — | 12,022 | 29,028 |
| | 5,187 „ | 29,082 | — | |
| III. | 3,199 „ | — | 12,004 | 29,056 |
| | 7,4465 „ | 29,066 | — | |
| IV. | 5,020 „ | — | 12,016 | 29,043 |
| | 9,977 „ | 29,082 | — | |
| | | | Mittel | 29,025 |

| Nr. des Versuchs. | Angewandte Menge. | Kobaltgehalt in Proc. | Kohlenstoffgehalt in Proc. | Aequivalent von *Co* |
|---|---|---|---|---|
| I. | 1,6355 Gramm | — | 13,024 | 29,993 |
| | 2,3045 „ | 32,552 | — | |
| II. | 1,107 „ | — | 13,041 | 30,015 |
| | 1,901 „ | 32,619 | — | |
| III. | 2,309 „ | — | 13,005 | 30,014 |
| | 4,058 „ | 32,528 | — | |
| IV. | 3,007 „ | — | 13,014 | 29,980 |
| | 5,350 „ | 32,523 | — | |
| | | | Mittel | 30,003 |

Da R. Schneider die Beobachtungsfehler für grösser hielt, als den aërostatischen Auftrieb, so wurden die Wägungen nicht auf den luftleeren Raum reducirt, auch wurde die Methode der kleinsten Quadrate bei Ausrechnung der Resultate nicht angewendet.

Obwohl nach der Darstellung der Oxalate deren Neutralität Gegenstand mehrfacher Prüfungen gewesen und bei diesen bestätigt worden war, so hatte doch Marignac [*Arch. ph. nat.* (*nouv. pér.*) *T. I*, *p.* 373] Bedenken gegen die Neutralität derselben erhoben, indem er (jedenfalls ohne Grund, da beide durch Ueberschuss von Oxalsäure dargestellt worden waren) gemeint hatte, dass das eine Salz zu viel Säure, das andere zu viel Basis enthalten haben möge. Wiewohl nun R. Schneider zu den im Vorigen mitgetheilten Versuchen Oxalate von verschiedenen Darstellungen verwendet hatte und dennoch zu übereinstimmenden Resultaten gelangt war, woraus man schon mit ziemlicher Sicherheit die Unhaltbarkeit von Marignac's Einwurf folgern könnte, so stellte ersterer dennoch eine neue Versuchsreihe,

wenigstens zur Ermittelung des Aequivalents von *Ni* an. Die früher angewandte Methode wurde beibehalten, jedoch wurde das oxalsaure Nickeloxydul nicht wie früher aus schwefelsaurem Nickeloxydul durch Oxalsäure ausgefällt, sondern durch Sättigung von kohlensaurem Nickeloxydul mit Oxalsäure erhalten. Die Versuchsresultate sind:

1) 2,985 Gramm oxalsaures Nickeloxydul geben 12,9832 Procent Kohlenstoff,
2) 2,2635 Gramm oxalsaures Nickeloxydul geben 31,4115 Procent Nickel,
3) 5,2 Gramm oxalsaures Nickeloxydul ergeben 31,4038 Procent Nickel.

Als Mittelwerth dieser beiden Aequivalentbestimmungen ergiebt sich $Ni = 29{,}029$, während der Mittelwerth aus der früheren Versuchsreihe $Ni = 29{,}025$ war. Die Richtigkeit dieser Bestimmungen von R. Schneider wird noch dadurch wahrscheinlich gemacht, dass nach Versuchen von Erdmann und Marchand (1845) das Aequivalent von *Ni* zwischen 29,1 und 29,3 gefunden wurde, wobei Erdmann ausdrücklich bemerkt, dass er Veranlassung habe, die Zahl 29,1 für die richtigere zu halten.

Da nun auf die zweite und dritte Decimalstelle bei den Aequivalenten von *Co* und *Ni* kein besonderer Werth zu legen ist, so erscheint es unbedenklich, $Co = 30$, $Ni = 29$ zu setzen.

Diese Zahlen zeigen übrigens die bekannte Beziehung zwischen Aequivalent und specifischer Wärme recht evident. Nach Regnault ist die specifische Wärme von *Ni* 0,1109, die von *Co* 0,1069; dies giebt

$$29 \,.\, 0{,}1109 = 3{,}216,$$
$$30 \,.\, 0{,}1069 = 3{,}207,$$

also eine sehr gute Uebereinstimmung.

E. Kahl.

---

**XXXVIII. Arabische Bestimmungen specifischer Gewichte aus älterer Zeit.** Unter einer ähnlichen Ueberschrift wird in *Pogg. Ann.* Bd. 107, S. 352 eine aus den *Comptes rend. T.* 48, *p.* 849 entnommene Tabelle specifischer Gewichte von älteren arabischen Bestimmungen herrührend, mitgetheilt und mit neueren dem *Annuaire* entlehnten Angaben verglichen, wobei sich (mit Ausnahme der specifischen Gewichte von Bernstein) eine eigenthümliche Uebereinstimmung herausstellt. Diese aus den *Compt. rend.* entnommenen Mittheilungen sind entlehnt aus dem 1858 in Paris erschienenen Werke von J. J. Clément-Mullet: *Recherches sur l'histoire naturelle et la physique chez les Arabes: pesanteur spécifique de diverses substances minérales, procédé pour l'obtenir, d'après Aboul-Rihan-Albirouny. Extrait de l'Ayin-Akbéry.* Abul-Rihan soll im 10. oder 11. Jahrhundert gelebt haben und Ayin-Akbéry ist eine auf Sultan Akbar's Befehl am Ende des 16. Jahr-

hunderts verfasste Statistik von Indien. Folgende Tabelle giebt einen Auszug der in *Pogg. Ann.* mitgetheilten Angaben:

| | Abul-Rihan. | Neuere Beobachtungen. |
|---|---|---|
| Gold | 19,05 | 19,26 |
| Quecksilber | 13,58 | 13,59 |
| Blei | 11,33 | 11,35 |
| Silber | 10,35 | 10,47 |
| Kupfer | 8,70 | 8,85 |
| Eisen | 7,74 | 7,79 |
| Zinn | 7,31 | 7,29 |
| Carneol | 2,56 | 2,61 |
| Bergkrystall | 2,50 | 2,58 |
| Bernstein (Amber) | 2,53 | 1,08 |

E. Kahl.

## XV.

# Einige Aufgaben aus dem Arabischen des Abraham Aben Ezra.

Von Dr. SCHNITZLER in Trier.

---

Libri hat in dem ersten Bande seiner *Histoire des sciences mathématiques en Italie pag.* 304 *ff.* ein Manuscript veröffentlicht: „*Liber augmenti et diminutionis vocatus numeratio divinationis, ex eo quod sapientes Indi posuerunt, quem Abraham compilavit et secundum librum qui Indorum dictus est*", welches eine im Mittelalter aus dem Arabischen ins Lateinische angefertigte Uebersetzung ist und sich in der Kaiserl. Bibliothek zu Paris befindet. Zu den einzelnen Capiteln: *De censibus, de negotiatione, de donationibus, de pomis, de obviatione, de cambitione, de decenis et frumento et ordeo* hat Libri die mathematische Uebersetzung gegeben; zu Anfang des vorletzten Capitels (*de mercatis*) jedoch bemerkt er: „*C'est à cause de cette obscurité du texte qu'il nous a été impossible de donner la traduction algébrique de ce qui suit.*" Da überdies eine Marginalbemerkung des Manuscriptes sagt: „*Quod in hac quaestione dicitur nimis est obscurum*", so scheint es, dass man das Verständniss der Capitel „*de mercatis*" und „*de anulis*" seit langer Zeit für unmöglich gehalten hat.

Ich will in dem Folgenden die Abschnitte, wie Libri sie mitgetheilt*), wiedergeben und deren mathematische Uebersetzung hinzufügen.

### I. *Capitulum de foris rerum venalium.*

*Quod si dixerit: Duo viri intraverunt forum rerum venalium, quorum unus habebat decem caficios, et alter viginti et vendiderunt cum una misura et uno precio, et recedentes habuit quisque eorum triginta dragmas. Erit capitulum numerationis eius secundum augmentum et diminutionem ut dicas: divisisti decem in duas partes et multiplicasti unam partem in unum et alteram in quattuor,*

---

*) Die mit Sperrschrift gedruckten Wörter habe ich zugesetzt, da sie offenbar vom Abschreiber ausgelassen; die in Klammern stehenden gehören dem Libri'schen Texte an und sind jedenfalls verschrieben. Die eigenthümliche Interpunction ist die des Manuscriptes.

*et aggregasti utramque multiplicationem, et quod pervenit fuit triginta. Partem tamen secundam non ob aliud multiplicas in quattuor, nisi ut quod pervenit sit plus triginta, non enim opertet ut sit minus. Assume igitur lancem ex uno, et multiplica eam in unum; deinde multiplica residuum, quod est novem, in quattuor, et erunt triginta sex: postea adjunge eis unum, et erunt triginta septem. Per ea igitur oppone triginta, et tunc jam errasti cum septem additis; deinde accipe lancem secundam divisam a prima, que sit ex duobus, et eam in unum multiplica, et perveniet duo; deinde multiplica residuum ex decem, quod est octo in quattuor, et erunt triginta duo. Postea adjunge eis duo, et erunt triginta quattuor. Oppone ergo per ea triginta, et tunc jam errasti cum quattuor additis. Multiplica igitur lancem primam, que est unum, in errorem lancis secunde, que est quattuor, et erunt quattuor. Postea multiplica lancem secundam in errorem lancis prime, que est septem, et erunt quattuordecim. Minue ergo ex eis quattuor, et remanebunt decem; deinde minue minorem duorum errorum ex majore eorum, quod est ut demas quattuor ex septem et remanebunt tria. Per ea igitur divide decem, et pervenient tibi tria et tercia. Hoc igitur est quod habens decem vendidit in primo foro, scilicet tres caficios et tertiam (tertia) dando unumquemque caficium pro dragma, et sic habuit tres dragmas et tertiam (tertia): deinde minue tria et tertiam (tertia) ex decem, et remanebunt sex et due tertie. Vendat igitur unumquemque (unusquemque) caficium pro quattuor dragmis, et habebit viginti sex et duas tercias, quibus adjunge tria et tertiam, et erunt triginta.*

*De viginti quoque facias*) quemadmodum fecisti de decem et invenies. Intellige. Est propterea regula inveniendi hoc, sicut regula decem que dividitur in duas partes.*

Ist $x$ die Anzahl, welche zu Anfang des Marktes (*in primo foro*) von demjenigen verkauft wurde, welcher 10 Stück hatte, also $10 - x$ diejenigen, welche ihm zum spätern (*igitur*) Verkauf übrig blieben, ist überdies der anfängliche Marktpreis 1 Drachme für 1 Stück, dagegen später 4 Drachmen, so wird:

$$1 . x + 4(10 - x) = 30.$$

Setzt man $x = 1$, so wird

$$1 . 1 + 4 . 9 = 36 + 1 = 37,$$
$$37 - 30 = +7 = 1 . \text{Fehler.}$$

Für $x = 2$ wird

$$1 . 2 + 4 . 8 = 32 + 2 = 34,$$
$$34 - 30 = +4 = 2 . \text{Fehler,}$$

also der wahre Werth für $x = \dfrac{2 . 7 - 1 . 4}{7 - 4} = 3\frac{1}{3}$,

$$1 . 3\tfrac{1}{3} + 4 . 6\tfrac{2}{3} = 30.$$

Bezeichnet nun $x$ (*De viginti quoque etc.*) die Anzahl, welche von dem Zweiten anfangs verkauft wurde, so wird bei denselben Preisen, wie oben,

*) *Et per viginti fac duas lances, unam ex duobus et alteram ex quatuor, et invenies. (Note marginale du manuscrit.)*

$$1 \,.\, x + 4\,(20 - x) = 30,$$

$x = 1$ gesetzt, wird die linke Seite

$$1 \,.\, 1 + 4 \,.\, 19 = 76 + 1 = 77,$$

$$77 - 30 = + 47 = 1 \,.\, \text{Fehler};$$

wenn $x = 2$,

$$1 \,.\, 2 + 4 \,.\, 18 = 72 + 2 = 74,$$

$$74 - 30 = + 44 = 2 \,.\, \text{Fehler};$$

also dieses $x = \dfrac{2 \,.\, 47 - 1 \,.\, 44}{47 - 44} = 16\tfrac{2}{3}$,

$$1 \,.\, 16\tfrac{2}{3} + 4 \,.\, 3\tfrac{1}{3} = 30.$$

Derjenige, welcher 10 Stück hat, verkauft also zu Anfang, wo 1 Stück 1 Drachme kostet, $3\tfrac{1}{3}$, der andere aber $16\tfrac{2}{3}$. Mittlerweile ändern sich die Marktpreise; 1 Stück kostet jetzt 4 Drachmen. Der Erstere hat noch $6\tfrac{2}{3}$, der Zweite $3\tfrac{1}{3}$ Stück zu verkaufen. Der Erstere hat schon $3\tfrac{1}{3}$, der Zweite $16\tfrac{2}{3}$ Drachmen gelöst. Der Erstere löst jetzt noch $4 \,.\, 6\tfrac{2}{3} = 26\tfrac{2}{3}$ und hat zusammen 30 Drachmen. Der Letztere löst noch $4 \,.\, 3\tfrac{1}{3} = 13\tfrac{1}{3}$ und hat das Gleiche.

Wollten wir der Marginalbemerkung, abweichend von der Angabe des Textes, folgen, so würden wir schreiben

$$1 \,.\, x + 4\,(20 - x) = 30,$$

$$x = 2,$$

$$1 \,.\, 2 + 4 \,.\, 18 = 74,$$

$$74 - 30 = + 44 = 1 \,.\, \text{Fehler},$$

$$x = 4,$$

$$1 \,.\, 4 + 4 \,.\, 16 = 68,$$

$$68 - 30 = + 38 = 2 \,.\, \text{Fehler},$$

$$x = \frac{4 \,.\, 44 - 2 \,.\, 38}{44 - 38} = 16\tfrac{2}{3}.$$

Es erhellt leicht, dass die oben angenommenen Preise 1 und 4 einer Reihe von Zahlen angehören, welche für $x$ und $y$ in die Gleichungen

$$zx + (10 - z)\,y = 30, \quad ux + (20 - u)\,y = 30,$$

(wo $z$ und $u$ die Anzahl der im Anfang verkauften Stücke bezeichnen), gesetzt werden können, sobald sie der Bedingung genügen, dass $x < \frac{4}{3}$ oder $> 3$, wenn $x < y$ resp. $> y$. Es entsprechen z. B. $x = 11$, $y = 1$, $z = 2$, $u = 1$.

## II. *Capitulum aliud de eodem.*

*Quod si dixerit: Est census cujus quartam abstulisti et quintam (quinta) ejus quod remansit, et accepisti quartam ejus quod abstuleras et quintam ejus quod remansit, et quod pervenit fuit septem. Erit capitulum numerationis ejus secundum augmentum et diminutionem, ut assumas lancem, que sit ex viginti, et auferas quartam ejus, et remanebunt quindecim; deinde aufer quintam ejus, et remanebunt duodecim. Postea accipe quartam octo que abstulisti, que est duo,*

*serva eam; deinde assume quintam duodecim, que est duo et due quinte; ea igitur adjunge duobus, et erunt quattuor et due quinte. Per ea igitur oppone septem, et tunc jam errasti cum duobus et tribus quintis diminutis, et hoc vocatur error primus; deinde accipe lancem secundam divisam a prima, que sit ex quadraginta, et aufer ejus quartam et remanebunt triginta et quintam residui, que est sex, et adjunge eam decem ablatis, et erunt sedecim, eorum ita sume quartam, que est quattuor. Deinde accipe quintam ejus quod remansit, quod est viginti quattuor, et est quattuor et quattuor quinte, et adjunge eam quattuor, et erunt octo et quattuor quinte. Oppone igitur per ea septem: tunc jam errasti cum uno et quattuor quintis additis. Multiplica ergo unum et quattuor quintas in lancem primam, et pervenient triginti sex: deinde multiplica duo et tres quintas in lancem secundam, et erunt centum et quattuor. Postea aggrega duos numeros pervenientes, et quod perveniet erit centum et quadraginta: deinde aggrega duos errores, qui sunt unum et quattuor quinte et duo et tres quinte, et erunt quattuor et due quinte. Divide ergo per ea centum et quadraginta, et quod perveniet erit census, qui est triginta unum et novem partes undecime.*

Bezeichnet $x^2$ die Zahl (*census* = Quadratzahl, *res* die Wurzel), so ist dasjenige, was er abgezogen hat, in Summe

$$\frac{x^2}{4} + \frac{1}{5}\left(x^2 - \frac{x^2}{4}\right),$$

die aufzulösende Gleichung:

$$\tfrac{1}{4}\left[\frac{x^2}{4} + \tfrac{1}{5}\left(x^2 - \frac{x^2}{4}\right)\right] + \tfrac{1}{5}\left[x^2 - \frac{x^2}{4} - \tfrac{1}{5}\left(x^2 - \frac{x^2}{4}\right)\right] = 7,$$

und die angegebene Lösung:

$$x^2 = 20 \text{ gesetzt},$$
$$20 - \tfrac{20}{4} = 15, \quad 15 - \tfrac{15}{5} = 12,$$
$$\tfrac{1}{4}\left(\tfrac{20}{4} + \tfrac{15}{5}\right) = \tfrac{1}{4} \cdot 8 = 2, \quad \tfrac{12}{5} = 2\tfrac{2}{5},$$
$$2 + 2\tfrac{2}{5} = 4\tfrac{2}{5},$$
$$4\tfrac{2}{5} - 7 = -2\tfrac{3}{5} = 1 \text{ . Fehler};$$
$$x^2 = 40,$$
$$40 - \tfrac{40}{4} = 30, \quad 30 - \tfrac{30}{5} = 30 - 6 = 24,$$
$$\tfrac{40}{4} + \tfrac{30}{5} = 16,$$
$$\tfrac{1}{4} \cdot 16 = 4, \quad \tfrac{1}{5} \cdot 24 = 4\tfrac{4}{5},$$
$$4 + 4\tfrac{4}{5} = 8\tfrac{4}{5},$$
$$8\tfrac{4}{5} - 7 = +1\tfrac{4}{5} = 2 \text{ . Fehler};$$

folglich

$$x^2 = \frac{1\tfrac{4}{5} \cdot 20 + 2\tfrac{3}{5} \cdot 40}{2\tfrac{3}{5} + 1\tfrac{4}{5}} = \frac{36 + 104}{\tfrac{22}{5}} = \frac{140}{\tfrac{22}{5}} = 31\tfrac{9}{11}.$$

*Hoc quoque secundum regulam invenitur, que est ut ponas principium ex quo consurgit quarta et quinta viginti, et auferas ei quartam suam, et remanebunt quindecim et quintam residui, et remanebunt duodecim. Sume ergo quartam octo quam abstulisti et quintam duodecim remanentium, et quod perveniet erit quattuor et due quinte. Ergo dic: in quem numerum multiplicantur quattuor et due quinte*

*donec perveniant viginti? Illud vero invenies quattuor et sex undecimas. Multiplica igitur hec quattuor et sex undecimas partes in septem que dixisti remansisse ex censu, et quod ex multiplicatione perveniet erit illud quod voluisti, quod est triginta unum et novem undecime partes, et est census.*

Diese Lösung ist also:

$$\frac{20}{4} = 5, \quad \frac{20}{5} = 4,$$
$$20 - \frac{20}{4} = 15, \quad 15 - \frac{15}{5} = 12,$$
$$\frac{1}{4}\left(\frac{20}{4} + \frac{15}{5}\right) = \frac{1}{4} \cdot 8 = 2, \quad \frac{1}{5} \cdot 12 = 2\frac{2}{5},$$
$$2 + 2\frac{2}{5} = 4\frac{2}{5},$$
$$\frac{20.}{4\frac{2}{5}} = 4\frac{6}{11},$$
$$x^2 = 7 \cdot 4\frac{6}{11} = 31\frac{9}{11}.$$

## III. Capitulum de anulis.

1) *Quod est ut dicas viro: Sume quod est inter te et anulum; deinde dic ei dupla quod habes. Postea dic ei: adjunge ei quinque; deinde dic: multiplica ipsum in quinque. Postea dic ei, adde eis decem: deinde dic: multiplica quod habes in decem. Postea dic: minue ex eo quod habes quadringenta (quadraginta). Cum ergo minuerit ea, accipe pro quadringentis (quadragentis) unum, et unum serva. Deinde dic ei: minue ex eo quod habes centum. Cum ergo diminuerit ea, assume tu pro eis unum. Deinde precipe ei ut ex eo quod habet, diminuat centum quoties poterit, et tu pro unoquoque centenario diminuto assume unum. Postquam ergo non remanserit ei centum, considera illud quod habes, fiet enim ut illud ad quod pervenerit numerus sit ille qui sumpsit anulum.*

Wenn $x$ die gedachte Zahl ist, $p$ die Anzahl der einzelnen subtrahirten Hunderte und $r$ der dann noch übrig bleibende Rest, so ist die Bedeutung des Vorstehenden:

$$\frac{[5\,(2x+5)+10]\,10 - 400}{100} = p + \frac{r}{100},$$
$$x - 1 + \frac{50}{100} = p + \frac{r}{100},$$
$$x - 1 = p,$$
$$x = p + 1.$$

Das zur Ermittelung der gedachten Zahl angewandte Verfahren führt immer zum Ziele, jedoch darf $x$ nicht gleich 0 genommen werden. Die einzelnen Fälle, wann das angegebene Verfahren anwendbar und wann nicht, werden nicht aufgezählt. Der Verfasser sagt nur: „*Dubia est regula de anulo.*"

2) *Alio quoque modo invenitur hoc, qui est ut dicas viro: Sume quod est inter te et anulum in una manuum tuarum et assume in alteram idem (tandem); deinde assume tu in manu tua unum: postea dic ei: multiplica quod habes in una manuum tuarum, in quemcumque numerum volueris. Postea multiplica unum quem*

*tenuisti in manu tua in illum numerum in quem precipisti illum multiplicare, et postea dic ei: divide quod exivit ex multiplicatione per illud quod habes (habet) in alia manu, perveniet ergo unicuique quantum fuit quod pervenit ex multiplicatione ejus quod habebas in manu tua. Postea dic ei: divide quod exivit ex multiplicatione per illud quod habes (habet) in alia manu tua. Postea dic ei: ecce (eice) quod attinet uni de eo quod accepisti. — Dubia est regula de anulo. — Et postea dic mihi quod remansit. Et tu minue illud de eo quod tenuisti in manu tua aggregatum, et quod remanebit erit illud.*

Bezeichnet $x$ die gesuchte Zahl, $p$ die willkürlich angenommene, mit welcher multiplicirt wird, und $r$ den Rest (*Et postea dic mihi quod remansit*), so wird

$$\frac{\frac{px}{x}}{x} = 1 + \frac{r}{x},$$

$$x = 1 \,.\, p - r.$$

Die gedachte Zahl lässt sich auf diese Weise offenbar nur dann finden, wenn $p > x$ gewählt werden.

3) *Et hoc alio modo invenitur, qui est ut dicas viro: sume quod est inter te et anulum, postea dic ei, adjunge ei duplum ipsius; deinde dic: adde ei quantum est medietas ejus quod aggregatum est. Deinde dic ei: minue ex eo quod habes novem. Cum ergo minuerit ea, sume tu per novem duo; deinde precipe ei ut ex eo quod habet minuat novem et assume pro unoquoque novenario diminuto duo. Cum ergo remanserit (remanseris) ei numerus novem, sume pro eo unum, deinde considera illud quod habes. Ipsum namque est ille numerus qui sumpsit anulum.*

Nennen wir $x$ die gedachte Zahl, $p$ die Anzahl der abgezogenen Neunen (die erste 9 nicht mitgerechnet), so ist die Bedeutung des Obigen:

$$\frac{x + 2x + \frac{x + 2x}{2} - 9}{9} = p,$$

$$x = 2p + 2.$$

Hier darf $x$ nicht $< 2$ gedacht werden.

4) *Et hoc item alio reperitur modo, qui est ut dicas viro: sume quod est inter te et anulum deinde dic, multiplica quod habes in tria, postea dic ei; sume medietatem ejus quod tibi pervenit. Deinde quere ab eo si est in eo fractio. Quod si dixerit est: assume tu pro fractione unum; deinde dic ei, serva fractionem, donec sit unum integrum. Deinde dic ei: multiplica quod habes in tria; et postea dic ei: minue ex eo quod habes novem. Et tu, assume pro unoquoque novenario diminuto duo, et aggrega que habes, et tuum erit illud. Quod si dixerit, non est in eo fractio, et cum dicis, minue ex eo quod habes novem, dixerit non est in novem, tunc dic ei quod nihil accepit. — Expletus est liber.*

Hier wird ein Unterschied gemacht, ob $x$ gerade oder ungerade ist. In dem ersten Falle wird gesagt: „Wenn

$$\frac{3 \cdot \frac{3x}{2}}{9} = p,$$

so ist $x = 2p$;

ist hier $p = 0$, so ist auch $x = 0$";

in dem andern Falle: „Wenn

$$\frac{3\left(\frac{3x}{2} - \frac{3}{2}\right)}{9} = p,$$

so ist $x = 2p + 1$".

5) *Si tres viri tenuerint tres res diversi generis, et volueris scire quam illarum quisque eorum teneat; noscas primus unamquamque earum, et in corde tuo pone unam primam, et alteram secundam, et aliam tertiam, et voca similiter in corde tuo primam duo et secundam novem et terciam decem. Deinde unum trium hominum nomina (non) duo, et alium voca tres et tertium voca quinque, et precipe uni eorum qui sciat quid quisque eorum teneat, ut multiplicet nomen tenentis rem primam in duo, et tenentis rem secundam in novem, et nomen tenentis rem tertiam in decem, et aggreget ea que ex multiplicationibus pervenerint, et summam inde pervenientem tibi dicat. Quam tu assumens minue ex centum et residuum partire per octo, et quod ex divisione pervenerit erit nomen tenentis rem primam, et quod remanserit erit nomen tenentis rem secundam, et alius tenebit terciam rem.*

Bezeichnen $p$, $q$ und $r$ je eine der Zahlen 2, 3, 5 in beliebiger Ordnung, so ist

$$\frac{100 - (2p + 9q + 10r)}{8} = p + \frac{q}{8},$$

eine identische Gleichung, auf welcher die obige Aufgabe beruht und deren Richtigkeit sofort einleuchtet, wenn nur $p + q + r = 10$ gesetzt wird.

Es ist leicht abzusehen, dass die vorstehende Gleichung ein specieller Fall von folgender allgemeineren Gleichung ist:

Bezeichnen $p$, $q$, $r$ und $t$ beliebige Zahlen und wird der Kürze halber $p + q + r = S$ gesetzt, so ist:

$$\frac{S^2 - [tp + (S-1)q + Sr]}{S - t} = p + \frac{q}{S - t}.$$

Soll jedoch, wie zur Anwendung des obigen Verfahrens nothwendig ist, die rechte Seite eine gemischte Zahl bleiben, so ist offenbar nothwendig, dass $S - t$ kein Factor von $q$ und $t \overline{\overline{<}} S - 2$ genommen wird.

## XVI.

# Ueber Facultätenreihen.

Von O. Schlömilch.

(Aus den Berichten der Königl. Sächs. Gesellschaft der Wissenschaften.)

---

In seinem *Methodus differentialis sive tractatus de summatione et interpolatione serierum*, Lond. 1730, zeigt Stirling, dass Reihen, die nach absteigenden Potenzen einer Variabelen $x$ fortschreiten, wie z. B.

$$\frac{a_1}{x}+\frac{a_2}{x^2}+\frac{a_3}{x^3}+\frac{a_4}{x^4}+\cdots\cdot\cdot$$

auf die Form

$$\frac{b_1}{x}+\frac{b_2}{x(x+1)}+\frac{b_3}{x(x+1)(x+2)}+\frac{b_4}{x(x+1)(x+2)(x+3)}+\cdots$$

gebracht werden können. Er geht nämlich von der Gleichung aus

$$\frac{1}{x^n}=\frac{A}{x(x+1)\ldots(x+n-1)}+\frac{B}{x(x+1)\ldots(x+n-1)(x+n)}$$
$$+\frac{C}{x(x+1)\ldots(x+n)(x+n+1)}+\cdots,$$

worin $A, B, C, \ldots$ gewisse Zahlencoefficienten bedeuten, wendet dieselbe für $n=2, 3, 4, \ldots$ auf die einzelnen Glieder der ersten Reihe an und vereinigt nachher die gleichartigen Grössen. Nach einer leichten Rechnung, deren Detail im fünften Theile des Klügel'schen Wörterbuchs angegeben ist, findet Stirling

$$\frac{a_1}{x}+\frac{a_2}{x^2}+\frac{a_3}{x^3}+\frac{a_4}{x^4}+\cdots\cdot\cdot$$
$$=\frac{a_1}{x}+\frac{a_2+a_3}{x(x+1)}+\frac{2a_2+3a_3+a_4}{x(x+1)(x+2)}$$
$$+\frac{6a_2+11a_3+6a_4+a_5}{x(x+1)(x+2)(x+3)}+\frac{24a_2+50a_3+35a_4+10a_5+a_6}{x(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)}+\cdots$$

Dieses Verfahren hat zwei schwache Seiten; man gelangt nämlich weder zur Kenntniss des independenten Bildungsgesetzes der Coefficienten $b_1, b_2, b_3\ldots$, noch zu einer sicheren Entscheidung über die Convergenz oder Divergenz der neuen Reihe. Ausserdem hat sich bei Anwendung besserer

Methoden noch eine Eigenthümlichkeit gezeigt. Wenn nämlich eine Function, so zu sagen, gewaltsam, in eine Reihe der ersten Form verwandelt wird, so trifft es sich nicht selten, dass die Reihe halbconvergent oder völlig divergent ist, aber es folgt hieraus keineswegs, dass auch die Reihe der zweiten Form (die Facultätenreihe) dieselbe Eigenschaft besitzen müsse; in der That werden wir nachher Fälle aufzeigen, wo die erste Reihe divergirt, die zweite dagegen convergirt. — Nach diesen Erörterungen glauben wir keine überflüssige Arbeit zu unternehmen, wenn wir diesen Gegenstand von Neuem und aus einem anderen Gesichtspunkte betrachten.

I. Die eigentliche Quelle der erwähnten Facultätenreihen dürfte in bestimmten Integralen von der Form

$$1)\qquad \int_0^1 e^{-xu} f(u)\, du = \varphi(x), \quad x > 0,$$

zu suchen sein. Mit Hülfe der Substitution

$$e^{-u} = 1 - t, \quad \text{woraus} \quad u = l\left(\frac{1}{1-t}\right), \quad du = \frac{dt}{1-t}$$

erhält man nämlich

$$2)\qquad \varphi(x) = \int_0^1 (1-t)^{x-1} f\left[l\left(\frac{1}{1-t}\right)\right] dt,$$

und wenn nun $f\left[l\left(\frac{1}{1-t}\right)\right]$ nach dem Taylor'schen oder Maclaurin'schen Satze entwickelt werden kann, also eine Gleichung von der Form

$$f\left[l\left(\frac{1}{1-t}\right)\right] = Q_0 + \frac{Q_1}{1} t + \frac{Q_2}{1.2} t^2 + \frac{Q_3}{1.2.3} t^3 + \dots$$
$$\dots + \frac{Q_{n-1}}{1.2\dots(n-1)} t^{n-1} + R_n$$

existirt, so lassen sich auch alle einzelnen Glieder, mit $(1-t)^{x-1}dt$ multiplicirt, zwischen den Grenzen $t = 0$ und $t = 1$ integriren; unter Anwendung der bekannten Formel

$$3)\qquad \int_0^1 (1-t)^{x-1} t^m\, dt = \frac{1.2.3\dots m}{x(x+1)(x+2)\dots(x+m)}$$

findet man

$$4)\qquad \varphi(x) = \frac{Q_0}{x} + \frac{Q_1}{x(x+1)} + \frac{Q_2}{x(x+1)(x+2)} + \dots$$
$$\dots + \frac{Q_{n-1}}{x(x+1)\dots(x+n-1)} + \int_0^1 (1-t)^{x-1} R_n\, dt$$

also eine Reihenentwickelung der besprochenen Art. Wie man sieht, ist diese Herleitung ganz unabhängig von der Frage, ob $\varphi(x)$ nach absteigen-

den Potenzen von $x$ entwickelt werden kann oder nicht; ferner bemerkt man, dass sich auf dem angegebenen Wege der Rest der Reihe bestimmen und mittelst desselben die Convergenz oder Divergenz der Reihe entscheiden lässt.

Behufs der independenten Bestimmung von $Q_0, Q_1, Q_2 \dots$ differenziren wir den Ausdruck $f\left[l\left(\frac{1}{\tau}\right)\right]$ mehrmals nach einander in Beziehung auf $\tau$; das Resultat stellt sich unter die Form

$$5)\quad D^m f\left[l\left(\frac{1}{\tau}\right)\right]=$$
$$=\frac{(-1)^m}{\tau^m}\left\{\overset{m}{P}_1 f'\left[l\left(\frac{1}{\tau}\right)\right]+\overset{m}{P}_2 f''\left[l\left(\frac{1}{\tau}\right)\right]+\dots+\overset{m}{P}_m f^{(m)}\left[l\left(\frac{1}{\tau}\right)\right]\right\},$$

worin $\overset{m}{P}_1, \overset{m}{P}_2, \dots \overset{m}{P}_m$ gewisse Zahlencoefficienten bedeuten, die von der Natur der Function $f$ unabhängig sind. Ebendesshalb kann irgend eine Specialisirung dieser Function zur Ermittelung jener Zahlen dienen, am besten $f(u) = e^{\alpha u}$, wodurch $f\left[l\left(\frac{1}{\tau}\right)\right]=\tau^{-\alpha}$ wird und die Gleichung 5) in die folgende übergeht:

$$\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)\dots(\alpha+m-1)=\overset{m}{P}_1\alpha+\overset{m}{P}_2\alpha^2+\overset{m}{P}_3\alpha^3+\dots+\overset{m}{P}_m\alpha^m.$$

Man ersieht hieraus, dass die Coefficienten $P$ mit dem sogenannten Facultätencoefficienten identisch sind. Nimmt man in Nr. 5) $\tau = 1 - t$ und setzt nachher $t = 0$, so erhält man

$$6)\qquad Q_m=\overset{m}{P}_1 f'(0)+\overset{m}{P}_2 f''(0)+\dots+\overset{m}{P}_m f^{(m)}(0).$$

Was ferner den Rest anlangt, so ist nach dem Maclaurin'schen Satze

$$R_n=\frac{1}{1.2\dots(n-1)}\int_0^t (t-w)^{n-1} D^n f\left[l\left(\frac{1}{1-w}\right)\right]dw;$$

das in Nr. 4) vorkommende Ergänzungsglied, welches vorläufig $S_n$ heissen möge, erscheint demnach in Gestalt des Doppelintegrales

$$S_n=\frac{1}{1.2\dots(n-1)}\int_0^1 (1-t)^{x-1}\,dt\int_0^1 (t-w)^{n-1} D^n f\left[l\left(\frac{1}{1-w}\right)\right]dw.$$

Um dasselbe zu reduciren, erinnern wir an die bekannte Formel

$$\int_0^1\int_0^{1-\xi}\xi^{a-1}\eta^{b-1}F(\xi+\eta)\,d\xi\,d\eta=\frac{\Gamma(a)\,\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}\int_0^1\tau^{a+b-1}F(\tau)\,d\tau$$

und nehmen $\xi = 1 - t$, $\eta = t - w$; dies giebt

$$\int_0^1(1-t)^{a-1}\,dt\int_0^1(t-w)^{b-1}F(1-w)\,dw=\frac{\Gamma(a)\,\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}\int_0^1\tau^{a+b-1}F(\tau)\,d\tau.$$

Wir setzen ferner $a = x$, $b =$ der ganzen positiven Zahl $n$, und

$$F(1-w) = \frac{d^n f\left[l\left(\frac{1}{1-w}\right)\right]}{[d(1-w)]^n} = (-1)^n D^n f\left[l\left(\frac{1}{1-w}\right)\right],$$

woraus folgt

$$F(\tau) = \frac{d^n f\left[l\left(\frac{1}{\tau}\right)\right]}{d\tau^n} = D^n f\left[l\left(\frac{1}{\tau}\right)\right];$$

die vorige Gleichung geht dann in die nachstehende über

$$(-1)^n \int_0^1 (1-t)^{x-1} dt \int_0^t (t-w)^{n-1} D^n f\left[l\left(\frac{1}{1-w}\right)\right] dw$$

$$= \frac{x(x+1)(x+2)\ldots(x+n-1)}{1.2.3\ldots\ldots(n-1)} \int_0^1 \tau^{x+n-1} D^n f\left[l\left(\frac{1}{\tau}\right)\right] d\tau,$$

die unmittelbar zur Reduction von $S_n$ führt nämlich

$$S_n = \frac{(-1)^n}{x(x+1)\ldots(x+n-1)} \int_0^1 \tau^{x+n-1} D^n f\left[l\left(\frac{1}{\tau}\right)\right] d\tau.$$

Der Gleichung 4) giebt man jetzt am zweckmässigsten die folgende Gestalt

$$7) \quad \varphi(x) = \frac{Q_0}{x} + \frac{Q_1}{x(x+1)} + \frac{Q_2}{x(x+1)(x+2)} + \ldots$$

$$\ldots + \frac{Q_{n-1}}{x(x+1)\ldots(x+n-1)} + \frac{\varrho_n}{x(x+1)\ldots(x+n-1)}$$

und darin ist

$$8) \quad \varrho_n = (-1)^n \int_0^1 \tau^{x+n-1} D^n f\left[l\left(\frac{1}{\tau}\right)\right] d\tau,$$

oder auch, wenn die auf $\tau$ bezüglich Differentiation nach Nr. 5) ausgeführt und schliesslich die Substitution $\tau = e^{-u}$ vorgenommen wird,

$$9) \quad \varrho_n = \int_0^\infty e^{-xu} \left\{ \overset{n}{P}_1 f'(u) + \overset{n}{P}_2 f''(u) + \ldots + \overset{n}{P}_n f^{(n)}(u) \right\} du.$$

Durch die Formeln 1), 6), 7) und 8) oder 9) ist man nun im vollständigen Besitze der Mittel, um Reihenverwandlungen der besprochenen Art in aller Genauigkeit auszuführen. Wir geben hierzu einige Beispiele.

II. In dem sehr einfachen Falle $f(u) = e^{-\alpha u}$, $f\left[l\left(\frac{1}{\tau}\right)\right] = \tau^\alpha$ wird

$$\varphi(x) = \int_0^\infty e^{-(x+\alpha)u} du = \frac{1}{x+\alpha},$$

$$Q_m = (-1)^m \alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\ldots(\alpha-\overline{m-1}),$$

$$\varrho_n = (-1)^n \alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-\overline{n-1})\int_0^1 \tau^{x+n-1}\,\tau^{\alpha-n}\,d\tau$$

$$= (-1)^n \alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-\overline{n-1})\frac{1}{x+\alpha};$$

diess giebt folgende Entwickelung

$$10)\quad \frac{1}{x+\alpha} = \frac{1}{x} - \frac{\alpha}{x(x+1)} + \frac{\alpha(\alpha-1)}{x(x+1)(x+2)} - \ldots\ldots$$

$$\ldots + (-1)^{n-1}\frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\ldots(\alpha-\overline{n-2})}{x(x+1)(x+2)\ldots(x+n-1)}$$

$$+ (-1)^n \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\ldots(\alpha-\overline{n-1})}{x(x+1)(x+2)\ldots(x+n-1)}\,\frac{1}{x+\alpha},$$

die man bekanntlich auch auf elementarem Wege erhalten kann.

Wegen späterer Anwendungen untersuchen wir den im Ergänzungsgliede vorkommenden Ausdruck

$$\frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\ldots\ldots(\alpha-\overline{n-1})}{x(x+1)(x+2)\ldots\ldots(x+n-1)}$$

etwas genauer. Wenn $\alpha$ eine positive aber keine ganze Zahl ist, so lassen sich immer zwei aufeinander folgende ganze Zahlen $k-1$ und $k$ angeben, zwischen denen $\alpha$ liegt; dem entsprechend zerlegen wir den vorstehenden Ausdruck in drei Factoren, nämlich, $n > k > \alpha$ vorausgesetzt,

$$\frac{(\alpha-1)(\alpha-2)\ldots(\alpha-\overline{k-1})}{1.2\ldots\ldots(k-1)}\cdot\frac{(\alpha-k)(\alpha-\overline{k+1})\ldots(\alpha-\overline{n-1})}{k(k+1)\ldots\ldots(n-1)}\cdot\frac{1.2\ldots\ldots(n-1)}{(x+1)(x+2)\ldots(x+n-1)}.$$

Im ersten Factor, welchem wir die Form

$$\frac{\alpha-\overline{k-1}}{1}\cdot\frac{\alpha-\overline{\alpha-2}}{2}\ldots\ldots\frac{\alpha-2}{k-2}\cdot\frac{\alpha-1}{k-1}$$

ertheilen, beträgt die Differenz $\alpha - k - 1$ weniger als eine Einheit, mithin ist

$$\alpha-\overline{k-1}<1,\ \alpha-\overline{k-2}<2,\ \ldots\ \alpha-2<k-2,\ \alpha-1<k-1,$$

also jeder Bruch ein ächter Bruch und folglich auch der fragliche Factor ein ächter Bruch, der $\vartheta_1$ heissen möge. Der zweite Factor ist einerlei mit

$$(-1)^{n-k}\left(1-\frac{\alpha}{k}\right)\left(1-\frac{\alpha}{k+1}\right)\ldots\left(1-\frac{\alpha}{n-1}\right),$$

wo nun in jeder Parenthese ein ächter Bruch steht; der fragliche Factor kann daher $=(-1)^{n-k}\vartheta_2$ gesetzt werden, wenn $\vartheta_2$ wieder einen positiven ächten Bruch bezeichnet. Das Ergänzungsglied ist demnach

$$(-1)^n \frac{\alpha}{x}\cdot\vartheta_1(-1)^{n-k}\vartheta_2\,\frac{1.2\ldots\ldots(n-1)}{(x+1)(x+2)\ldots(x+n-1)}\,\frac{1}{x+\alpha}$$

oder kürzer

$$\frac{\Theta\alpha}{x+\alpha}\cdot\frac{1.2\ldots\ldots(n-1)}{x(x+1)(x+2)\ldots(x+n-1)},$$

wenn $\Theta$ einen positiven oder negativen ächten Bruch darstellt. Statt der Gleichung 10) hat man jetzt die folgende

$$11)\quad \frac{1}{x+\alpha}=\frac{1}{x}-\frac{\alpha}{x(x+1)}+\frac{\alpha(\alpha-1)}{x(x+1)(x+2)}-\ldots.$$
$$\ldots.+(-1)^{n-1}\frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\ldots(\alpha-\overline{n-2})}{x(x+1)(x+2)\ldots(x+n-1)}$$
$$+\frac{\Theta\alpha}{x+\alpha}\cdot\frac{1.2.\ldots.(n-1)}{x(x+1)(x+2)\ldots(x+n-1)},$$

und nach dem bekannten Satze, dass für $a>b>0$ und $n=\infty$

$$\frac{b(b+1)(b+2)\ldots.(b+n-2)}{a(a+1)(a+2)\ldots.(a+n-2)}=0$$

ist, ergiebt sich, wenn $a=x+1$ und $b=1$ gesetzt wird, dass das Ergänzungsglied der vorigen Reihe die Null zur Grenze hat, sobald $x$ eine positive Zahl $>0$ bedeutet. Die Gleichung

$$12)\quad \frac{1}{x+\alpha}=\frac{1}{x}-\frac{\alpha}{x(x+\alpha)}+\frac{\alpha(\alpha-1)}{x(x+1)(x+2)}\ldots..\textit{ in inf.}$$

gilt daher für alle positiven $x$ und $\alpha$, während die Entwickelung

$$\frac{1}{x+\alpha}=\frac{1}{x}-\frac{\alpha}{x^2}+\frac{\alpha^2}{x^3}-\ldots.$$

an die Beschränkung $x>\alpha$ gebunden ist.

III. Als zweites Beispiel diene die Annahme $f(u)=u^{k-1}$, wobei $k$ als ganze und positive Zahl vorausgesetzt wird. Es ist dann

$$\varphi(x)=\int_0^\infty e^{-xu}u^{k-1}du=\frac{1.2\ldots.(k-1)}{u^k},$$

und nach Nr. 6)

$$Q_m=0,\qquad\qquad \text{für } m<k-1,$$
$$Q_m=(k-1)(k-2)\ldots2.1\overset{m}{P}_{k-1}\ \text{ für } m\geqq k-1;$$

unter der Annahme $n>k$ ergiebt sich nun aus Nr. 7) nach beiderseitiger Division mit $1.2\ldots(k-1)$

$$13)\quad \frac{1}{x^k}=\frac{\overset{k-1}{P}_{k-1}}{x(x+1)\ldots(x+k-1)}+\frac{\overset{k}{P}_{k-1}}{x(x+1)\ldots(x+k)}+\frac{\overset{k+1}{P}_{k-1}}{x(x+1)\ldots(x+k+1)}+\ldots$$
$$\ldots+\frac{\overset{n-1}{P}_{k-1}}{x(x+1)(x+2)\ldots(x+n-1)}$$
$$+\frac{1}{1.2\ldots(k-1)}\cdot\frac{\varrho_n}{x(x+1)\ldots.(x+n-1)}.$$

Ferner ist nach Nr. 9), wie man durch Ausführung der angedeuteten Differentiationen und Integrationen leicht findet,

$$\frac{\varrho_n}{1.2\ldots(k-1)}=\overset{n}{P}_1\frac{1}{x^{k-1}}+\overset{n}{P}_2\frac{1}{x^{k-2}}+\ldots+\overset{n}{P}_{k-1}\frac{1}{x},$$

mithin

$$14)\quad \frac{1}{x^k}=\frac{\overset{k-1}{P}_{k-1}}{x(x+1)\ldots(x+k-1)}+\frac{\overset{k}{P}_{k-1}}{x(x+1)\ldots(x+k)}+\frac{\overset{k+1}{P}_{k-1}}{x(x+1)\ldots(x+k+1)}+\ldots$$
$$\ldots+\frac{\overset{n-1}{P}_{k-1}}{x(x+1)(x+2)\ldots(x+n-1)}+\frac{1}{x^k}\frac{\overset{n}{P}_1 x+\overset{n}{P}_2 x^2+\ldots+\overset{n}{P}_{k-1}x^{k-1}}{x(x+1)(x+2)\ldots(x+n-1)}$$

Diese identische Gleichung scheint völlig unbekannt geblieben zu sein; sie ist die eigentliche Quelle der Stirling'schen Formel und führt zu einem strengen Beweise der letzteren, wobei die Convergenz der Reihe nicht zweifelhaft bleibt. Das Ergänzungsglied ist nämlich gleich dem folgenden Ausdrucke

$$\frac{1}{x^k}\frac{\alpha(\alpha+1)\ldots(\alpha+n-1)}{x(x+1)\ldots(x+n-1)}\,\frac{\overset{n}{P}_1 x+\overset{n}{P}_2 x^2+\ldots+\overset{n}{P}_{k-1}x^{k-1}}{\overset{n}{P}_1 \alpha+\overset{n}{P}_2 \alpha^2+\ldots+\overset{n}{P}_{k-1}\alpha^{k-1}+\ldots+\overset{n}{P}_n \alpha^n},$$

worin $\alpha$ eine vor der Hand willkürliche Grösse bezeichnet; wählen wir dieselbe positiv und lassen im Nenner die mit $\alpha^k, \alpha^{k+1}, \ldots \alpha^n$ behafteten Glieder weg, so beträgt der vorige Ausdruck weniger als

$$\frac{1}{x^k}\frac{\alpha(\alpha+1)\ldots(\alpha+n-1)}{x(x+1)\ldots(x+n-1)}\cdot\frac{P_1 x+P_2 x^2+\ldots+P_{k-1}x^{k-1}}{P_1 \alpha+P_1 \alpha^2+\ldots+P_{k-1}\alpha^{k-1}}.$$

Nach dem bekannten Satze, dass der Werth des Bruches

$$\frac{B_1+B_2+B_1+\ldots+B_{k-1}}{A_1+A_2+A_3+\ldots+A_{k-1}}$$

bei positiven $A$ und $B$ eine Mittelgrösse zwischen den einzelnen Brüchen

$$\frac{B_1}{A_1},\ \frac{B_2}{A_2},\ \frac{B_3}{A_3},\ldots\frac{B_{k-1}}{A_{k-1}}$$

ist, folgt nun, dass der letzte Factor des obigen Ausdruckes zwischen der grössten und kleinsten der Potenzen

$$\frac{x}{\alpha},\ \left(\frac{x}{\alpha}\right)^2,\ \ldots\ldots\left(\frac{x}{\alpha}\right)^{k-1},\ \left(\frac{x}{\alpha}\right)^k$$

enthalten ist. Nehmen wir endlich $\alpha<x$, so können wir nach allen diesen Bemerkungen das Ergänzungsglied unter der Form

$$\frac{1}{x^k}\cdot\frac{\alpha(\alpha+1)\ldots\ldots(\alpha+n-1)}{x(x+1)\ldots\ldots(x+n-1)}\cdot\vartheta\left(\frac{x}{\alpha}\right)^k=\frac{\vartheta}{\alpha^k}\cdot\frac{\alpha(\alpha+1)\ldots(\alpha+n-1)}{x(x+1)\ldots(x+n-1)}$$

darstellen, wo $\vartheta$ einen positiven ächten Bruch bezeichnet; hieraus ersieht man augenblicklich, dass bei unendlich wachsenden $n$ der Rest gegen die Grenze Null convergirt und dass folglich die Stirling'sche Reihe in's Unendliche fortgesetzt werden darf, sobald $x$ die Null übersteigt.

IV. Wir betrachten ferner das bestimmte Integral

$$15)\qquad \varphi(x)=\int_0^\infty e^{-xu}(1+u)^{-\mu}\,du,$$

welches mittelst der Substitution $u=\frac{v}{x}-1$ auf die einfachere Form

$$16)\qquad \varphi(x)=x^{\mu-1}e^x\int_x^\infty\frac{1}{v^\mu}e^{-v}\,dv$$

gebracht werden kann. Es würde keine Schwierigkeit haben, die allgemeinen Formeln des Abschnittes I auf den Fall $f(u) = (1+u)^{-\mu}$ anzuwenden, man kommt aber etwas rascher zum Ziele, wenn man den ursprünglichen Integrale erst eine andere Gestalt verschafft. Unter Voraussetzung eines positiven $\mu$ substituiren wir in Nr. 15)

$$\frac{1}{(1+u)^{\mu}} = \frac{1}{\Gamma(\mu)}\int_0^{\infty} e^{-(1+u)\tau}\tau^{\mu-1}\,d\tau$$

und erhalten

$$\varphi(x) = \frac{1}{\Gamma(\mu)}\int_0^{\infty} e^{-xu}\,du \int_0^{\infty} e^{-(1+u)\tau}\,\tau^{\mu-1}\,d\tau$$

$$= \frac{1}{\Gamma(\mu)}\int_0^{\infty} \tau^{\mu-1} e^{-\tau}\,d\tau \int_0^{\infty} e^{-(x+\tau)u}\,du$$

d. i. bei Ausführung der auf $u$ bezüglichen Integration

$$\varphi(x) = \frac{1}{\Gamma(\mu)}\int_0^{\infty} \frac{1}{x+\tau}\,\tau^{\mu-1} e^{-\tau}\,d\tau.$$

Wir benutzen hier die Formel 10) für $\alpha = \tau$, setzen zur Abkürzung

$$Q_m = \frac{1}{\Gamma(\mu)}\int_0^{\infty} \tau(\tau-1)(\tau-2)\dots(\tau-\overline{m-1})\,\tau^{\mu-1} e^{-\tau}\,d\tau$$

$$R_n = \frac{1}{\Gamma(\mu)}\int_0^{\infty} \frac{\tau(\tau-1)(\tau-2)\dots(\tau-\overline{n-1})}{x+\tau}\,\tau^{\mu-1} e^{-\tau}\,d\tau$$

und vergleichen den erhaltenen Werth von $\varphi(x)$ mit dem in Nr. 16) stehenden Ausdrucke; das Resultat lautet:

$$17)\quad \int_x^{\infty} \frac{1}{v^{\mu}} e^{-v}\,dv = x^{1-\mu} e^{-x}\Big\{\frac{1}{x} - \frac{Q_1}{x(x+1)} + \frac{Q_2}{x(x+1)(x+2)} - \dots$$

$$\dots + (-1)^{n-1}\frac{Q_{n-1}}{x(x+1)\dots(x+n-1)}$$

$$+ (-1)^n \frac{R_n}{x(x+1)\dots(x+n-1)}\Big\}.$$

Um beurtheilen zu können, welcher Grenze sich das Ergänzungsglied bei unendlich wachsendem $n$ nähert, setzen wir

$$18)\qquad R_n = \frac{x(x+1)(x+2)\dots(x+n-1)}{1.2.3\dots(n-1)}\,\varrho_n,$$

$$19)\qquad \varrho_n = \frac{1}{\Gamma(\mu)}\int_0^{\infty} \frac{(\tau-1)(\tau-2)\dots(\tau-\overline{n-1})}{1.2\dots(n-1)}\,\frac{\tau^{\mu}}{x+\tau}\,e^{-\tau}\,d\tau$$

und zerlegen das vorstehende Integral in zwei Integrale, nämlich

$$\varrho_n = \frac{1}{\Gamma(\mu)}\int_0^n \frac{(\tau-1)(\tau-2)\ldots(\tau-\overline{n-1})}{1.2.\ldots.(n-1)} \frac{\tau^\mu}{x+\tau} e^{-\tau}\, d\tau$$

$$+\frac{1}{\Gamma(\mu)}\int_n^\infty \frac{(\tau-1)(\tau-2)\ldots(\tau-\overline{n-1})}{1.2.\ldots.(n-1)} \frac{\tau^\mu}{x+\tau} e^{-\tau}\, d\tau$$

$$= A_n + B_n.$$

Im ersten Integrale ist $n > \tau$ und folglich der Ausdruck

$$\frac{(\tau-1)(\tau-2)\ldots(\tau-\overline{n-1})}{1.2\ldots.(n-1)}$$

ein positiver oder negativer ächter Bruch, wie schon in Nr. II bewiesen wurde; demnach liegt $A_n$ zwischen

$$+\frac{1}{\Gamma(\mu)}\int_0^n \frac{\tau^\mu}{x+\tau} e^{-\tau}\, d\tau \text{ und } -\frac{1}{\Gamma(\mu)}\int_0^n \frac{\tau^\mu}{x+\tau} e^{-\tau}\, d\tau.$$

Diese Grenzen werden weiter, wenn man im Nenner $x+\tau$ das positive $x$ weglässt, und gleichzeitig das Integrationsintervall auf 0 bis $\infty$ ausdehnt; man kann daher

$$A_n = \frac{\vartheta}{\Gamma(\mu)}\int_0^\infty \tau^{\mu-1} e^{-\tau}\, d\tau = \vartheta \tag{20}$$

setzen, wo $\vartheta$ einen positiven oder negativen ächten Bruch bezeichnet. Diese Schlüsse gelten für jedes noch so grosse $n$ und demnach ist auch $\mathit{Lim}\, A_n$ zwischen $-1$ und $+1$ enthalten.

Das zweite Integral stellen wir in folgender Form dar

$$B_n = \frac{\vartheta}{\Gamma(\mu)}\int_n^\infty \frac{(\tau-1)(\tau-2)\ldots(\tau-\overline{n-1})}{1.2\ldots.(n-1)} \frac{1}{x+\tau} \tau^\mu e^{-\alpha\tau} e^{-\beta\tau}\, d\tau$$

und verstehen unter $\alpha$ und $\beta$ zwei positive ächte Brüche, deren Summe $=1$ ist. Lassen wir im Nenner $x+\tau$ das positive $\tau$ weg und setzen statt $\tau^\mu e^{-\alpha\tau}$ den Maximalwerth dieses Ausdrucks nämlich $\left(\frac{\mu}{\alpha e}\right)^\mu$, so erhalten wir, da die übrigen Factoren unter dem Integralzeichen positiv sind, einen zu grossen Integralwerth und es ist daher

$$B_n = \frac{\vartheta'}{x\,\Gamma(\mu)}\left(\frac{\mu}{\alpha e}\right)^\mu \int_n^\infty \frac{(\tau-1)(\tau-2)\ldots(\tau-n-1)}{1.2\ldots.(n-1)} e^{-\beta\tau} d\tau,$$

$$1 > \vartheta' > 0.$$

Mittelst der Substitution $\tau = u + n$ wird hieraus

$$B_n = \frac{\vartheta'}{x\,\Gamma(\mu)}\left(\frac{\mu}{\alpha e}\right)^\mu e^{-\beta n}\, C_n, \tag{21}$$

wobei zur Abkürzung

$$22)\qquad C_n = \int_0^\infty \frac{(u+1)(u+2)\dots(u+n-1)}{1.2.3\dots n} e^{-\beta u}\, du$$

gesetzt worden ist. Der vorstehende Ausdruck besitzt die Eigenschaft

$$C_{n+1} - C_n = \int_0^\infty \frac{u(u+1)(u+2)\dots(u+n-1)}{1.2.3\dots n} e^{-\beta u}\, du$$

$$= e^{-\beta} \int_{-1}^\infty \frac{(v+1)(v+2)\dots(v+n)}{1.2\dots n} e^{-\beta v}\, dv,$$

wie mittelst der Substitution $u = v + 1$ leicht findet. Zerlegt man das Integral in zwei andere von $v = 0$ bis $v = \infty$ und von $v = -1$ bis $v = 0$, so ist das erste identisch mit $C_{n+1}$; im zweiten kann man die Substitution $v = -w$ anwenden und erhält

$$C_{n+1} - C_n = e^{-\beta} \left\{ C_{n+1} + \int_0^1 \left(1 - \frac{w}{1}\right)\left(1 - \frac{w}{2}\right)\dots\left(1 - \frac{w}{n}\right) e^{+\beta w}\, dw \right\}$$

oder

$$23)\quad \frac{C_{n+1}}{C_n} = \frac{e^\beta}{e^\beta - 1} + \frac{1}{(e^\beta - 1)\, C_n} \int_0^1 \left(1 - \frac{w}{1}\right)\dots\left(1 - \frac{w}{n}\right) e^{+\beta w}\, dw.$$

Aus Nr. 22) ersieht man, dass $C_n$ mehr beträgt als

$$\int_0^\infty \frac{u^{n-1}}{1.2\dots(n-1)} e^{-\beta u}\, du = \frac{1}{\beta^n},$$

der letzte Ausdruck auf der rechten Seite von Nr. 23) ist daher kleiner als

$$\frac{\beta^n}{e^\beta - 1} \int_0^1 \left(1 - \frac{w}{1}\right)\left(1 - \frac{w}{2}\right)\dots\left(1 - \frac{w}{n}\right) e^{\beta w}\, dw$$

und hieraus schliesst man leicht, dass sich derselbe für unendlich wachsende $n$ der Grenze Null nähert; es ist daher

$$Lim\, \frac{C_{n+1}}{C_n} = \frac{e^\beta}{e^\beta - 1}$$

und

$$Lim\, \frac{e^{-\beta(n+1)}\, C_{n+1}}{e^{-\beta n}\, C_n} = \frac{1}{e^\beta - 1}.$$

Wählt man den positiven ächten Bruch $\beta > l\, 2$ (z. B. $\beta = 0,8$, $\alpha = 0,2$), so beträgt die rechte Seite weniger als die Einheit; nach dem bekannten Satze, dass $Lim\, \psi(n) = 0$ wenn $Lim\, \frac{\psi(n+1)}{\psi(n)} < 1$ ist, folgt dann

$$Lim\, (e^{-\beta n}\, C_n) = 0$$

und nach Nr. 21)

$$24)\qquad Lim\, B_n = 0.$$

Die in Nr. 20) und 24) verzeichneten Gleichungen geben zu erkennen, dass $Lim\, \varrho_n = Lim\,(A_n + B_n)$ zwischen $-1$ und $+1$ enthalten ist; hieraus schliesst man nach Nr. 18)

$$Lim\, R_n = 0 \text{ für } x > 0,$$

und daher ist nach Nr. 17)

$$25)\quad \int_x^\infty \frac{1}{v^\mu} e^{-v}\, dv = \frac{1}{x^\mu} e^{-x} \left\{1 - \frac{Q_1}{x+1} + \frac{Q_2}{(x+1)(x+2)} - \dots \right\}.$$

Führt man in der für $Q_m$ angegebenen Formel die auf $\tau$ bezügliche Integration aus und benutzt die Crelle'sche Facultätenbezeichnung

$$\mu(\mu+1)(\mu+2)\dots(\mu+k-1) = (\mu, +1)^k,$$

so hat man für $Q_m$ die vollständig entwickelte Formel

$$26)\quad Q_m = (\mu, +1)^m - \overset{m}{P}_{m-1} (\mu, +1)^{m-1} + \overset{m}{P}_{m-2} (\mu, +1)^{m-2} - \dots\dots$$

und z. B., nach Potenzen von $\mu$ geordnet,

$$Q_1 = \mu, \quad Q_2 = \mu^2, \quad Q_3 = \mu^3 + \mu, \quad Q_4 = \mu^4 + 4\mu^2 - \mu,$$
$$Q_5 = \mu^5 + 10\mu^3 - 5\mu^2 + 8\mu \text{ u. s. w.}$$

Die Gleichung 25) enthält die Lösung einer Aufgabe, womit sich Legendre in Cap. XVII des 2. Bandes seines *Traité des fonctions elliptiques* beschäftigt und von welcher er sagt, dass sie besondere Schwierigkeiten darbiete. Es ist dies die Entwickelung des Integrales

$$\Gamma(\alpha, x) = \int_0^x \left(l\, \frac{1}{u}\right)^{\alpha-1} du$$

oder, wenn $u = e^{-v}$ und $x = e^{-y}$ substituirt wird, des gleichgeltenden Integrales

$$\Gamma(\alpha, x) = \int_y^\infty v^{\alpha-1} e^{-v}\, dv, \quad y = l\,\frac{1}{x}.$$

Man findet zwar leicht genug die nach steigenden Potenzen von $y$ fortgehenden Reihen

$$\Gamma(\alpha, x) = \Gamma(\alpha) - \frac{y^\alpha}{\alpha} + \frac{1}{1}\,\frac{y^{\alpha+1}}{\alpha+1} - \frac{1}{1.2}\,\frac{y^{\alpha+2}}{\alpha+2} + \dots$$

und*)

*) Legendre gelangt zur zweiten Reihe mit Hülfe einer Differentialgleichung; ein kürzerer Weg ist folgender. In der Gleichung

$$\Gamma(\alpha, x) = \int_0^\infty v^{\alpha-1} e^{-v} dv - \int_0^y v^{\alpha-1} e^{-v} dv = \Gamma(\alpha) - \int_0^y v^{\alpha-1} e^{-v}\, dv$$

setze man $v = y(1-w)$; diess giebt zunächst

$$\Gamma(\alpha, x) = \Gamma(\alpha) - y^\alpha e^{-y} \int_0^1 (1-w)^{\alpha-1} e^{yw}\, dw.$$

Entwickelt man jetzt $e^{yw}$ in die bekannte, nach Potenzen von $yw$ fortschreitende Reihe und integrirt die einzelnen Glieder nach der Formel

$$\int_0^1 (1-w)^{\alpha-1} w^m\, dw = \frac{1.2.3\dots m}{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)\dots(\alpha+m)},$$

so erhält man augenblicklich das erwähnte Resultat.

$$\Gamma(\alpha, x) = \Gamma(\alpha) - x\left(\frac{y^\alpha}{\alpha} + \frac{y^{\alpha+1}}{\alpha(\alpha+1)} + \frac{y^{\alpha+2}}{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)} + \ldots\right),$$

aber man kann von diesen Entwickelungen in dem Falle keinen praktischen Gebrauch machen, wo $x$ ein sehr kleiner Bruch, mithin $y$ eine sehr grosse Zahl ist; Legendre sieht sich daher genöthigt, eine halbconvergente Reihe zu benutzen, die nur einen bestimmten, öfters ungenügenden Grad der Genauigkeit zulässt. (Vergl. S. 502 und 503 a. a. O.) Diesem Mangel kann auf folgende Weise abgeholfen werden. Durch theilweise Integration findet man zunächst

$$\Gamma(\alpha, x) = x\left(l\frac{1}{x}\right)^{\alpha-1} + (\alpha-1)\,\Gamma(\alpha-1, x);$$

wendet man diese Formel $k$-mal nach einander an, so erhält man $\Gamma(\alpha, x)$ ausgedrückt durch

$$\Gamma(\alpha-k, x) = \int_0^x \left(l\frac{1}{u}\right)^{\alpha-k-1} du = \int_y^\infty v^{\alpha-k-1} e^{-v}\, dv.$$

Vorausgesetzt, dass man für $k$ die nächste unter $\alpha$ liegende positive Zahl nimmt ($k < \alpha < k+1$), ist $\alpha - k - 1$ ein negativer ächter Bruch etwa $= -\mu$, und nun giebt die Formel

$$26)\quad \int_y^\infty v^{-\mu} e^{-v}\, dv = y^{-\mu} e^{-y}\left\{1 - \frac{Q_1}{y+1} + \frac{Q_2}{(y+1)(y+2)} - \ldots\right\}$$

oder

$$27)\quad \Gamma(1-\mu, x) = \frac{x}{\left(l\frac{1}{x}\right)^\mu}\left\{1 - \frac{Q_1}{l\frac{1}{x}+1} + \frac{Q_2}{\left(l\frac{1}{x}+1\right)\left(l\frac{1}{x}+2\right)} - \ldots\right\}$$

Diese Reihe convergirt immer und sehr stark wenn $x$ ein kleiner Bruch ist.

Aus Nr. 25) erhält man speciell für $\mu = 1$

$$28)\quad \int_x^\infty \frac{1}{v} e^{-v} dv = \frac{1}{v} e^{-x}\left\{1 - \frac{Q_1}{x+1} + \frac{Q_2}{(x+1)(x+2)} - \ldots\right\},$$

$$Q_1 = 1,\ Q_2 = 1,\ Q_3 = 2,\ Q_4 = 4,\ Q_5 = 14,\ Q_6 = 38, \ldots,$$

womit eine neue Formel zur Berechnung des Integrallogarithmus gegeben ist. — Für $\mu = \frac{1}{2}$ hat man

$$29)\quad \int_x^\infty \frac{1}{\sqrt{v}} e^{-v}\, dv = \frac{1}{\sqrt{x}}\left\{1 - \frac{Q_1}{x+1} + \frac{Q_2}{(x+1)(x+2)} - \ldots\right\}$$

$$Q_1 = \frac{1}{2},\ Q_2 = \frac{1}{4},\ Q_3 = \frac{5}{8},\ Q_4 = \frac{9}{16},\ Q_5 = \frac{129}{32}, \ldots,$$

oder auch, wenn $v = t^2$ und $x^2$ für $x$ gesetzt wird

$$30)\quad \int_x^\infty e^{-t^2} dt = \frac{1}{2x} e^{-x^2}\left\{1 - \frac{Q_1}{x^2+1} + \frac{Q_2}{(x^2+1)(x^2+2)} - \ldots\right\}$$

Diese neue Formel zur Berechnung der Kramp'schen Transcendente hat vor der gewöhnlichen, nach Potenzen von $\frac{1}{x}$ fortgehenden halbconvergenten Reihe den Vorzug der immerwährenden Convergenz; für $x=3$ geben die ersten drei Glieder

$$\int_3^\infty e^{-t^2}\,dt = 0{,}00001958,$$

was von dem genaueren Werthe 0,000019577 wenig genug differirt.

V. Mit einer kleinen Modification ist das bisherige Verfahren auch auf das Integral

$$e^{xi}\int_0^\infty e^{-xui}(1+u)^{-\mu}\,du$$

anwendbar, worin $i$ wie gewöhnlich $\sqrt{-1}$ bedeutet. Durch die Substitution $u=\frac{v}{x}-1$ erhält man einerseits dafür

$$x^{\mu-1}\,e^{xi}\int_x^\infty \frac{1}{v^\mu}\,e^{-vi}\,dv;$$

andererseits findet man durch dieselben Umwandlungen wie in Nr. IV, dass das obige Integral dem folgenden gleich ist:

$$\frac{1}{\Gamma(\mu)}\int_0^\infty \frac{1}{xi+\tau}\,\tau^{\mu-1}\,e^{-\tau}\,d\tau = -\frac{i}{\Gamma(\mu)}\int_0^\infty \frac{1}{x-\tau i}\,\tau^{\mu-1}\,e^{-\tau}\,d\tau.$$

Die Vergleichung beider Formen giebt

$$31)\qquad \int_x^\infty \frac{1}{v^\mu}\,e^{-vi}\,dv = -\frac{i\,x^{1-\mu}\,e^{-xi}}{\Gamma(\mu)}\int_x^\infty \frac{1}{x-\tau i}\,\tau^{\mu-1}\,e^{-\tau}\,d\tau$$

und hieraus folgt durch Identificirung der reellen, sowie der imaginären Partieen

$$32)\qquad \int_x^\infty \frac{\cos v}{v^\mu}\,dv = \frac{x^{1-\mu}}{\Gamma(\mu)}\int_0^\infty \frac{\tau\cos x - x\sin x}{x^2+\tau^2}\,\tau^{\mu-1}\,e^{-\tau}\,d\tau,$$

$$33)\qquad \int_x^\infty \frac{\sin v}{v^\mu}\,dv = \frac{x^{1-\mu}}{\Gamma(\mu)}\int_0^\infty \frac{\tau\sin x + x\cos x}{x^2+\tau^2}\,\tau^{\mu-1}\,e^{-\tau}\,d\tau.$$

Zur Entwickelung des in Nr. 31) vorkommenden Integrales

$$\int_0^\infty \frac{1}{x-\tau i}\,\tau^{\mu-1}\,e^{-\tau}\,d\tau$$

kann man sich der Formel 10) für $\alpha=-\tau i$ bedienen, weil diese als eine identische Gleichung betrachtet werden kann und daher auch für imaginäre $\alpha$ gültig bleiben muss. Dabei erhebt sich aber eine kleine Schwierigkeit hinsichtlich des Restes, den man leicht auf folgende Form bringt

$$\cdot \frac{1.2.3\ldots(n-1)}{x(x+1)(x+2)\ldots(x+n-1)}\,\frac{\tau i\,.\,\varrho\,(\cos\vartheta + i\sin\vartheta)}{x-\tau i},$$

$$\varrho = \sqrt{\left(1+\frac{\tau^2}{1^2}\right)\left(1+\frac{\tau^2}{2^2}\right)\left(1+\frac{\tau^2}{3^2}\right)\left(1+\frac{\tau^2}{(n-1)^2}\right)}.$$

Wenn nämlich $n$ in's Unendliche wächst, so convergirt der erste Bruch gegen die Grenze Null, ferner wird

$$Lim\,\varrho = \sqrt{\left(1+\frac{\tau^2}{1^2}\right)\left(1+\frac{\tau^2}{2^2}\right)\ldots} = \sqrt{\frac{e^{\pi\tau}-e^{\pi\tau}}{2\pi\tau}},$$

und folglich hat der Rest immer die Null zur Grenze, wenn $\tau$ eine endliche Grösse bleibt. Daraus folgt aber nicht, dass auch das Restintegral verschwinden müsse; in der That besteht dasselbe aus zwei Factoren, von denen der eine, wie vorhin, gegen die Null convergirt, der andere aber unendlich wird wegen

$$\int_0^\infty \sqrt{\frac{e^{\pi\tau}-e^{\pi\tau}}{2\pi\tau}}\,\tau^{\mu-1}\,e^{-\tau}\,d\tau = \infty\,.$$

Es bedarf daher einer kleinen Modification des Verfahrens, wenn eine convergente Reihe erlangt werden soll.

In der Gleichung 31) nehmen $x = kz$ und substituiren rechter Hand $\tau = kt$; wir erhalten dann

$$34)\quad \int_{kz}^\infty \frac{1}{v^\mu}\,e^{-vi}\,dv = -\frac{iz^{1-\mu}\,e^{-kzi}}{\Gamma(\mu)}\int_0^\infty \frac{1}{z-ti}\,t^{\mu-1}\,e^{-kt}\,dt.$$

Das Integral rechter Hand entwickeln wir mit Hülfe der Formel 10) indem wir

$$35)\quad \frac{1}{\Gamma(\mu)}\int_0^\infty ti\,(ti+1)\,(ti+2)\ldots(ti+m-1)\,t^{\mu-1}\,e^{-kt}\,dt = H_m + iK_m\,.\,.$$

setzen; die Entwickelung ist

$$37)\qquad \frac{1}{\Gamma(\mu)}\int_0^\infty \frac{1}{z-ti}\,t^{\mu-1}\,e^{-kt}\,dt$$

$$= \frac{1}{z} + \frac{H_1+iK_1}{z(z+1)} + \frac{H_2+iK_2}{z(z+1)(z+1)} + \ldots + \frac{H_n+iK_n}{z(z+1)\ldots(z+n-1)}$$

$$+ \frac{1}{\Gamma(\mu)}\int_0^\infty \frac{ti\,(ti+1)\ldots(ti+n-1)}{z(z+1)\ldots(z+n-1)}\,\frac{t^{\mu-1}\,e^{-kt}}{z-ti}\,dt.$$

Das Ergänzungsglied, welches $R_n$ heissen möge, bringt man leicht auf die Form

$$R_n = \frac{1.2.3\ldots.(n-1)}{z(z+1)\ldots(z+n-1)}\cdot\frac{\varrho_n}{\Gamma(\mu)},$$

$$\varrho_n = \int_0^\infty \sqrt{\left(1+\frac{t^2}{1^2}\right)\left(1+\frac{t^2}{2^2}\right)\ldots\left(1+\frac{t^2}{(n-1)^2}\right)}\cdot\frac{(z+ti)(\cos\vartheta+i\sin\vartheta)}{z^2+t^2}\,t^\mu\,e^{-kt}\,dt,$$

und man erkennt hieraus, dass $Lim\, R_n = 0$ wird bei jedem positiven $z$, sobald $Lim\, \varrho_n$ irgend eine endliche Grösse bleibt. Das Letztere ist aber der Fall wenn das Integral

$$\int_0^\infty \sqrt{\left(1+\frac{t^2}{1^2}\right)\left(1+\frac{t^2}{2^2}\right)\cdots\left(1+\frac{t^2}{(n-1)^2}\right)}\,.\, t^\mu e^{-kt}\, dt$$

nicht unendlich wird. Der Werth desselben beträgt nun weniger als

$$\int_0^\infty \sqrt{\frac{e^{\pi t}-e^{-\pi t}}{2\pi t}}\, t^\mu e^{-kt}\, dt = \int_0^\infty \sqrt{\frac{1-e^{-2\pi t}}{2\pi t}}\, t^\mu e^{-(k-\frac{1}{2}\pi)t}\, dt$$

und der Werth des letzten Integrales ist ohne Zweifel eine endliche Grösse, sobald $k$ mehr als $\frac{1}{2}\pi$ beträgt. Unter diesen Bedingungen kann jetzt die Reihe in Nr. 36) zu einer unendlichen gemacht werden. Nehmen wir speciell $k=2$ und setzen

$$37)\quad \frac{2^{m+1}}{\Gamma(\mu)}\int_0^\infty ti\,(ti+1)\,(ti+2)\ldots(ti+m-1)\, t^{\mu-1} e^{-2t}\, dt = F_m + iG_m,$$

ferner $z=\frac{1}{2}x$ und

$$38)\quad U = \frac{2}{x} + \frac{F_1}{x(x+2)} + \frac{F_2}{x(x+2)(x+4)} + \frac{F_3}{x(x+2)(x+4)(x+6)} + \ldots$$

$$39)\quad V = \frac{G_1}{x(x+2)} + \frac{G_2}{x(x+2)(x+4)} + \frac{G_3}{x(x+2)(x+4)(x+6)} + \ldots$$

so haben wir nach Nr. 34)

$$40)\quad \int_x^\infty \frac{1}{v^\mu} e^{-vi}\, dv = -\, i\left(\frac{x}{2}\right)^{1-\mu} e^{-xi}\,(U+Vi)$$

oder auch durch Trennung der reellen und imaginären Theile

$$41)\quad \int_x^\infty \frac{\cos v}{v^\mu}\, dv = \left(\frac{x}{2}\right)^{1-\mu}(V\cos x - U\sin x).$$

$$42)\quad \int_x^\infty \frac{\sin v}{v^\mu}\, dv = \left(\frac{x}{2}\right)^{1-\mu}(V\sin x + U\cos x).$$

Diese Formeln würden sich leicht auf ähnliche Weise wie die Formel 25) specialisiren lassen, wobei wir uns nicht aufzuhalten brauchen.

VI. Die in Nr. I auseinandergesetzte Methode zur Entwickelung des Integrales

$$43)\quad \varphi(x) = \int_0^\infty e^{-xu} f(u)\, du$$

kann auch auf das etwas complicirtere Integral

$$\psi(x) = \int_0^\infty \frac{e^{-u}-e^{-xu}}{1-e^{-u}} f(u)\, du$$

angewendet werden und führt dann zur Entwickelung des endlichen Integrales von $\varphi(x)$. Die Function $\psi(x)$ genügt nämlich der Differenzengleichung $\psi(x+1)-\psi(x)=\varphi(x)$ und ist daher eine von den unendlich vielen Functionen, die mit $\Sigma\varphi(x)$ zu bezeichnen sein würden; um aber jede Vieldeutigkeit zu vermeiden, wollen wir künftig unter $\Sigma\varphi(x)$ ausschliesslich die mit Hülfe der Gleichung

$$\Sigma\varphi(x)=\int_0^\infty \frac{e^{-u}-e^{-xu}}{1-e^{-u}} f(u)\,du$$

definirte Function verstehen, so dass bei ganzen positiven die Einheit übersteigenden $x$

$$\Sigma\varphi(x)=\varphi(1)+\varphi(2)+\varphi(3)+\ldots+\varphi(x-1)$$

und für $x=1$, $\Sigma\varphi(x)=0$ ist. Die Substitution $e^{-u}=1-t$ giebt nun

$$44)\qquad \Sigma\varphi(x)=\int_0^1 \frac{1-(1-t)^{x-1}}{t} f\left[l\left(\frac{1}{1-t}\right)\right]dt,$$

und man bemerkt auf der Stelle, dass hier ähnliche Transformationen, wie in Nr. I vorgenommen werden können. Wir wollen diese für einige der wichtigsten Fälle durchführen.

VII. Für $f(u)=1$ hat man $\varphi(x)=\frac{1}{x}$ und

$$\Sigma\frac{1}{x}=\int_0^\infty \frac{e^{-u}-e^{-xu}}{1-e^{-u}}\,du$$

oder hiermit identisch

$$\Sigma\frac{1}{x}=\int_0^\infty\left\{\frac{1}{1-e^{-u}}-\frac{1}{u}\right\}e^{-u}\,du+\int_0^\infty\frac{e^{-u}-e^{-xu}}{u}\,du$$
$$-\int_0^\infty\left\{\frac{1}{1-e^{-u}}-\frac{1}{u}\right\}e^{-xu}\,du.$$

Der Werth des ersten Integrales hängt nicht von $x$ ab und ist folglich eine numerische Constante, die $A$ heissen möge; der Werth des zweiten Integrales ist bekanntlich $=lx$; im dritten Integrale substituiren wir $e^{-u}=1-t$ und erhalten

$$\Sigma\frac{1}{x}=A+lx-\int_0^1\left\{\frac{1}{t}-\frac{1}{l\left(\frac{1}{1-t}\right)}\right\}(1-t)^{x-1}\,dt.$$

Zur Entwickelung des Ausdrucks

$$\frac{1}{t}-\frac{1}{l\left(\frac{1}{1-t}\right)}$$

genügt die einfache Bemerkung, dass derselbe unter der Form

$$\frac{1}{t}\int\limits_0^1 [1-(1-t)^v]\,dv = \int\limits_0^1 \frac{1-(1-t)^v}{t}\,dv$$

dargestellt und dass $(1-t)^v$ mittelst des binomischen Satzes in eine Reihe verwandelt werden kann. Demgemäss haben wir zuerst

$$(1-t)^v = 1 - \frac{v}{1}t - \frac{v(1-v)}{1.2}t^2 - \frac{v(1-v)(2-v)}{1.2.3}t^3 - \dots\dots$$
$$- \frac{v(1-v)(2-v)\dots(n-1-v)}{1.2.3\dots.n}t^n$$
$$- \frac{v(1-v)\dots(n-v)}{1.2\dots.n}t^{n+1}\int\limits_0^1 (1-\omega)^n (1-t\omega)^{v-n-1}\,d\omega;$$

daraus erhalten wir, zur Abkürzung

$$46)\qquad a_m = \int\limits_0^1 v(1-v)(2-v)\dots(m-1-v)\,dv$$

setzend, die weitere Entwickelung

$$\frac{1}{t} - \frac{1}{l\left(\frac{1}{1-t}\right)} = \frac{a_1}{1} + \frac{a_2}{1.2}t^2 + \dots + \frac{a_n}{1.2\dots n}t^{n-1}$$
$$+ t^n \int\limits_0^1 \frac{v(1-v)\dots(n-v)}{1.2\dots n}\,dv \int\limits_0^1 (1-\omega)^n (1-t\omega)^{v-n-1}\,d\omega,$$

endlich nach Formel 45)

$$47)\quad \Sigma\frac{1}{x} = A + lx - \frac{1}{1}\frac{a_1}{x} - \frac{1}{2}\frac{a_2}{x(x+1)} - \frac{1}{3}\frac{a_3}{x(x+1)(x+2)} - \dots.$$
$$\frac{1}{n}\frac{a_n}{x(x+1)(x+2)\dots(x+n-1)} - R_n.$$

Der Rest $R_n$ erscheint zunächst in Gestalt des folgenden dreifachen Integrales

$$R_n = \int\limits_0^1 (1-t)^{x-1} t^n\,dt \int\limits_0^1 \frac{v(1-v)\dots(n-v)}{1.2\dots n}\,dv \int\limits_0^1 (1-\omega)^n (1-t\omega)^{v-n-1}\,d\omega$$

und hieraus wird bei anderer Anordnung der Integrationen

$$R_n = \int\limits_0^1 \frac{v(1-v)\dots(n-v)}{1.2\dots n}\,dv \int\limits_0^1 (1-\omega)^n\,d\omega \int\limits_0^1 t^n (1-t)^{x-1} (1-\omega t)^{v-n-1}\,dt.$$

Da $t$ die Grenzen 0 und 1 nicht überschreitet, so ist

$$1 < (1-\omega t)^{v-n-1} < (1-\omega)^{v-n-1}$$

mithin liegt $R_n$ zwischen

$$\int_0^1 \frac{v(1-v)\dots(n-v)}{1.2\dots n}\,dv \int_0^1 (1-\omega)^n\,d\omega \int_0^1 t^n(1-t)^{x-1}\,dt$$

und

$$\int_0^1 \frac{v(1-v)\dots(n-v)}{1.2\dots n}\,dv \int_0^1 (1-\omega)^{v-1}\,d\omega \int_0^1 t^n(1-t)^{x-1}\,dt.$$

Das erste dreifache Integral reducirt sich auf ein Product von drei einfachen Integralen und zwar ist sein Werth

$$\frac{a_{n+1}}{1.2\dots n}\cdot\frac{1}{n+1}\cdot\frac{1.2\dots n}{x(x+1)\dots(x+n)} = \frac{1}{n+1}\,\frac{a_{n+1}}{x(x+1)\dots(x+n)};$$

das zweite Integral geht nach Ausführung der auf $t$ und $\omega$ bezüglichen Integrationen über in

$$\int_0^1 \frac{(1-v)(2-v)\dots(n-v)}{x(x+1)(x+2)\dots(x+n)}\,dv.$$

Setzen wir $1-v=w$ und zur Abkürzung

$$48)\qquad \int_0^1 w(w+1)(w+2)\dots(w+n-1)\,dw = c_n,$$

so gelangen wir zu dem Resultate

$$\frac{1}{n+1}\,\frac{a_{n+1}}{x(x+1)\dots(x+n)} < R_n < \frac{c_n}{x(x+1)\dots(x+n)},$$

und haben Nr. 47) die folgende Gleichung

$$49)\quad \Sigma\frac{1}{x} = A + lx - \frac{1}{1}\,\frac{a_1}{x} - \frac{1}{2}\,\frac{a_2}{x(x+1)} - \dots - \frac{1}{n}\,\frac{a_n}{x(x+1)\dots(x+n-1)}$$
$$- \frac{\varrho_n}{x(x+1)(x+2)\dots(x+n)},$$

worin die mit $\varrho_n$ bezeichnete Grösse der Bedingung

$$\frac{1}{n+1}a_{n+1} < \varrho_n < c_n$$

unterworfen ist.

Um über die Convergenz der obigen Reihe entscheiden zu können, bemerken wir, dass $a_{n+1}$ und $c_n$ positive Grössen sind und dass folglich der Rest sicher verschwindet, sobald der Ausdruck

$$\frac{c_n}{x(x+1)\dots(x+n)} = \frac{1}{x}\int_0^1 \frac{w}{x+1}\cdot\frac{w+1}{x+2}\dots\frac{w+n-1}{x+n}\,dw$$

für unendlich wachsende $n$ die Null zur Grenze hat. Dies ist aber in der That bei jedem positiven $x$ der Fall, weil der vorstehende Ausdruck weniger als

$$\frac{1}{x} \cdot \frac{1}{x+1} \cdot \frac{2}{x+2} \cdots \frac{n}{x+n}$$

beträgt; man darf daher die obige Reihe in's Unendliche fortsetzen.

Die allgemeine Form der Coefficienten $a$ ist nach Nr. 46)

$$a_m = \frac{1}{2} \overset{m}{P}_1 - \frac{1}{3} \overset{m}{P}_2 + \frac{1}{4} \overset{m}{P}_3 - \ldots .$$

mithin

$$a_1 = \frac{1}{2}, \quad a_2 = \frac{1}{6}, \quad a_3 = \frac{1}{4}, \quad a_4 = \frac{19}{18}, \quad a_5 = \frac{9}{4} \text{ u.s.w.}$$

Die Constante $A$ lässt sich auf doppelte Weise bestimmen. Man erhält nämlich einerseits für $x=1$, weil dann $\Sigma \frac{1}{x}$ verschwindet,

$$A = \frac{1}{1} \frac{a_1}{1} + \frac{1}{2} \frac{a_2}{1.2} + \frac{1}{3} \frac{a_3}{1.2.3} + \ldots\ldots$$

anderseits, wenn man für $x$ eine unendlich wachsende gänze positive Zahl setzt,

$$Lim\left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{x-1} - lx\right) = A,$$

woraus hervorgeht, dass $A$ gleich ist der Constanten des Integrallogarithmus: $0{,}5772156 \ldots .$

VIII. Noch einfacher gestaltet sich die Sache in dem Falle $f(u) = u$, $\varphi(x) = \frac{1}{x^2}$ und

$$\Sigma \frac{1}{x^2} = \int_0^\infty \frac{e^{-u} e^{-xu}}{1-e^{-u}} u\, du = \int_0^1 \frac{1-(1-t)^{x-1}}{t} l\left(\frac{1}{1-t}\right) dt$$

$$= \int_0^1 l\left(\frac{1}{1-t}\right) \frac{dt}{t} - \int_0^1 (1-t)^{x-1} l\left(\frac{1}{1-t}\right) \frac{dt}{t}.$$

Da die Reihe für $l\left(\frac{1}{1-t}\right)$ mit $t$ anfängt, so ist der Werth jedes der beiden Integrale eine endliche Grösse; die erste derselben bezeichnen wir mit $A_2$ und entwickeln den Logarithmus in die bekannte Reihe. Durch Integration der einzelnen Glieder erhalten wir

$$50) \quad \Sigma \frac{1}{x^2} = A_2 - \frac{1}{1} \frac{1}{x} - \frac{1}{2} \frac{1}{x(x+1)} - \frac{1}{3} \frac{1.2}{x(x+1)(x+2)} - \ldots\ldots$$
$$- \frac{1}{n} \frac{1.2.3 \ldots (n-1)}{x(x+1) \ldots (x+n-1)} - R_n,$$

worin der Rest durch folgende Formel bestimmt wird

$$R_n = \int_0^1 (1-t)^{x-1} t^n\, dt \int_0^1 \frac{(1-\omega)^n}{(1-t\omega)^{n+1}} d\omega.$$

Ersetzt man $\frac{1}{1-t\omega}$ durch die Einheit, so findet sich

$$R_n > \int_0^1 (1-t)^{x-1} t^n \, dt \int_0^1 \frac{(t-\omega)^n}{(1-t\omega)^{n+1}} d\omega$$

d. i.

$$51)\qquad R_n > \frac{1\,.\,2\,\ldots\,.\,n}{x(x+1)\ldots(x+n)} \frac{1}{n+1};$$

berücksichtigt man andererseits, dass

$$\frac{1-\omega}{1-t\omega} \text{ mithin auch } \left(\frac{1-\omega}{1-t\omega}\right)^n$$

ein positiver ächter Bruch ist, so erhält man

$$R_n < \int_0^1 (1-t)^{x-1} t^n \, dt \int_0^1 \frac{d\omega}{1-t\omega}$$

d. i.

$$R_n < \int_0^1 (1-t)^{x-1} t^{n-1} \, l\left(\frac{1}{1-t}\right) dt.$$

Der Werth des hier vorkommenden Integrales ergiebt sich aus der Gleichung

$$\int_0^1 (1-t)^{x-1} t^{n-1} \, dt = \frac{1\,.\,2\,\ldots\,.(n-1)}{x(x+1)(x+2)\ldots\,.(x+n-1)}$$

durch Differentiation in Beziehung auf $x$, wobei rechter Hand die bekannte Formel $D_x U = U \,.\, D_x l U$ anzuwenden ist; man hat daher

$$52)\quad R_n < \frac{1\,.\,2\,\ldots\,.(n-1)}{x(x+1)\ldots(x+n-1)} \left\{\frac{1}{x} + \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x+2} + \ldots + \frac{1}{x+n-1}\right\},$$

und kann nun die in Parenthesen stehende Summe auf verschiedene Weise kürzer ausdrücken.

Da $R_n$ eine positive Grösse ist, so hängt das Verschwinden von $Lim\, R_n$ (für $n = \infty$) lediglich davon ab, dass die rechte Seite der Ungleichung 52) die Null zur Grenze hat. Hierüber ist leicht auf folgende Weise zu entscheiden. Für jedes positive $z$ gilt bekanntlich die Ungleichung

$$l(1+z) > \frac{z}{1+z} \quad \text{oder} \quad \frac{1}{1+z} < e^{-\frac{z}{1+z}};$$

aus dieser erhält man für $z = \frac{x}{1}, \frac{x}{2}, \ldots \frac{1}{n-1}$ und durch Multiplication aller entstehenden Ungleichungen

$$\frac{1}{x+1} \cdot \frac{1}{x+2} \cdots \frac{n-1}{x+n-1} < e^{-\left(\frac{x}{x+1} + \frac{x}{x+2} + \ldots + \frac{x}{x+n-1}\right)}$$

Setzt man zur Abkürzung

$$1 + \frac{x}{x+1} + \frac{x}{x+2} + \ldots + \frac{x}{x+n-1} = \omega,$$

so hat man sehr einfach

$$R_n < \frac{e}{x^2} \omega e^{-\omega};$$

bei unendlich wachsenden $n$ wird $\omega = \infty$, $Lim\,(\omega e^{-\omega}) = 0$, und mithin auch $Lim\,R_n = 0$. Zufolge dieses Ergebnisses darf die unter Nr. 50) verzeichnete Reihe in's Unendliche fortgesetzt werden; ferner erhält man den Werth von $A_2$ aus der Bemerkung, dass $\Sigma \frac{1}{x^2}$ für $x = 1$ verschwindet, nämlich

$$A_2 = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots,$$

was sich auch für $x = \infty$ findet.

Auf ähnliche Weise kann man neue Formeln für

$$\Sigma \frac{1}{x^3}, \quad \Sigma \frac{1}{x^4}, \text{ etc.}$$

entwickeln, die sämmtlich den nicht unwesentlichen Vortheil bieten, dass die in ihnen vorkommenden Reihen für jedes positive die Null übersteigende $x$ convergiren.

Hinsichtlich der Formel 44) mag noch folgende Bemerkung Platz finden. Wenn $f(0) = 0$ ist, so besitzt die Reihe für $f\left[l\left(\frac{1}{1-t}\right)\right]$ kein constantes Anfangsglied und sei, abgesehen vom Reste,

$$f\left[l\left(\frac{1}{1-t}\right)\right] = \frac{c_1}{1} t + \frac{c_2}{1.2} t^2 + \frac{c_3}{1.2.3} t^3 + \ldots;$$

in diesem Falle erhält man aus Nr. 44) durch Integration der einzelnen Theile

$$\Sigma\varphi(x) = \frac{1}{1}\frac{c_1}{1} + \frac{1}{2}\frac{c_2}{1.2} + \frac{1}{3}\frac{c_3}{1.2.3} + \ldots$$
$$- \frac{1}{1}\frac{c_1}{x} - \frac{1}{2}\frac{c_2}{x(x+1)} - \frac{1}{3}\frac{c_3}{x(x+1)(x+2)} - \ldots$$

Weniger einfach dagegen ist die Sache, sobald $f(0)$ nicht verschwindet, also die Reihe von der Form ist

$$f\left[l\left(\frac{1}{1-t}\right)\right] = c_0 + \frac{c_1}{2} t + \frac{c_2}{1.2} t^2 + \frac{c_3}{1.2.3} t^3 + \ldots$$

Die unmittelbare Integration der einzelnen Theile würde hier auf die Differenz zweier unendlichen Grössen führen; schreibt man dagegen

$$\Sigma\varphi(x) = c_0 \int_0^1 \frac{1-(1-t)^{x-1}}{t} dt + \int_0^1 [1-(1-t)^{x-1}]\left(\frac{c_1}{1} + \frac{c_2}{1.2} t + \ldots\right) dt$$

und berücksichtigt die Bedeutung des ersten Integrales, so hat man

$$\Sigma\varphi(x) = c_0\Sigma\frac{1}{x} + \frac{1}{1}\frac{c_1}{1} + \frac{1}{2}\frac{c_1}{1.2} + \frac{1}{3}\frac{c_3}{1.2.3} + \dots$$
$$-\frac{1}{1}\frac{c_1}{x} - \frac{1}{2}\frac{c_2}{x(x+1)} - \frac{1}{3}\frac{c_3}{x(x+1)(x+2)} - \dots$$

und kann hier statt $\Sigma\frac{1}{x}$ seinen Werth aus Nr. 49) substituiren. Wenn demnach $f\left[l\left(\frac{1}{1-t}\right)\right]$ in eine nach Potenzen von $t$ fortschreitende Reihe verwandelbar ist, so lässt sich $\Sigma\varphi(x)$ immer unter der Form

$$\Sigma\varphi(x) = Const. + \frac{\gamma_1}{x} + \frac{\gamma_2}{x(x+1)} + \frac{\gamma_3}{x(x+1)(x+2)} + \dots$$

darstellen, wie dies nach Nr. I mit $\varphi(x)$ selbst der Fall ist.

IX. Die in Nr. VII gegebene Entwickelung beruht eigentlich auf einer Transformation des Doppelintegrales

$$U = \int_0^\infty\int_0^1 \frac{1-e^{-uv}}{1-e^{-u}} e^{-xu}\, du\, dv;$$

durch Ausführung der auf $v$ bezüglichen Integration erhält man nämlich

$$U = \int_0^\infty \frac{1}{1-e^{-u}}\left\{1 - \frac{1-e^{-u}}{u}\right\} e^{-xu}\, du$$

oder auch

$$U = \int_0^\infty \left\{\frac{1}{1-e^{-u}} - \frac{1}{u}\right\} e^{-u}\, du + \int_0^\infty (e^{-u} - e^{-xu})\frac{du}{u}$$
$$- \int_0^\infty \frac{e^{-u} - e^{-xu}}{1-e^{-u}}\, du$$

d. i.

$$U = A + lx - \Sigma\frac{1}{x}.$$

Nimmt man dagegen in dem ursprünglichen Doppelintegrale die Substitution $e^{-u} = 1 - t$ vor und vergleicht nachher beide Formen von $U$, so gelangt man zu der Gleichung

$$53)\quad \Sigma\frac{1}{x} = A + lx - \int_0^1\int_0^1 \frac{1-(1-t)^v}{t}(1-t)^{x-1}\, dt\, dv,$$

die mit Nr. 45) identisch ist. Zufolge dieser Bemerkung kann man sich veranlasst finden, überhaupt Doppelintegrale von der Form

$$S = \int_0^\infty\int_a^b e^{-xu} f(u,v)\, du\, dv$$

nach dem in Nr. I auseinandergesetzten Verfahren zu behandeln; da hier-

bei etwas principiell Neues nicht vorkommt, so wollen wir den Gegenstand nicht genauer untersuchen und nur einen derartigen Fall betrachten, weil derselbe wieder auf eine Summenformel führt.

Es sei nämlich

$$S = \int_0^\infty\int_0^1 v \frac{1 - e^{-uv}}{1 - e^{-u}} e^{-xu}\, du\, du \tag{54}$$

oder bei Ausführung der ersten Integration

$$S = \int_0^\infty \frac{1}{1 - e^{-u}} \left\{ \frac{1}{2} + \frac{e^{-u}}{u} - \frac{1 - e^{-u}}{u^2} \right\} e^{-xu}\, du.$$

Wir zerlegen dieses Integral folgendermassen:

$$S = \int_0^\infty \left\{ \frac{1}{2} \frac{1}{1 - e^{-u}} + \frac{1}{u(1 - e^{-u})} - \frac{1}{u} - \frac{1}{u^2} \right\} e^{-u} du - \frac{1}{2} \int_0^\infty \frac{e^{-u} - e^{-xu}}{1 - e^{-u}} du$$

$$- \int_0^\infty \left\{ \frac{x - 1}{u} e^{-u} - \frac{e^{-u} - e^{-xu}}{u^2} \right\} du + \int_0^\infty \left\{ x e^{-u} - \frac{e^{-u} - e^{-(x+1)u}}{1 - e^{-u}} \right\} \frac{du}{u}.$$

Der Werth des ersten Integrales hängt nicht von $u$ ab und ist daher eine Constante $C$; das zweite Integral kommt mit $\Sigma \frac{1}{x}$ überein (Nr. VII); das dritte ist

$$\int_1^x dx \int_0^\infty \left\{ \frac{1}{u} e^{-u} - \frac{1}{u} e^{-xu} \right\} du = \int_0^x lx\, dx = x\, lx - x + 1;$$

das letzte Integral hat den Werth

$$\int_0^x dx \int_0^\infty \left\{ \frac{e^{-u}}{u} - \frac{e^{-(x+1)u}}{1 - e^{-u}} \right\} du = \int_0^x dx \frac{dl\, \Gamma(x + 1)}{dx}$$

$$= l\Gamma(x + 1) = lx + l\Gamma(x) = lx + \Sigma lx,$$

wobei $\Sigma lx$ in dem Sinne genommen ist, der überhaupt für $\Sigma \varphi(x)$ angegeben wurde; wir haben demnach

$$S = C - 1 - \frac{1}{2} \Sigma \frac{1}{x} - (x - 1)\, lx + x + \Sigma lx.$$

Substituiren wir ferner $e^{-u} = 1 - t$ in dem ursprünglichen Doppelintegrale 54) und vergleichen beide Formen von $S$, so gelangen wir zu der Gleichung

$$\Sigma lx = 1 - C + (x - 1)\, lx - x + \frac{1}{2} \Sigma \frac{1}{x}$$

$$+ \int_0^1\int_0^1 v \frac{1 - (1 - t)^v}{t} (1 - t)^{x-1}\, dt\, dv;$$

in dieser setzen wir noch für $\Sigma \frac{1}{x}$ seinen Werth aus Nr. 53) und ziehen alle Constanten zu einer einzigen $B$ zusammen; dies giebt

$$55)\quad \Sigma l x = B + \left(x - \frac{1}{2}\right) l x - x - \int_0^1 \int_0^1 \left(\frac{1}{2} - v\right) \frac{1 - (1-t)^v}{t} (1-t)^{x-1}\, dt\, dv.$$

Die Entwickelung des noch übrigen Doppelintegrales hat nicht die mindeste Schwierigkeit, sobald man $(1-t)^v$ nach dem binomischen Satze in eine Reihe verwandelt und deren einzelne Glieder integrirt, wobei der Rest unter derselben Form wie in Nr. VII dargestellt werden möge. Setzt man abkürzend

$$56)\quad b_m = \int_0^1 \left(\frac{1}{2} - v\right) v (1-v)(2-v)\dots(m-1-v)\, dv,$$

so gelangt man auf der Stelle zu folgender Gleichung:

$$57)\quad \Sigma l x = B + \left(x - \frac{1}{2}\right) l x - x - \frac{1}{1}\frac{b_1}{x} - \frac{1}{2}\frac{b_2}{x(x+1)} - \dots$$

$$\dots - \frac{1}{n}\frac{b_n}{x(x+1)(x+2)\dots(x+n-1)} - R_n$$

worin der Rest $R_n$ gleich dem dreifachen Integrale ist:

$$58)\quad R_n = \int_0^1 \int_0^1 (\tfrac{1}{2} - v)(1-t)^{x-1}\, dt\, dv \frac{v(1-v)\dots(n-v)}{1.2\dots n} t^n$$

$$\int_0^1 (1-\omega)^n (1-t\omega)^{v-n-1}\, d\omega.$$

Das Verfahren, mittelst dessen wir früher den Rest zwischen zwei leicht angebbare Grenzen einschlossen, bedarf hier einer kleinen Modification, weil unter dem Integralzeichen ein Factor $(\frac{1}{2} - v)$ vorkommt, der innerhalb des Integrationsintervalles sein Vorzeichen wechselt. Aus demselben Grunde lässt sich auch nicht unmittelbar übersehen, ob $b_m$ positiv oder negativ sein wird; wir unterziehen daher $b_m$ und $R_n$ einer genaueren Betrachtung.

Zerlegt man das Intervall $v = 0$ bis $v = 1$ in die beiden Intervalle 0 bis $\frac{1}{2}$ und $\frac{1}{2}$ bis 1, so zerfällt $b_m$ in zwei Integrale, wobei im ersten $v = u$ gesetzt und im zweiten $v = 1 - u$ substituirt werden möge; beide Integrale erhalten jetzt die nämlichen Grenzen $u = 0$, $u = \frac{1}{2}$, und können daher zusammengezogen werden; dies giebt

$$b_m = \int_0^{\frac{1}{2}} (\tfrac{1}{2} - u)\, u (1-u) \{(2-u)(3-u)\dots(m-1-u)$$

$$- (1+u)(2+u)\dots(m-2+u)\}\, du.$$

Wegen $\frac{1}{2} > u$ ist nun $1 - u > u$ mithin auch $2 - u > 1 + u$, $3 - u > 2 + u$

u.s.w., woraus unmittelbar hervorgeht, dass unter dem Integralzeichen ein positiver Ausdruck steht und folglich $b_m$ positiv ist.

Durch dieselbe Transformation erhält $R_n$ folgende Gestalt

$$1.2.3..n.R_n = \int_0^{\frac{1}{2}}\int_0^1\int_0^1 (\tfrac{1}{2}-u)u(1-u)\left\{\frac{(2-u)...(n-u)}{(1-t\omega)^{1-u}} - \frac{(1+u)...(n-1+u)}{(1-t\omega)^u}\right\} \frac{(1-\omega)^n t^n (1-t)^{x-1}}{(1-t\omega)^n}\, du\, d\omega\, dt$$

Wie vorhin ist hier

$$1-u > u,\ 2-u > 1+u,\ 3-u > 2+u \text{ etc.}$$

mithin

$$(2-u)(3-u)\dots(n-u)\left(\frac{t}{1-t\omega}\right)^{1-u} > (1+u)(2+u)...(n-1+u)\left(\frac{t}{1-t\omega}\right)^u,$$

der Ausdruck

$$F(t) = \frac{(2-u)(3-u)\dots(n-u)}{(1-t\omega)^{1-u}} - \frac{(1+u)(2+u)\dots(n-1+u)}{(1-t\omega)^u}$$

bleibt daher immer positiv und daher ist auch $R_n$ eine positive Grösse. Durch Differentiation in Beziehung auf $t$ ergiebt sich ferner

$$F'(t) = \omega\left\{\frac{(1-u)(2-u)\dots(n-u)}{(1-t\omega)^{2-u}} - \frac{u(1+u)\dots(n-1+u)}{(1-t\omega)^{1+u}}\right\},$$

und hier lässt sich ganz wie vorhin zeigen, dass die in Parenthesen stehende Differenz positiv ist. Daraus folgt, dass $F(t)$ mit $t$ gleichzeitig wächst, also $F(t)$ mehr als $F(0)$ beträgt. Setzen wir nun statt $F(t)$ das kleinere $F(0)$ und zugleich statt $(1-t\omega)^{-n}$ die kleinere Einheit, so erhalten wir

$$1.2.3\dots n.R_n > \int_0^{\frac{1}{2}}\int_0^1\int_0^1 (\tfrac{1}{2}-u)\,u\,(1-u)\,\{(2-u)\dots(n-u) - (1+u)\dots(n-1+u)\}\,(1-\omega)^n t^n (1-t)^{x-1}\, du\, d\omega\, dt$$

d. i. bei Ausführung der Integrationen

$$R_n > \frac{1}{n+1}\frac{b_{n+1}}{x(x+1)(x+2)\dots(x+n)}.$$

Um eine obere Grenze für $R_n$ zu finden, lassen wir in Nr. 58) $\frac{1}{2}$ für $\frac{1}{2}-v$ eintreten und ersetzen gleichzeitig $(1-t\omega)^{v-n-1}$ durch das zu grosse $(1-\omega)^{v-n-1}$; damit gelangen wir zu der Ungleichung

$$R_n < \frac{1}{2}\,\frac{1}{1.2..n}\int_0^1 v(1-v)\dots(n-v)\,dv\int_0^1(1-\omega)^{v-1}\,d\omega\int_0^1 t^n(1-t)^{x-1}\,dt$$

d. i.

$$R_n < \frac{1}{2}\,\frac{c_n}{x(x+1)(x+2)\dots(x+n)},$$

wo $c_n$ dieselbe Bedeutung hat, wie in Nr. VII. Die Gleichung 57) gestaltet sich jetzt zur folgenden

$$59)\quad \Sigma l x = B + \left(x - \frac{1}{2}\right) l x - x - \frac{1}{1}\frac{b_1}{x} - \frac{1}{2}\frac{b_2}{x(x+1)} - \dots\dots$$

$$\dots - \frac{1}{n}\frac{b_n}{x(x+1)\dots(x+n-1)} - \frac{1}{n+1}\frac{\varrho_n}{x(x+1)\dots(x+n)},$$

und darin gilt für $\varrho_n$ die Bedingung

$$60)\quad \frac{1}{n+1} b_{n+1} < \varrho_n < \frac{1}{2} c_n.$$

Wie schon in Nr. VII gezeigt wurde, ist bei unendlich wachsenden $n$

$$Lim \frac{c_n}{x(x+1)\dots(x+n)} = 0,$$

es verschwindet also in Nr. 59) der Rest für $n = \infty$, und daher wird die Reihe convergent.

Zur Bestimmung der Constanten kann man wieder zwei Wege gehen. Man berücksichtigt entweder den Umstand, dass $\Sigma l x = l\Gamma(x)$ für $x = 1$ den Werth Null erhält und hat dann

$$B = 1 + \frac{1}{1}\frac{b_1}{1} + \frac{1}{2}\frac{b_2}{1.2} + \frac{1}{3}\frac{b_3}{1.2.3} + \dots,$$

oder lässt man $x$ in's Unendliche wachsen und findet nach einer bekannten Methode $B = \frac{1}{2} l(2\pi)$.

---

# XVII.

## Ueber Magnetismus.

Von Gustav Roch,

Schüler des polytechnischen Institutes in Dresden.

---

1. Die vorliegende Rechnung ist ein Versuch, die Hypothese Ampères über die Natur des Magnetismus in derselben Weise für eine Theorie des Magnetismus zu benutzen, wie dies von Poisson für die andre Hypothese geschehen ist, nämlich von den Gleichgewichtsbedingungen auszugehen. Es ist mir nicht bekannt, dass je ein Versuch der Art zu bemerkenswerthen Resultaten geführt hätte, wenigstens habe ich in Weber's Abhandlung über Diamagnetismus keine Notiz gefunden, die nur etwas davon vermuthen liesse, und von neuerer Zeit ist mir auch nichts bekannt. Es wird sich zei-

gen, dass die Gleichungen für das magnetische Gleichgewicht eine ganz ähnliche Form haben, wie die, die Poisson aufgefunden hat, und ich habe auch diesen Gang der Rechnung, so weit es möglich war, beibehalten. Eine andre Rechnung lag mir bei der folgenden Arbeit nicht vor.

2. Schon der Art des Gleichgewichts nach, welches für den Magnetismus gefordert wird, unterscheidet sich die Hypothese Ampères von der anderen. Letztere fordert, dass, ähnlich wie dies bei der Berechnung der Vertheilung der Elektricität gefordert wird, die Vertheilung des Magnetismus über jedes magnetische Molekül in der Weise stattfindet, dass sich in keinem Punkte im Innern ein Streben zeigt, weitere Mengen magnetischer Flüssigkeit zu scheiden. Auf der Oberfläche jedes Moleküls findet dies Gleichgewicht nicht mehr statt und es wäre daher nicht nöthig, dass die magnetischen Moleküle, von denen durch seine Elasticität das Fluidum sich immer mehr zu entfernen strebt, im Gleichgewicht wären. Umgekehrt wird im Folgenden angenommen, dass die geschlossnen Ströme, die jedes Molekül umkreissen, vermöge der Inductionskraft und den übrigen Strömen des Magneten im Gleichgewicht sind. Vermöge dieser Bedingung kommt auch ein Fall mit in den Bereich dieser Hypothese, der durch die Poissonsche, wie ich sie nennen will, ganz ausgeschlossen bleibt, nämlich, der eines ganz unmagnetischen Körpers. Offenbar sind Ströme von der Intensität Null unter allen Bedingungen im Gleichgewicht.

3. Ueber die Gestalt der Moleküle und Ströme wird nicht die mindeste Voraussetzung gemacht zu werden brauchen; dies dürfte wohl ein Vorzug dieser Rechnung vor der Poisson's zu sein.

Es lässt sich denken, dass jeder Stromebene sowohl in verschiedenen Richtungen um dasselbe Molekül sich bewegen kann, und die Stellungswinkel der Normale, wenn man sich den Strom eben denkt, und die Intensität müssen vermöge der Gleichgewichtsbedingungen als Functionen der Coordinaten bestimmt werden.

4. Man wird also zunächst die Bedingungen aufsuchen müssen, dass sich der Strom in einer bestimmten Richtung entwickelt, d. h. man wird die Momente in 3 rechtwinklige Achsen die durch einen Punkt im Innern gehen, Null setzen. Wie ich schon früher bemerkte (s. über magnetische Momente), liefert dies nur 2 Bedingungsgleichungen zur Bestimmung der 3 Unbekannten $i\alpha$, $i\beta$, $i\gamma$. Es wird nun gezeigt werden, dass die 3 Gleichgewichtsbedingungen für Verschiebungen gerade die fehlende Gleichung ersetzen werde. Ich muss nun zunächst einige Bemerkungen machen über die Anwendung und resp. Richtigkeit der früher für Momente und Kräfte entwickelten Formeln. Bezeichnet man:

$$1)\qquad q = -v\left(i\alpha\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial x} + i\beta\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial y} + i\gamma\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial z}\right),$$

so war früher angegeben, dass:

$$2)\quad \begin{cases} M_x = \frac{1}{2} v_1 i \left(\beta_1 \frac{\partial q}{\partial z_1} - \gamma_1 \frac{\partial q}{\partial y_1}\right) \\ M_y = \frac{1}{2} v_1 i_1 \left(\gamma_1 \frac{\partial q}{\partial x_1} - \alpha_1 \frac{\partial q}{\partial z_1}\right) \\ M_z = \frac{1}{2} v_1 i_1 \left(\alpha_1 \frac{\partial q}{\partial y_1} - \beta_1 \frac{\partial q}{\partial x_1}\right), \end{cases}$$

wobei die Momente positiv gerechnet sind, die bei der früher fixirten Richtung der Normale von links nach rechts drehen. Doch sind dies nicht mehr die wahren Werthe der Momente, wenn die Ströme so nahe aneinander sind, dass

$$3)\quad U = \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial y_1^2} + \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial z_1^2}$$

einen endlichen Werth hat, indem dann zu jedem der Momente noch ein Correctionsglied hinzukommt, resp.

$$4)\quad \begin{cases} \frac{1}{2} v v_1 i i_1 (\beta \gamma_1 - \gamma \beta_1) U \\ \frac{1}{2} v v_1 i i_1 (\gamma \alpha_1 - \alpha \gamma_1) U \\ \frac{1}{2} v v_1 i i_1 (\alpha \beta_1 - \beta \alpha_1) U. \end{cases}$$

Ist ferner:

$$5)\quad V = \frac{1}{2} v_1 i_1 \left(\alpha_1 \frac{\partial q}{\partial x_1} + \beta_1 \frac{\partial q}{\partial y_1} + \gamma_1 \frac{\partial q}{\partial z_1}\right),$$

so war früher angegeben, dass die Werthe der Componenten der Anziehung gegeben wären durch:

$$6)\quad X = \frac{\partial V}{\partial x_1};\quad Y = \frac{\partial V}{\partial y_1};\quad Z = \frac{\partial V}{\partial z_1}.$$

Die wahren Werthe von $X$ jedoch werden erhalten, wenn diese Werthe vermehrt werden um die Differentialquotienten nach $x_1, y_1, z_1$ von:

$$7)\quad V' = -\frac{1}{2} v v_1 i i_1 (\alpha \alpha_1 + \beta \beta_1 + \gamma \gamma_1) U.$$

5. Ich habe gezeigt, dass man aus den Momenten durch Differentialgleichungen die Kräfte herleiten kann für den Fall, dass $U = 0$ (s. über magnetische Momente). Schreibt man diese Gleichungen in der Form, wie sie durch No. 7) des a. O. gegeben sind, setzt die Werthe 2) ein, so erhält man die Werthe 6) und hat daher die Correktion 7) noch hinzuzufügen.

Von der Richtigkeit der jetzt gemachten Bemerkungen wird man sich leicht überzeugen durch aufmerksame Wiederholung der früheren Entwicklungen, und ich habe dieselben darum jetzt erst gemacht, weil sie wohl nur für diese Zwecke von Nutzen sein dürften, und weil diese Reihenfolge am wenigsten leicht ein Missverständniss über die Giltigkeit der entwickelten Gleichungen eintreten kann. Man wird sich jetzt sehr bald überzeugen können, dass die Differentialgleichungen zwischen Momenten und Kräften in der Form 3) d. a. O. nicht für die in der angegebenen Weise corrigirten Werthe gelten.

Die Correctionswerthe vereinfachen sich sehr bedeutend, da man die-

selben nur auf die Nachbarmoleküle auszudehnen braucht. Es soll im Folgenden von dem constanten Factor $\frac{1}{2} v_1 i_1$ ganz abstrahirt werden, da er die Gleichungen nicht verändert. Anstatt des Volumens $v$ des magnetischen Stromes führen wir das räumliche Volemelement ein: $dx$, $dy$, $dz$, oder $\varrho^2 \sin\psi\, d\psi\, d\Theta\, d\varrho$, multiplicirt mit $k$; $k$ ist $<1$, da die Ströme den Raum nicht stetig erfüllen. Da jeder Strom um ein Molekül kreist, so wird dies Verhältniss dasselbe sein, wie das Volumen der magnetischen Moleküle zum ganzen Raume; es wird daher bei homogenen Körpern $k$ constant sein. Diese Specialisirung schadet aber der Allgemeinheit gar nicht, indem für variable $k$ die Grösse $ki$ den Gesetzen unterliegt, die für $i$ entwickelt werden sollten.

6. Die Nachbarmoleküle des afficirten Punktes $M_1$ mögen einen Theil $B$ des ganzen Magneten ausmachen; der übrige Theil sei $A$. In der Ausdehnung von $B$ kann man aber z. B. $i\alpha$ schreiben.

$$i\alpha = i_1\alpha_1 + \frac{\partial i_1 \alpha_1}{\partial x_1}(x - x_1) + \frac{\partial i_1 \alpha_1}{\partial y_1}(y - y_1) + \frac{\partial i_1 \alpha_1}{d z_1}(z - z_1)$$

Führt man ähnliche Werthe für $i\beta$ und $i\gamma$ in 4) ein, so sieht man, dass die vom constanten Theile dieser Grösse herrührenden Werthe gleich Null sind. Setzt man dann $v = \varrho^2 \sin\psi\, d\psi\, d\Theta$, was jedenfalls zu gross ist, so sieht man, dass vermöge der Potenzen von $\varrho$, die $U$ enthält, die Integrale dieser Ausdrücke von derselben Ordnung sind wie die Dimensionen von $B$, d. h. unendlich klein. Es ist daher gar nicht nöthig, auf die Correktion 4) der Momente Rücksicht zu nehmen.

$V'$ reducirt sich nach 7) auf: $- v\, i\, U$, da $\alpha_1\, d\alpha_1 + \beta_1\, d\beta_1 + \gamma\, d\gamma_1 = 0$.

7. Sollen die bis jetzt aufgeführten Formeln auf $B$ ausgedehnt werden, so ist zu berücksichtigen, dass innerhalb $B$ die Dimensionen der Ströme nicht als verschwindend gegen ihre Entfernung angesehen werden dürfen. Die Volumenelemente müssen also sehr klein sein sogar gegen die Dimensionen der Ströme und es ist daher nicht erlaubt, für $k$ einen Mittelwerth zu nehmen, da ja einige Volumenelemente ganz innerhalb, andre ganz ausserhalb magnetischer Ströme fallen können. Es ist daher wohl möglich, dass man, mit einem constanten $k$ auch innerhalb $B$ rechnend, falsche Resultate erhält. Setzt man aber voraus, dass die Ströme mit einer gewissen Symmetrie um den afficirten Strom vertheilt sind, so werden die mit constantem $k$ berechneten Werthe sich nur durch constante Factoren von den wahren unterscheiden, wie später gezeigt werden soll. Ehe nämlich die Wirkung von $B$ genügend bestimmt werden kann, müssen wir die Wirkung des ganzen Magneten auf einen äusseren oder inneren Punkt auf die einfachste Form bringen.

8. Diese Wirkungen sind im Allgemeinen durch dreifache Integrale gegeben, deren Grenzen die Oberfläche des Magneten liefert. Für einen äussern Punkt dürfen die Integrele ohne Weiteres über den ganzen Magneten ausgedehnt werden, und die Gränzen sind daher unabhängig von $x_1, y_1, z_1$,

den Coordinaten des afficirten Punktes. Man kann daher die Differentiationen, vermöge deren Momente und Kräfte aus $q$ hergeleitet werden, nach ausgeführter Integration bewerkstelligen, und es wäre nur nöthig, einen einfachen Ausdruck für das Integral von $q$, welches wir wieder mit $q$ bezeichnen wollen, zu erhalten.

$$q = -k\int\int\int\left(i\alpha\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial x} + i\beta\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial y} + i\gamma\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial z}\right)dx\,dy\,dz;$$

$$= -k\int\int\int\left(\frac{\partial\frac{i\alpha}{r}}{\partial x} + \frac{\partial\frac{i\beta}{r}}{\partial y} + \frac{\partial\frac{i\gamma}{r}}{\partial z}\right)dx\,dy\,dz$$

$$+ k\int\int\int\left(\frac{\partial i\alpha}{\partial x} + \frac{\partial i\beta}{\partial y} + \frac{\partial i\gamma}{\partial z}\right)\frac{1}{r}\,dx\,dy\,dz.$$

Da es ganz gleichgiltig ist, welche Coordinate als abhängige Variable angesehen wird, so kann im ersten Gliede eine Integration bewerkstelligt werden, z. B.

$$\int\int\int\frac{\partial\frac{i\gamma}{r}}{\partial z}dx\,dy\,dz = -\left(\int\int\frac{i\gamma}{r}dx\,dy\right)_0 + \left(\int\int\frac{i\gamma}{r}dx\,dy\right)_1$$

$$-\left(\int\int\frac{i\gamma}{r}dx\,dy\right)_2 + \left(\int\int\frac{i\gamma}{r}dx\,dy\right)_3 - \text{etc.},$$

wo sich die Indices auf die einzelnen Durchgangsstellen des $z$ durch die vielleicht vielfach gefaltete Oberfläche beziehen, $dy\,dy$ aber ist gleich der Projection des Oberflächenelementes $dw$ auf die Horizontale, und zwar ist sowohl $dx\,dy$ als $dw$ stets positiv. Der Cosinus des Winkels des äusseren Theiles der Normale mit der $z$-Achse ist für die Orte 0, 2, 4 negativ, für 1, 3, 5 positiv, so dass man das dreifache Integral schreiben kann:

$$\int\int\frac{i\gamma}{r}dw\cos n,$$

und sind ebenso $l$, $m$ die Winkel der nach aussen gerichteten Normale mit den positiven Achsen, so ist:

$$8)\qquad q = -k\int(i\alpha\cos l + i\beta\cos m + i\gamma\cos n)\frac{1}{r}\,dw + P$$

$$9)\qquad P = k\int\int\int\left(\frac{\partial i\alpha}{\partial x} + \frac{\partial i\beta}{\partial y} + \frac{\partial i\gamma}{\partial z}\right)\frac{1}{r}\,dx\,dy\,dz.$$

9. Liegt der Punkt im Innern des Magneten, so dürfen die früheren Formeln nur über den Theil $A$ ausgedehnt werden, oder man dehnt sie über den ganzen Magneten aus und zieht die Werthe der Momente oder Kräfte $M'$ oder $K'$, die nach diesen Formeln berechnet werden, ab. Die eigentlichen von $B$ herrührenden Momente oder Kräfte $M''$, $K''$ müssen so berechnet werden, dass $k$ nicht constant innerhalb $B$ angenommen wird.

Vergleicht man die Ausdrücke für Kräfte und Momente, so sieht man, dass die Kräfte $\varrho^4$, die Momente $\varrho^3$ im Nenner enthalten. Setzt man

$v = \varrho^2 \sin\psi\, d\psi\, d\Theta$, so wird klar, dass in den Ausdrücken für die Momente, ausgedehnt über $B$, eine Veränderlichkeit von $i\alpha$, $i\alpha$, $i\gamma$ nur Glieder liefert von der Ordnung der Dimensionen von $B$, und daher weggelassen werden kann. Es ist aber evident, dass die Wirkung lauter gleich intensiver Ströme von gleicher Richtung, wenn dieselben in einer Kugel gleichmässig vertheilt sind, auf ihren Mittelpunkt gleich Null ist.

Berechnen wir nun das Moment derselben Kugel bei constant gedachtem $k$. Es ist dazu nun nöthig, $\frac{\partial q}{\partial x_1}, \frac{\partial q}{\partial y_1}, \frac{\partial q}{\partial z_1}$ zu bilden und die Integrationen auszuführen. Da

$$\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x_1} = -\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x},$$

so ist z. B.:

$$\frac{\partial q}{\partial y_1} = k \int\int\int \left( \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial x\, \partial y} + i\beta \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial y^2} + i\gamma \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial z\, \partial y} \right) dx\, dy\, dz,$$

und die eine Integration kann man ausführen; schreibt man dann:

$dw = \varrho^2 \sin\psi\, d\psi\, d\Theta$, $\cos l = \cos\psi$, $\cos m = \sin\psi \cos\Theta$, $\cos n = \sin\psi \sin\Theta$,

so sieht man, dass nur das mittelste Glied bleibt, und es kommt:

$$\frac{\partial q}{\partial y_1} = -\frac{4\pi k}{3} i_1 \beta_1,$$

indem $i\alpha$, $i\beta$, $i\gamma$ als constant angesehen werden. Es kommt ebenso:

$$10)\quad \left\{ \begin{aligned} \frac{\partial q}{\partial x_1} &= -\frac{4\pi k}{3} i_1 \alpha_1 \\ \frac{\partial q}{\partial y_1} &= -\frac{4\pi k}{3} i_1 \beta_1 \\ \frac{\partial q}{\partial z_1} &= -\frac{4\pi k}{3} i_1 \gamma_1, \end{aligned} \right.$$

wenn $q$ über die Nachbarmoleküle ausgedehnt wird. Aehnliche Werthe hätte man auch erhalten müssen, wenn man $B$ durch eine beliebige krumme Fläche begränzt dachte, z. B. eine gegen den afficirten Punkt excentrische Kugelfläche.*) Dann könnte man $q$ durch Integration bilden und die Werthe rechter Seite von 10) wären die Differentialquotienten dieses Integrales gewesen. Es folgt daraus, dass auch $i_1\alpha_1$, $i_1\beta_1$, $i_1\gamma_1$ als Differentialquotienten eine Function $\varphi_1$ geschrieben werden können:

$$11)\quad \left\{ \begin{aligned} & i_1\alpha_1 = \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1},\quad i_1\beta_1 = \frac{\partial \varphi_1}{\partial y_2},\quad i_1\gamma_2 = \frac{\partial \varphi_1}{\partial z_1} \\ & \text{und ebenso:} \\ & i\alpha = \frac{\partial \varphi}{\partial x},\quad i\beta = \frac{\partial \varphi}{\partial y},\quad i\gamma = \frac{\partial \varphi}{\partial z}. \end{aligned} \right.$$

*) Siehe hierüber das Ende dieser Abhandlung.

Dieser Beweis wird durch eine bald zu machende Bemerkung noch etwas kräftiger gemacht werden, als er so zu sein scheint. Man könnte nämlich einwenden, dass bei der Bildung der Differentialquotienten von $q$, die in die Momente eingehen, $i\alpha, i\beta, i\gamma$ und ebenso $i_1\alpha_1, i_1\beta_1, i_1\gamma_1$ als unabhängig von $x_1\, y_1\, z_1$ angesehen würden und dass es frei stünde, jede Grösse $W$ als partiellen Differentialquotient nach $z_1$ z. B. von

$$Ux_1 + Vy_1 + Wz_1$$

anzusehen.

11. Werden die Werthe 10) in die Momente eingesetzt, so ergiebt sich $M_x = M_y = M_z = 0$. Es dürfen daher die Momente eines Magneten auf einen Strom im Innern nach den früheren Formeln berechnet werden. Rechnet man dazu das von der inducirenden Kraft herrührende Moment, welches jedenfalls auch durch die Formel 2) berechnet werden kann, wenn nur anstatt des Integralwerthes $q$ ein $q'$ eingeführt wird, das für jeden gegebenen Fall zu bestimmen ist, so sind die von den Momenten herrührenden Gleichgewichtsbedingungen:

$$12a)\quad \begin{cases} \beta_1\left(\frac{\partial q}{\partial z_1} + \frac{\partial q'}{\partial z_1}\right) - \gamma_1\left(\frac{\partial q}{\partial y_1} + \frac{\partial q'}{\partial y_1}\right) = 0 \\ \gamma_1\left(\frac{\partial q}{\partial x_1} + \frac{\partial q'}{\partial x_1}\right) - \alpha_1\left(\frac{\partial q}{\partial z_1} + \frac{\partial q'}{\partial z_1}\right) = 0 \\ \alpha_1\left(\frac{\partial q}{\partial y_1} + \frac{\partial q'}{\partial y_1}\right) - \beta_1\left(\frac{\partial q}{\partial x_1} + \frac{\partial q'}{\partial x_1}\right) = 0. \end{cases}$$

Man sieht sofort, dass sich diese Gleichungen auf 2 reduciren, oder auch wenn $q + q' = Q$ gesetzt wird, geschrieben werden kann:

$$12b)\quad \frac{\partial Q}{\partial x_1} = u\alpha_1;\quad \frac{\partial Q}{\partial y_1} = u\beta_1;\quad \frac{\partial Q}{\partial z_1} = u\gamma_1,$$

wobei $u$ eine vorläufig ganz unbestimmte Function der 3 Coordinaten, die vermöge der Bedingungen des Gleichgewichts für Verschiebungen bestimmt werden soll.

12. Die Differentiationen, vermöge deren die Kräftecomponenten $X$, $Y$, $Z$ aus den Momenten oder direct aus $q$ hergeleitet werden, sind so zu nehmen, dass $i_1\alpha_1, i_1\beta_1, i_1\gamma_1$ als unabhängig von $x_1, y_1, z_1$ angesehen werden. Wurde nun das Integral $q$ über $B$ ausgedehnt, so war zu schreiben:

$$13)\quad \begin{cases} i\alpha = i_1\alpha_1 + \frac{\partial i_1\alpha_1}{\partial x_1}(x - x_1) + \frac{\partial i_1\alpha_1}{\partial y_1}(y - y_1) + \frac{\partial i_1\alpha_1}{\partial z_1}(z - z_1) \\ i\beta = i_1\beta_1 + \text{etc.} \\ i\gamma = i_1\gamma_1 + \text{etc.} \end{cases}$$

und offenbar sind $i\alpha, i\beta, i\gamma$ unbedingt unabhängig von $x_1, y_1, z_1$. Dies ergiebt sich auch aus 13), aber man sieht ein, dass bei der Berechnung von $X, Y, Z$ aus $q$ oder $M$ wohl zu unterscheiden ist, welche $i_1\alpha_1, i_1\beta_1, i_1\gamma_1$ von $i\alpha, i\beta, i\gamma$ herrühren und welche ursprünglich sind. Die ersteren sind bei allen Differentiationen nach $x_1, y_1, z_1$ als variabel anzusehen.

Dies ist die Bemerkung, die zur Stützung der Gleichungen 11) ver-

sprochen wurde, indem sie zeigt, dass in der That die Grössen $i_1\alpha_1$, $i_1\beta_1$, $i_1\gamma_1$ bei der Bildung von 10) nicht als constant betrachtet wurden; diese Herleitung der Formeln 11) hängt nicht mit den Gleichgewichtsbedingungen zusammen, sondern ist durch die Form der Werthe $M_x$ $M_y$ $M_z$ bedingt. Sie wird also auch im bewegten Zustande richtig bleiben.

13. Die eben gemachte Bemerkung soll nun zur Herleitung des Werthes von $\frac{\partial^2 Q}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2 Q}{\partial y_1^2}+\frac{\partial^2 Q}{\partial z_1^2}$ benutzt und so ihre Anwendung gezeigt werden. Eine weitere wird später folgen.

Man sieht sofort ein, dass bei dieser Rechnung $q'$ gar nicht in Betracht kommt. Durch eine andre Anordnung aber erhält man für diesen Werth die Form:

$$\int k\left(i\alpha\frac{\partial U}{\partial x_1}+i\beta\frac{\partial U}{\partial y_1}+i\gamma\frac{\partial U}{\partial z_1}\right)dv$$
$$=\frac{\partial}{\partial x_1}k\int i\alpha\, U dv+\frac{\partial}{\partial y_1}k\int i\beta\, U dv+\frac{\partial}{\partial z_1}k\int i\gamma\, U dv,$$

wenn $dv$ das Volumelement. Vermöge der Eigenthümlichkeiten von $U$ (s. Nr. 4) und der in $dv$ eingehenden Potenzen von $\varrho$ bei Wahl der Polarcoordinaten $\varrho, \psi, \Theta$ sind die von der Veränderlichkeit von $i\alpha, i\beta, i\gamma$ herrührenden Theile (s. 13) gleich Null, und da $\int U dv = -4\pi$ wie man weiss, so ist:

$$14)\quad \frac{\partial^2 Q}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2 Q}{\partial y_1^2}+\frac{\partial^2 Q}{\partial z_1^2}=-4\pi k\left(\frac{\partial i_1\alpha_1}{\partial x_1}+\frac{\partial i_1\beta_1}{\partial y_1}+\frac{\partial i_1\gamma_1}{\partial z_1}\right),$$

was mit dem von Poisson entwickelten Werthe stimmt, wenn man berücksichtigt, dass der Werth $Q$ bei uns der negative Werth des $Q$ ist was Poisson benutzt.

Ebenso kann der Werth $V'$ aus 7) durch Integration bestimmt werden:

$$V'=-k\int i(\alpha\alpha_1+\beta\beta_1+\gamma\gamma_1)\,U dv,$$

oder

$$15)\quad \begin{cases} V'=+4\pi k i_1, \\ \frac{\partial V'}{\partial x_1}=4\pi k\frac{\partial i_1}{\partial x_1},\quad \frac{\partial V'}{\partial y_1}=4\pi k\frac{\partial i_1}{\partial y_1},\quad \frac{\partial V'}{\partial z_1}=4\pi k\frac{\partial i_1}{\partial z_1}. \end{cases}$$

14. Nach dem früheren ist es nicht richtig, die Werthe $X$, $Y$, $Z$ die von den Nachbarmolekülen kerrühren, selbst unter Benutzung der Correktionen, mit constantem $k$ zu berechnen, sondern man muss vielmehr erwarten, dass anstatt $k$ eine Funktion von $\varrho$, $\psi$, $\Theta$ eingeht, die periodisch nach allen ist und innerhalb 0 und $R$ für $\varrho$ unendlich oft die Werthe 0 und 1 passirt, nie dieselben überschreitend. Man hat aber nicht nöthig, eine derartige verwickelte Funktion einzuführen. Aus den Formeln 10) folgt nämlich, dass die Werthe von $\frac{\partial q}{\partial x_1}, \frac{\partial q}{\partial y_1}, \frac{\partial q}{\partial z_1}$ bezüglich $B$ unabhängig von der Grösse des Kugelradius sind, den man $B$ giebt, und dass man dieselben

Werthe 10) auch erhalten, wenn diese Kugel in einem endlichen Verhältniss zum magnetischen Molekül stände, dem das Theilchen angehört, während es doch unendlich viele derselben umfassen sollte. Man kann aber im magnetischen Molekül allemal eine Kugel construiren, die ganz innerhalb desselben fällt, und die das betrachtete Theilchen mit umfasst; für diese Kugel aber wäre $k=1$ zu setzen und man sieht daher, dass die eigentlichen Werthe von $\frac{\partial q}{\partial x_1}\dots$ aus den früher entwickelten hervorgehen, wenn man darin 1 anstatt $k$ setzt. Diese Betrachtungen gelten übrigens für alle magnetische Theilchen, in die man das Molekül zerlegen kann, mit Ausnahme der in der Oberfläche liegenden, so dass schon auch hier ein Unterschied hervortritt zwischen Oberfläche und Innerem, nur braucht derselbe nicht berücksichtigt zu werden, weil die Oberflächen-Theilchen nur einen unendlich kleinen Theil vom ganzen Volum ausmachen.

15. Es ist jetzt leicht zu sehen, von welcher Form die Correktionen sind, die den Werthen $X$, $Y$, $Z$, wie sie aus den früheren Formeln folgen, beizufügen sind. Es braucht hier nur eine dieser Grössen, z. B. $X$, betrachtet zu werden.

Man berechnet aus 3 Theilen: Die früheren Formeln werden über den ganzen Magneten ausgedehnt, dann der Integralwerth $X'$ bezüglich $B$ subtrahirt, und zuletzt der wahre von $B$ herrührende $X''$ dazugerechnet. Man sieht sofort ein, dass die Differenz $X''-X'$ unabhängig von der Wahl der Gestalt von $B$ sein muss. Diese Bemerkung wird die Betrachtung der Correktionen bedeutend vereinfachen, und auch einige wichtige Relationen entwickeln lassen. Vergleicht man die Formeln 10) mit 14), so sieht man, dass die Formeln 10) nicht die vollständigen Werthe von $\frac{\partial q}{\partial x_1}\dots$ geben. Es müssten nämlich zu diesen Werthen Glieder kommen, die die Differentialquotienten von $i\alpha, i\beta, i\gamma$ enthalten, und Factoren von der Ordnung wie $R$ enthalten. Bei Differentiation nach $x_1, y_1, z_1$ werden diese Glieder endlich. Wählt man aber für $B$ eine um das Molekül concentrische Kugel, so enthalten diese Glieder gar keine bei der Differentiation nach $x_1, y_1, z_1$ als variabel zu betrachtenden Grössen und sie brauchen daher nach der eben gemachten Bemerkung bei der Berechnung von $X''-X'$ gar nicht berücksichtigt zu werden. Diese Berechnung aber kann auf doppelte Weise ausgeführt werden, einmal mit zu Hilfenahme der Differentialgleichung:

$$X=\frac{\partial M_y}{\partial z_1}-\frac{\partial M_z}{\partial y_1}+\alpha_1\left(\frac{\partial^2 Q}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2 Q}{\partial y_1^2}+\frac{\partial^2 Q}{\partial z_1^2}\right)+4\pi k\frac{\partial i_1}{\partial x_1},$$

und des zweite Mal direct aus $V$, welches durch 6) gegeben ist. Nach der eben gemachten Bemerkung aber ist es erlaubt, anstatt

$$M_y,\ M_z,\ \frac{\partial q}{\partial x_1},\ \frac{\partial q}{\partial q_1},\ \frac{\partial q}{\partial z_1}$$

die durch die Formeln 10) gegebenen Werthe zu benutzen, während für

$$\frac{\partial^2 Q}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 Q}{\partial y_1^2} + \frac{\partial^2 Q}{\partial z_1^2}$$

der Werth 14) einzuführen ist, und nicht ein Werth, wie er aus den Formeln 10) zu berechnen wäre. $V$ kann geschrieben werden:

$$V = \Bigg\{ \alpha_1 \left( i\alpha \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial x_1^2} + i\beta \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial y_1 \partial x_1} + i\gamma \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial z_1 \partial x_1} \right)$$

$$+ \beta_1 \left( i\alpha \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial x_1 \partial y_1} + i\beta \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial y_1^2} + i\gamma \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial z_1 \partial y_1} \right)$$

$$+ \gamma_1 \left( i\alpha \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial x_1 \partial z_1} + i\beta \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial y_1 \partial z_1} + i\gamma \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial z_1^2} \right) \Bigg\} dx\, dy\, dz,$$

und es ist daher:

$$X'' - X' = \frac{\partial}{\partial x_1} \Bigg\{ i_1 \alpha_1^2 \iiint \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial x_1^2} dx\, dy\, dz + i_1 \beta_1^2 \iiint \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial y_1^2} dx\, dy\, dz$$

$$+ i_1 \gamma_1^2 \iiint \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial z_1^2} dx\, dy\, dz \Bigg\} (1-k) + 4\pi (1-k) \frac{\partial i_1}{\partial x_1},$$

da sich bei der Integration über eine um den betrachteten Punkt concentrische Kugel die übrigen Glieder heben. Bei der Differentiation nach $x_1$ ist in den Factoren $\alpha_1^2, \beta_1^2, \gamma_1^2$ nur ein $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ als variabel anzusehen nach § 12, doch fällt dies hier nicht ins Gewicht, da

$$\alpha_1\, d\alpha_1 + \beta_1\, d\beta_1 + \gamma_1\, d\gamma_1 = 0,$$

und wegen $\alpha_1^2 + \beta_1^2 + \gamma_1^2 = 1$ kommt:

$$X'' - X' = -\frac{4\pi}{3} (1-k) \frac{\partial i_1}{\partial x_1} + 4\pi (1-k) \frac{\partial i_1}{\partial x_1}.$$

Berechnet man jetzt $X'' - X'$ mit Hilfe der Momente:

$$M_y = \gamma_1 \left( -\frac{4\pi k}{3} i_1 \alpha_1 \right) - \alpha_1 \left( -\frac{4\pi k}{3} i_1 \gamma_1 \right)$$

$$M_z = \alpha_1 \left( -\frac{4\pi k}{3} i_1 \alpha_1 \right) - \beta_1 \left( -\frac{4\pi k}{3} i_1 \alpha_1 \right),$$

so folgt:

$$X'' - X' = \Bigg\{ -\frac{4\pi}{3} \Bigg[ \gamma_1 \frac{\partial i_1 \alpha_1}{\partial z_1} + \beta_1 \frac{\partial i_1 \alpha_1}{\partial y_1} + \alpha_1 \frac{\partial i_1 \alpha_1}{\partial x_1}$$

$$- \alpha_1 \left( \frac{\partial i_1 \alpha_1}{\partial x_1} + \frac{\partial i_1 \beta_1}{\partial y_1} + \frac{\partial i_1 \gamma_1}{\partial z_1} \right) \Bigg] + \alpha_1 \left( \frac{\partial^2 Q}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 Q}{\partial y_1^2} + \frac{\partial^2 Q}{\partial z_1^2} \right\} (1-k)$$

$$+ 4\pi (1-k) \frac{\partial i_1}{\partial x_1}.$$

Vermöge der Gleichungen 10) aber ist $\frac{\partial i_1 \alpha_1}{\partial z_1} = \frac{\partial i_1 \gamma_1}{\partial x_1}$, $\frac{\partial i_1 \alpha_1}{\partial y_1} = \frac{\partial i_1 \alpha_1}{\partial x_1}$, und es entsteht bei Benutzung von 14):

$$X'' - X' = -\frac{4\pi}{3}(1-k)\frac{\partial i_1}{\partial x_1} + 4\pi(1-k)\frac{\partial i_1}{\partial x_1}$$
$$-\frac{8\pi}{3}(1-k)\left(\frac{\partial i_1 \alpha_1}{\partial x_1} + \frac{\partial i_1 \beta_1}{\partial y_1} + \frac{\partial i_1 \gamma_1}{\partial z_1}\right).$$

Aus der Vergleichung dieser beiden Werthe folgt, dass sobald nicht $k=1$ ist:

16) $$\frac{\partial i_1 \alpha_1}{\partial x_1} + \frac{\partial i_1 \beta_1}{\partial y_1} + \frac{\partial i_1 \gamma_1}{\partial z_1} = 0.$$

16. Schreibt man:

$$X'' - X' = 4\pi s \frac{\partial i_1}{\partial x_1}$$

so erhalten die Gleichungen $X=0$, $Y=0$, $Z=0$ die einfache Form:

$$\alpha_1 \frac{\partial u \alpha_1}{\partial x_1} + \beta_1 \frac{\partial u \beta_1}{\partial x_1} + \gamma_1 \frac{\partial u \gamma_1}{\partial x_1} + 4\pi(k+s)\frac{\partial i_1}{\partial x_1} = 0$$
$$\alpha_1 \frac{\partial u \alpha_1}{\partial y_1} + \beta_1 \frac{\partial u \beta_1}{\partial y_1} + \gamma_1 \frac{\partial u \gamma_1}{\partial y_1} + 4\pi(k+s)\frac{\partial i_1}{\partial y_1} = 0$$
$$\alpha_1 \frac{\partial u \alpha_1}{\partial z_1} + \beta_1 \frac{\partial u \beta_1}{\partial z_1} + \gamma_1 \frac{\partial u \gamma_1}{\partial z_1} + 4\pi(k+s)\frac{\partial i_1}{\partial z_1} = 0,$$

oder, da

$$\alpha_1 d\alpha_1 + \beta_1 d\beta_1 + \gamma_1 d\gamma_1 = 0,$$

so folgt für $\frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial y_1}, \frac{\partial u}{\partial z_1}$:

$$\frac{\partial u}{\partial x_1} = -4\pi(k+s)\frac{\partial i_1}{\partial x_1}$$
$$\frac{\partial u}{\partial y_1} = -4\pi(k+s)\frac{\partial i_1}{\partial y_1}$$
$$\frac{\partial u}{\partial z_1} = -4\pi(k+s)\frac{\partial i_1}{\partial z_1},$$

und diese 3 Gleichungen reduciren sich auf:

17) $$u = -4\pi(k+s)\, i_1 + C,$$

wobei $C$ durch unsre Theorie ganz unbestimmt bleibt. Bildet man den Ausdruck $\frac{\partial^2 Q}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 Q}{\partial y_1^2} + \frac{\partial^2 Q}{\partial z_1^2}$ mit Beachtung von 12b) und 17), so folgt wegen 16):

18) $$\frac{\partial \alpha_1}{\partial x_1} + \frac{\partial \beta_1}{\partial y_1} + \frac{\partial \gamma_1}{\partial z_1} = 0$$

Da $u\alpha_1, u\beta_1, u\gamma_1$, Differentialquotienten einer Funktion $Q$, $i_1\alpha_1, i_1\beta_1, i_1\gamma_1$ aber solche einer Funktion $\varphi_1$ sind nach 11), so muss nach 17) auch sein:

19) $$\alpha_1 = \frac{\partial \psi_1}{\partial x_1}; \quad \beta_1 = \frac{\partial \psi_1}{\partial y_1}; \quad \gamma_1 = \frac{\partial \psi_1}{\partial z_1}.$$

Die Gleichungen 14) und 19) lassen sich weiter combiniren zu interessanten Folgerungen.

Die Gleichungen:

$$\frac{\partial^2 \psi_1}{\partial x_1 \partial y_1} = \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial y_1 \partial x_1}; \quad \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial x_1 \partial z_1} = \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial z_1 \partial x_1}; \quad \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial y_1 \partial z_1} = \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial z_1 \partial y_1}$$

verglichen resp. mit

$$\frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial x_1 \partial y_1} = \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial y_1 \partial x_1}; \quad \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial x_1 \partial z_1} = \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial z_1 \partial x_1}; \quad \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial y_1 \partial z_1} = \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial z_1 \partial y_1}$$

liefern die beiden Gleichungen:

$$20) \qquad \frac{\partial i_1}{\partial x_1} : \frac{\partial i_1}{\partial y_1} : \frac{\partial i_1}{\partial z_1} = \alpha_1 : \beta_1 : \gamma_1 .$$

Legt man die Achsen so, dass die $x$-Achse die Normale zum Strome $x_1 y_1 z_1$ bildet, so folgt hieraus:

$$21) \qquad \frac{\partial i_1}{\partial y_1} = 0; \quad \frac{\partial i_1}{\partial z_1} = 0,$$

d. h. die Intensität ist constant in den von den Stromebenen umhüllten Flächen. Aus den Gleichungen 16) und 18) aber folgt auch:

$$22) \qquad \alpha_1 \frac{\partial i_1}{\partial x_1} + \beta_1 \frac{\partial i_1}{\partial y_1} + \gamma_1 \frac{\partial i_1}{\partial z_1} = 0,$$

was sich mit 20) nur verträgt, wenn:

$$23) \qquad \frac{\partial i_1}{\partial x_1} = 0, \quad \frac{\partial i_1}{\partial y_1} = 0, \quad \frac{\partial i_1}{\partial z_1} = 0,$$

d. h. wenn die Intensität constant ist in der Ausdehnung des ganzen Magneten.

Daraus folgt, dass $u$, wie es die Gleichung 17) liefert, constant ist, und es soll der besseren Vergleichbarkeit wegen mit den Formeln von Poisson in der Form

$$24) \qquad u = \frac{4\pi}{3} (h - k)\, i_1$$

geschrieben werden.

Für diesen allgemeinsten Fall des magnetischen Gleichgewichts werden die Gleichungen 12b) möglichst einfach. Ich werde später darauf zurückkommen, dass nicht in allen Fällen diese einfache Form zulässig ist.

17. Wegen der Gleichung 16) vereinfacht sich der Integralwerth von $q$ in 8) zu:

$$25) \qquad q = -k \int \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x} \cos l + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \cos m + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \cos n \right) \frac{dw}{r}.$$

Die 3 Gleichungen 12b) lassen sich in eine zusammenziehen:

$$26) \qquad Q = \frac{4\pi}{3} (h - k)\, \varphi_1 + C_1$$

und die Constante $C_1$ kann ausser Acht gelassen werden, wenn man sich $\varphi_1$ mit derselben behaftet denkt. Die Gleichung 26) wird dadurch zu:

$$27) \quad \frac{4\pi}{3} (h - k)\, \varphi_1 + k \int \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x} \cos l + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \cos m + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \cos n \right) \frac{dw}{r} - q' = 0.$$

Man kann auch 25) noch einfacher schreiben. Ist $\varkappa$ der Winkel der nach aussen gerichteten Normale mit dem Radiusvector, so ist:

$$dw = \varrho^2 \sin\psi \, d\psi \, d\Theta \, . \frac{1}{\cos\varkappa},$$

und setzt man:

$$28) \qquad k\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\cos l + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\cos m + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\cos n\right) = E\cos\varkappa,$$

so wird $q$ zu:

$$29) \qquad q = -\iint E\frac{1}{r}\varrho^2 \sin\psi \, d\psi \, d\Theta,$$

und die Gleichung 27) zu:

$$30) \qquad \frac{4\pi}{3}(h-k)\varphi_1 + \iint \frac{E}{r}\varrho^2 \sin\psi \, d\psi \, d\Theta - q' = 0.$$

18. Für $h=1$ sind diese Formeln identisch mit den von Poisson entwickelten. Die Willkührlichkeit von $h$ zeigt, dass das magnetische Gleichgewicht auf unendlich viele verschiedene Arten eintreten kann. Jedenfalls aber steht dieser Werth in einem gewissen, durch diese Betrachtungen aber nicht entdeckbaren Zusammenhange mit der inneren Beschaffenheit des Körpers. Es ist aber wohl denkbar, dass je nach der Beschaffenheit von $q'$ auch ein anderes $h$ bedingt wird und es braucht desshalb auch $i_1$ proportional zu sein der Inteneität der Induction. Man sieht nämlich leicht ein, dass für ein fest bestimmtes $h$ die Proportionalität durch Gleichung 27) oder 30) verlangt wird, dass aber für variable $k$ dieselbe nicht gefordert wird. Es erklärt also auch die Ampère'sche Hypothese in ihrer einfachsten Form diese durch die Experimente bewiesenen Umstände ohne zu Hilfnahme der von Weber in seinen elektrodynamischen Maassbestimmungen über Diamagnetismus angenommenen Modification. Diese Verschiedenheit der Ampère'schen Hypothese und der von Poisson benutzten ist, wie ich glaube, desshalb bis jetzt nicht aufgefunden worden, weil man die Identität beider Hypothesen schon daraus genügend dargethan glaubte, dass die Wirkung eines geschlossenen Stromes dieselbe ist, wie die einer gecchlossenen magnetischen Fläche.

Ist gar keine inducirende Kraft vorhanden, ist $q'=0$, so ergiebt die Theorie $\varphi=0$, d. h. $i=0$. Dieses Letztere aber kann auch nach unsrer Theorie bei beliebigem $q'$ eintreten. Es ist nämlich in allen Gleichungen der Factor $\frac{1}{2}v_1 i_1$ weggelassen, also seine Verschiedenheit von 0 angenommen worden. Für $i=i_1=0$ aber ist es nicht erlaubt, und es ist dann offenbar auch jedes Molekül des Magneten im Gleichgewicht, wie dies natürlich auch bei ganz unmagnetischen Körpern stattfindet. Unsre Theorie umfasst nach Poisson auch das elektrische Gleichgewicht, indem für $h=k$ die Gleichungen identisch werden mit denen, die von ihm für diesen Fall entwickelt worden sind. Wollte man die elektrische Vertheilung ebenso wie die magnetische, entweder durch eine Vertheilung der Fluide oder

durch elektrische Ströme in den Molekülen erklären, so würde unsre Theorie noch einen bemerkenswerthen Vortheil gegenüber der anderen besitzen. Die von Poisson für das magnetische Gleichgewicht gelieferten Formeln gehen nämlich in die fürs elektrische über für $k=1$ also für eine ganz specielle Beschaffenheit der Substanz, und es wäre sonach in einem des Magnetismus fähigen Körper keine elektrische Vertheilung möglich; diesen Widerspruch enthält die Gleichung 27) und 30) nicht, wenigstens bis jetzt nicht, da noch kein Zusammenhang zwischen den inneren Eigenthümlichkeiten der Substanz und $h$ aufgefunden ist. Die Gleichungen 12a) zeigen übrigens, dass für $h=k$ oder $u=0$ jeder beliebige Strom im Innern im Gleichgewicht ist, dass also ein elektrischer Körper ganz indifferent gegen innere Ströme sich verhält, wenn $k=1$.

19. Die Entwicklung der Gleichung 27) oder 30) kann vermöge der Reihen geschehen, in die jede Funktion zweier Winkel $\psi$ $\Theta$ verwandelt werden kann. Die Funktion $\varphi$ genügt der Gleichung

$$\text{31)} \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2}=0,$$

wie sofort aus 16) folgt.

Man kann die Gleichung 31) in Polarcoordinaten umsetzen, indem man schreibt:

$$x=\varrho \cos\psi,\ y=\varrho \sin\psi \cos\Theta,\ z=\varrho \sin\psi \sin\Theta.$$

Die Gleichung 31) wird so zu:

$$\text{32)} \quad \frac{\partial^2 \varrho\varphi}{\varrho\, \partial \varrho^2}+\frac{\partial\left(\sin\psi \frac{\partial \varphi}{\partial \psi}\right)}{\sin\psi\, d\psi}+\frac{1}{\sin^2\psi}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \Theta^2}=0.$$

Die Funktion $\varphi$ soll nun in eine Reihe

$$\text{33)} \quad \varphi=R_0+R_1+R_2+\dots$$

verwandelt werden, deren Glieder alle einer Differentialgleichung genügen, z. B. $R_n$ der Gleichung:

$$\frac{\partial\left(\sin\psi \frac{\partial R_n}{\partial \psi}\right)}{\sin\psi\, \partial\psi}\ \frac{1}{\sin^2\psi}\frac{\partial^2 R_n}{\partial \Theta^2}+n(n+1)R_n=0,$$

diese Reihenentwicklung ist für jede Funktion zweier Winkel $\psi$ $\Theta$ in der ganzen Ausdehnung 0 bis $\pi$ und 0 bis $2\pi$ und zwar nur eindeutig möglich. Vergleicht man diese Gleichung mit 32), so folgt:

$$\Sigma(n)(n+1)R_n=\varrho\frac{\partial^2 \varrho\varphi}{2}=\Sigma'\left\{\varrho\frac{\partial^2 \varrho R_n}{\partial \varrho^2}\right\},$$

und wegen der Eindeutigkeit der Reihenentwicklung folgt hieraus

$$n(n+1)R_n=\varrho\frac{\partial^2 \varrho R_n}{\partial \varrho^2}$$

woraus folgt, dass $R_n$ von der Form ist:

$$\text{34)} \quad R_n=\varrho^n H_n+\frac{G_n}{\varrho^{n+1}}$$

wo $H_n$ und $G_n$ der Differentialgleichung genügen müssen, und keine Funktionen von $\varrho$ sind.

20. Es ist also $\varphi$ ganz eindeutig entwickelbar und es wäre eine Probe für die Theorie, dass der Werth von $\varphi$ den Gleichungen genügte, die früher für ihn entwickelt sind, dass er für $i = \sqrt{\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right)^2}$ einen constanten Werth ergiebt. Da es nicht möglich ist, die Gleichung 27) allgemein zu lösen, so lässt sich auch die Probe nicht allgemein anstellen. Im Uebrigen lässt sich sicher erwarten, dass sie zutrifft, weil dies Resultat aus gewissen Eigenthümlichkeiten von $Q$ selbst folgte. Wir werden übrigens auch Fälle kennen lernen, wo die Theorie diese Constanz nicht verlangt.

Man sieht aus dem Vorigen, dass ich die Wirkung der Nachbarmoleküle auch durch die Formeln 1) und zwar mit Zugrundelegung rechtwinkliger Coordinaten berechne. Wenn auch dann die Formeln eigentlich unbestimmte Ausdrücke $\frac{0}{0}$ geben, so sieht man doch, dass denselben ein ganz bestimmter Integralwerth entspricht. So ist es z. B. auch möglich, das Integral von

$$\frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial^2 z}$$

auf diese Weise sicher zu berechnen. Nun ist es dann nicht mehr erlaubt, die Elemente so gross zu nehmen, dass sie eine Anzahl grösserer Moleküle umfassten.

21. Ohne jetzt die Ausnahmefälle zu betrachten, in denen nach der jetzt entwickelten Analyse die aufgeführten Reultate nicht mehr zulässig sind, will ich ein ganz specielles Beispiel betrachten, welches zugleich als Ergänzung von No. 19) aufzuführen nöthig ist. Aus der Beschaffenheit der Gleichgewichtsbedingungen ersieht man, dass es viel leichter ist, das $q'$ zu bestimmen, das einer bestimmten Vertheilung des Magnetismus entspricht, als umgekehrt aus $q'$ die letztere zu berechnen. Es soll daher berechnet werden, wie die influenzirende Kraft beschaffen sein muss, damit in einer Kugel alle Molekularströme in parallelen Ebenen liegen. Man wird aus diesem ganz speciellen Beispiele zugleich ersehen, wie in der That die Willkührlichkeit von $h$ zur gleichzeitigen Erklärung des magnetischen und des diamagnetischen Gleichgewichtes genügen kann. Wegen der Eindeutigkeit der Reihenentwicklung 33) kann dem so berechneten $q'$ auch nur diese specielle Vertheilung entsprechen. Die constante Intensität sei $i$. Die Ebene der Ströme werde zur $yz$-Ebene genommen, so ist:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = i, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{\partial \varphi}{\partial z} = 0,$$

also bis auf eine ganz einflussreiche Constante $\varphi = ix$, oder

$$\varphi = i\varrho \cos\psi,$$

und ist $a$ der Kugelradius, so ist

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{a} + \frac{\varrho_1}{a^2} P_1 + \frac{\varrho_1^2}{a^3} P_2 + \text{etc.}$$

$$E = k i \cos\psi,$$

in 30) aber ist anstatt $\varrho^2$ einzusetzen $a^2$. Da nun $\cos\psi$ der Werth von $P_1$ ist für $\psi' = 0$ und da allgemein:

$$\int_0^\pi \int_0^{2\pi} Y_m P_n \sin\psi \, d\psi \, d\Theta = 0$$

$$\int_0^\pi \int_0^{2\pi} Y_n P_n \sin\psi \, d\psi \, d\Theta = \frac{4\pi}{2n+1} Y_{1_n},$$

wo $Y_{1_n}$ der Werth von $Y_n$ ist, wenn man $\psi$ durch $\psi_1$ ersetzt, so folgt, dass aus 30) die Gleichung wird:

$$\frac{4\pi}{3}(h-k) i x_1 + \frac{4\pi}{3} k i x_1 - q' = 0.$$

Es muss daher $q'$ von der Form sein

$$q' = m x_1.$$

Dies tritt z. B. ein, wenn sich die Kugel in einer gegen ihren Durchmesser sehr weiten und langen Spirale, die von einem Strome durchflossen wird, befindet. Das Gleichgewicht besteht, sobald

$$\frac{4\pi}{3} h i = m.$$

Für $h = 1$ wird dies identisch mit der Formel von Poisson und man ersieht daraus, dass die Einführung von $k$ nicht einmal genügt, nach der Poissonschen Hypothese zu erklären, warum die Intensität in den verschiedenen Substanzen beim inducirten Magnetismus so verschieden ist. Die Formel 35) zeigt übrigens, dass, da $h$ willkührlich ist, das magnetische Gleichgewicht für jede beliebige Intensität eintritt, so dass es erklärlich ist, dass verschiedene Substanzen nach Aussen unter denselben Umständen entgegengesetzte Wirkungen ausüben können, indem für ein $h$ von entgegengesetzten Vorzeichen auch $i$ von entgegengesetzten Vorzeichen wird; dies deutet dann entgegengesetzte Richtung aller Molekularströme an. Da $\alpha_1 = 1$, $\beta_1 = \gamma_1 = 0$ und $Q\,(= q + q')$ von der Form $Ax_1$ ist, so muss auch in der That das Gleichgewicht sowohl gegen Drehung als gegen Verschiebung für jede beliebige Intensität bestehen.

Bei der Berechnung des von den Nachbarmolekülen herrührenden Momentes dürfen dieselben als parallel und gleich intensiv angenommen werden (s. Nr. 9 und 10). Da nun sowohl $q$ als $q'$ einer so beschaffnen magnetischen Kugel für jeden beliebigen inneren Punkt nach der letzten Entwickelung gleich $-\frac{4\pi k}{3} i_1 x_1$ ist und bei beliebiger Lage der Achsen

$-\frac{4\pi k}{3} i_1 (\alpha_1 x_1 + \beta_1 y_1 + \gamma_1 z_1)$ sein würde, so folgt die Richtigkeit der Formeln 10) auch für den Fall, dass $B$ eine beliebige gegen die Punkte $x_1 y_1 z_1$ excentrische Kugelfläche sei; nur muss sie alle Nachbarmoleküle umfassen und sehr klein gegen die Dimensionen des Magneten sein. Es sind daher bis auf Grössen von der Ordnung wie die Dimensionen dieser Kugel die Ausdrücke $-\frac{4\pi k}{3} i_1 \alpha_1$, $-\frac{4\pi k}{3} i_1 \beta_1$, $-\frac{4\pi k}{3}$ die Werthe von $\frac{\partial q}{\partial x_1}, \frac{\partial q}{\partial y_1}, \frac{\partial q}{\partial z_1}$ für eine beliebige sphärische Gestalt von $B$ und es sind daher auch nach Nr. 14), wenn nicht eben $k = 1$ ist, die Gleichungen 11) hinreichend begründet.

Die Ausnahmefälle von den jetzt entwickelten Resultaten gedenke ich in einem späteren Aufsatze noch kurz zu erwähnen und dabei zugleich in Etwas auf die Zustände an der Oberfläche zu kommen.

---

# Kleinere Mittheilungen.

---

**XXXIX. Entwickelung einer neuen Reihe für die Gammafunction.**

In der bekannten Gleichung

$$\frac{\Gamma(p)}{p^p} = \int_0^\infty (z e^{-z})^p \, dz$$

nehmen wir zuerst $z = 1 + y$, wodurch

$$1) \qquad \frac{\Gamma(p)}{p^p} = \frac{1}{e^p} \int_{-1}^{\infty} [(1+y) e^{-y}]^p \, dy$$

erhalten wird, und benutzen hierauf die fernere Substitution

$$2) \qquad (1+y) e^{-y} = 1 - x^2.$$

Dem Intervalle $y = -1$ bis $y = +\infty$ entspricht das Intervall $x = -1$ bis $x = +1$, und es ist nur noch $dy$ durch $dx$ auszudrücken. Zu diesem Zwecke geben wir der vorstehenden Gleichung die Form

$$y = x \frac{y}{\sqrt{1-(1+y)e^{-y}}} = x f(y),$$

bei welcher das Theorem von *Lagrange* angewendet werden kann. Man findet mittelst dieser Umkehrungsformel

$$3) \quad \begin{cases} y = \frac{a_1}{1} x + \frac{a_2}{1.2} x^2 + \frac{a_3}{1.2.3} x^3 + \dots\dots \\ a_n = [D^{n-1} f(y)^n] \text{ für } y = 0 \end{cases}$$

und nach **Cauchy's** Untersuchungen*) gilt diese Entwickelung für jedes $x$, dessen Modulus weniger beträgt als der Modulus des kleinsten $x$, welches durch Auflösung der Gleichungen

$$f(y) = y f'(y), \quad x = \frac{1}{f'(y)} = \frac{y}{f(y)}$$

erhalten wird. Im vorliegenden Falle ist leicht zu sehen, dass die genannte Entwickelung für jedes $x$ gilt, dessen absoluter Werth unter der Einheit liegt; bestimmt man daher $dy$ aus Nr. 3) und setzt den Werth von $dy$ nebst dem, was unter Nr. 2) angegeben ist, in die erste Gleichung ein, so hat man die Gleichung

$$\frac{\Gamma(p)}{p^p} = \frac{1}{e^p} \int_{-1}^{+1} (1 - x^2)^p \left(a_1 + \frac{a_2}{1} x + \frac{a_3}{1.2} x^2 + \dots\right) dx$$

oder

$$\frac{\Gamma(p)}{p^p} = \frac{2}{e^p} \int_0^1 (1 - x^2)^p \left(a_1 + \frac{a_3}{1.2} x^2 + \frac{a_5}{1.2.3.4} x^4 + \dots\right) dx.$$

Die Integration der einzelnen Glieder geschieht nach der Formel

$$\int_0^1 (1 - x^2)^p x^{2m} dx = \frac{\Gamma(m + \frac{1}{2}) \Gamma(p + 1)}{2 \Gamma(p + m + \frac{3}{2})}$$

$$= \frac{\sqrt{\pi}}{2} \cdot \frac{1.3.5 \dots (2m-1)}{2^m} \cdot \frac{1}{(p + \frac{1}{2})(p + \frac{3}{2}) \dots (2m + \frac{1}{2})} \cdot \frac{p \, \Gamma(p)}{\Gamma(p + \frac{1}{2})}$$

und führt zu folgendem Resultate

$$\frac{1}{p^p} = \frac{p \sqrt{\pi}}{e^p \, \Gamma(p + \frac{1}{2})} \left\{ \frac{a_1}{p + \frac{1}{2}} + \frac{a_3}{4(p + \frac{1}{2})(p + \frac{3}{2})} + \frac{a_5}{4.8(p + \frac{1}{2})(p + \frac{3}{2})(p + \frac{5}{2})} + \dots \right\}$$

Für $p = q - \frac{1}{2}$, wo $q$ jedenfalls mehr als $\frac{1}{2}$ betragen muss, ergiebt sich hieraus

$$\Gamma(q) = e \sqrt{\pi} \left(\frac{q - \frac{1}{2}}{e}\right)^{q + \frac{1}{2}} \left\{ \frac{a_1}{q} + \frac{a_3}{4q(q+1)} + \frac{a_5}{4.8 \, q(q+1)(q+2)} + \dots \right\}$$

und es dürfte diese Gleichung insofern bemerkenswerth sein, als hier $\Gamma(q)$ durch eine Facultätenreihe ausgedrückt ist.

Zur Berechnung der Coefficienten $a_1$, $a_3$, $a_5$ etc. empfiehlt sich die independente Formel

$$a_n = \left[ D_{n-1} \left( \frac{y}{\sqrt{1 - (1 + y) e^{-y}}} \right)^n \right]^{(y=0)}$$

nicht sonderlich und es ist daher besser, eine recurrirende Formel aufzu-

*) *Moigno, Leçons de calcul différentiel, leçon* 18.

suchen. Aus der Gleichung 2) erhält man zunächst durch Differentiation und Elimination von $e^{-y}$

$$(1-x^2)\,yy' = 2x(1+y),$$

ferner durch $n$malige Differentiation dieser Gleichung

$$(1-x^2)\,D^n(yy') - 2n\,x\,D^{n-1}(yy') - 2n(n-1)\,D^{n-2}(yy') = 2\left(xy^{(n)} + n\,y^{(n-1)}\right);$$

führt man linker Hand die angedeuteten Differentiationen aus, setzt dann $x=0$ und berücksichtigt, dass für diesen Specialwerth $y$ verschwindet und $y^{(m)} = a_m$ wird, so gelangt man zu folgender Recursionsformel

$$(n)_1\,a_1\,a_n + (n)_2\,a_2\,a_{n-1} + (n)_3\,(a_3 - 3\,.\,2\,a_1)\,a_{n-2} + (n)_4\,(a_4 - 4\,.\,3\,a_2)\,a_{n-3} + (n)_5\,(a_5 - 5\,.\,4\,a_3)\,a_{n-4} + \ldots = 2n\,a_{n-1}.$$

Diese liefert der Reihe nach, wenn $a_0 = 0$ gesetzt wird,

$$a_1 = \sqrt{2},\quad a_2 = \frac{4}{3},\quad a_3 = \frac{11}{6}\sqrt{2},\quad a_4 = \frac{344}{45},\quad a_5 = \frac{2307}{108}\sqrt{2},\;\ldots\ldots$$

und es ist daher nach Nr. 4)

$$5)\quad \Gamma(q) = e\sqrt{2\pi}\left(\frac{q-\frac{1}{2}}{e}\right)^{q+\frac{1}{2}}\left\{\frac{1}{q} + \frac{11}{24}\,\frac{1}{q(q+1)} + \frac{2307}{3456}\,\frac{1}{q(q+1)(q+2)} + \ldots\right\}$$

oder auch

$$6)\quad \Gamma(q+1) = e\sqrt{2\pi}\left(\frac{q-\frac{1}{2}}{e}\right)^{q+\frac{1}{2}}\left\{1 + \frac{11}{24}\,\frac{1}{q+1} + \frac{2307}{3456}\,\frac{1}{(q+1)(q+2)} + \ldots\right\}$$

Die in Nr. 2) benutzte Substitution ist übrigens nur ein specieller Fall der allgemeineren

$$(1+y)\,e^{-y} = \left(1 - \frac{x^2}{\varrho}\right)^{\varrho},$$

worin $\varrho$ eine beliebige positive Grösse bezeichnet; nimmt man $\varrho = \infty$, so wird

$$(1+y)\,e^{-y} = e^{-x^2},$$

und dies ist jene bekannte Substitution, welche zuerst von *Laplace* in Nr. 23) der *Théorie analytique des probabilités* angewendet wurde.

O. Schlömilch.

---

**XL. Ueber eine transcendente Function.** Die bekannten Regeln zur Entscheidung der Convergenz oder Divergenz unendlicher Reihen geben zu erkennen, dass die Reihe

$$1 + \frac{u}{1} + \left(\frac{u}{2}\right)^2 + \left(\frac{u}{3}\right)^3 + \left(\frac{u}{4}\right)^4 + \ldots\ldots$$

für jedes endliche $u$ convergirt; ihre Summe ist daher eine bestimmte Function von $u$, die $F(u)$ heissen möge. Bei kleinen $u$ hat es keine Schwierigkeit, die Werthe von $F(u)$ mittelst der Reihe selbst numerisch zu berechnen, bei einigermassen grossen $u$ dagegen, wie z. B. für $u = 100$, wird diese

Operation unausführbar, und es machen sich dann andere Methoden nothwendig. Hierüber mögen ein paar Worte folgen.

Setzt man

$$1)\qquad F(u)=\int_0^\infty e^{uze^{-z}}\,z\,e^{-z}\,dz,$$

verwandelt die Exponentialgrösse $e^{uze^{-z}}$ in die gewöhnliche, nach Potenzen von $uze^{-z}$ fortschreitende Reihe und integrirt die einzelnen Glieder mittelst der Formel

$$\int_0^\infty z^n\,e^{-kz}\,dz=\frac{1\,.\,2\,.\,3\,.\,.\,.\,.\,n}{k^{n+1}},$$

so erhält man augenblicklich

$$2)\qquad f(u)=1+\frac{u}{2^2}+\frac{u^2}{3^3}+\frac{u^3}{4^4}+\ldots\ldots,$$

und es ist daher

$$2)\qquad F(u)=1+u\,f(u).$$

Um weiter $f(u)$ zu transformiren, nehmen wir in Nr. 1) $z=1+y$ und bezeichnen $\frac{u}{e}$ zur Abkürzung mit $v$; dies giebt

$$f(u)=\frac{1}{e}\int_{-1}^\infty e^{v(1+y)e^{-y}}(1+y)\,e^{-y}\,dy.$$

Hier benutzen wir dieselbe Substitution wie im vorigen Aufsatze, nämlich

$$(1+y)\,e^{-y}=1-x^2,$$

woraus für alle ächt gebrochenen $x$ folgt

$$y=\frac{a_1}{1}\,x+\frac{a_2}{1\,.\,2}\,x^2+\frac{a_3}{1\,.\,2\,.\,3}\,x^3+\ldots\ldots;$$

wir erhalten dann

$$f(u)=\frac{1}{e}\int_{-1}^{+1}e^{v(1-x^2)}(1-x^2)\left\{a_1+\frac{a_2}{1}\,x+\frac{a_3}{1\,.\,2}\,x^2+\ldots\ldots\right\}dx$$

oder

$$f(u)=\frac{2}{e}\int_0^1 e^{v(1-x^2)}(1-x^2)\left\{a_1+\frac{a_3}{1\,.\,2}\,x^2+\frac{a_5}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4}\,x^4+\ldots\ldots\right\}dx.$$

Multiplicirt man die eingeklammerte Reihe mit $1-x^2$ und setzt

$$a_1=b_0,\quad \frac{a_3}{1\,.\,2}-a_1=b_2,\quad \frac{a_5}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4}-\frac{a_3}{1\,.\,2}=b_4\ \text{u. s. w.},$$

so hat man nach dem Vorigen und nach Nr. 2)

$$3)\qquad F(u)=1+2u\,e^{v-1}\int_0^1 e^{-vx^2}(b_0+b_2x^2+b_4x^4+\ldots\ldots)\,dx.$$

Die Coefficienten $b_0$, $b_2$, $b_4$ etc. sind vermöge der obigen Formeln bekannt, nämlich:

$$b_0 = \sqrt{2}, \quad b_2 = -\frac{1}{12}\sqrt{2}, \quad b_4 = -\frac{23}{864}\sqrt{2},$$

es handelt sich also nur noch um die Ausführung der angedeuteten Integration. Ist nun $u$, mithin auch $v$, positiv, so setzen wir

$$v x^2 = t, \quad x = \frac{t}{\sqrt{v}}$$

und erhalten

$$F(u) = 1 + \frac{2u}{\sqrt{v}} e^{v-1} \int_0^{\sqrt{v}} e^{-t^2} \left\{ b_0 + \frac{b_2}{v} t^2 + \frac{b_4}{v^2} t^4 + \dots \right\} dt;$$

Die Integration der einzelnen Glieder liefert ein Resultat von der Form

$$4) \qquad F(u) = 1 + \frac{2u}{\sqrt{v}} e^{v-1} \left\{ b_0 J_0 + \frac{b_2 J_2}{v} + \frac{b_4 J_4}{v^2} + \dots\dots \right\},$$

worin

$$5) \qquad J_m = \int_0^{\sqrt{v}} e^{-t^2} t^m \, dt.$$

Das erste der vorkommenden Integrale nämlich

$$J_0 = \int_0^{\sqrt{v}} e^{-t^2} dt = \int_0^{\infty} e^{-t^2} dt - \int_{\sqrt{v}}^{\infty} e^{-t^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2} - \int_{\sqrt{v}}^{\infty} e^{-t^2} dt$$

kann mittelst der Kramp'schen Tafel für die Transcendente

$$\int_w^{\infty} e^{-t^2} dt$$

sehr leicht berechnet werden; ferner giebt die theilweise Integration in Nr. 5)

$$J_m = \frac{\sqrt{v^{m+1}}\, e^{-v} + 2 J_{m+2}}{m+1}$$

oder umgekehrt

$$J_{m+2} = \tfrac{1}{2} \left[ (m+1) J_m - \sqrt{v^{m+1}}\, e^{-v} \right],$$

und hieraus finden sich der Reihe nach $J_2$, $J_4$ etc. Zufolge der angegebenen Coefficientenwerthe und wegen $v = \frac{u}{e}$ hat man nun für positive $u$

$$F(u) = 1 + 2\sqrt{2u}\, e^{\frac{u}{e} - \frac{1}{2}} \left\{ J_0 - \frac{1}{12} J_2 \left(\frac{e}{u}\right) - \frac{23}{864} J_4 \left(\frac{e}{u}\right)^2 - \dots\dots \right\}$$

Bei einigermassen bedeutenden $u$ vereinfacht sich diese Formel. Weil nämlich

$$0 < \int_w^{\infty} e^{-t^2} dt < \frac{1}{2w} e^{-w^2},$$

so kommt der Werth dieses Integrales schon bei mässigen $u$ (z. B. für $u=5$) der Null sehr nahe, sodass $J_0=\frac{1}{2}\sqrt{\pi}$ gesetzt werden darf; gleichzeitig werden $\sqrt{v}\,e^{-v}$, $\sqrt{v^3}\,e^{-v}$ etc. sehr klein und es ist daher näherungsweis

$$J_2=\tfrac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{\pi}}{2},\quad J_4=\frac{1\,.\,3}{2^2}\cdot\frac{\sqrt{\pi}}{2}\ \text{u. s. w.}$$

mithin

$$7)\ F(u)=1+\sqrt{2\pi u}\,e^{\frac{u}{e}-\frac{1}{2}}\left\{1-\frac{1}{24}\left(\frac{e}{u}\right)-\frac{23}{1152}\left(\frac{e}{u}\right)^2-\ldots\ldots\right\}$$

So wird z. B. für $u=100e=271{,}82818$, $v=100$, $\sqrt{v}=10$,

$$0<\int_{10}^{\infty}e^{-t^2}dt<\frac{1}{20}\,e^{-100}<\left(\frac{1}{10}\right)^{44},$$

ferner haben $10\,.\,e^{-100}$ und $10^3\,.\,e^{-100}$ noch keinen Einfluss auf die 40te Decimalstelle, und es sind daher die oben angegebenen Näherungswerthe von $J_0, J_2, J_4$ auf 40 Decimalen richtig. Dies giebt

$$F(100e)=1+10\sqrt{2\pi}\,.\,e^{100}\left\{1-\frac{1}{2400}-\frac{23}{11520000}-\ldots\ldots\right\}$$

oder

$$F(100e)-1=10\sqrt{2\pi}\,.\,e^{100}\,.\,0{,}99958,$$
$$\log\left[F(100e)-1\right]=44{,}82836;$$

demnach beträgt $F(100e)$ eine Einheit mehr als eine aus 45 ganzen Ziffern bestehende Zahl, welche zwischen $67353\,.\,10^{40}$ und $67354\,.\,10^{40}$ enthalten ist.

Bei negativem $u$ wird auch $v$ negativ und nach Nr. 3)

$$F(-u)=1-2u\,e^{-v-1}\int_0^1 e^{+vx^2}\left(b_0+b_2x^2+b_4x^4+\ldots.\right)dx;$$

hier lässt sich zwar die nämliche Substitution $vx^2=t$ anwenden, aber das Resultat ist von keinem Nutzen, weil man weder für

$$\int_w^{\infty}e^{+t^2}dt\ \text{noch für}\ e^{-w}\int_w^{\infty}e^{+t^2}dt$$

eine Tafel besitzt. Wir gehen daher einen anderen Weg.

Durch Reihenentwickelung und Integration der einzelnen Glieder zeigt sich, dass auch

$$f(u)=\int_0^{\infty}e^{uze^{-z}}\,e^{-z}\,dz$$

ist; lässt man hier $-u$ an die Stelle von $u$ treten und benutzt die Substitution $e^{-z}=1-x$, so erhält man

$$f(-u)=\int_0^1 e^{\cdot(-l(1-x))(1-x)}\,dx=\int_0^1(1-x)^u\,(1-x)^{-ux}\,dx.$$

Auf den Ausdruck $(1-x)^{-ux}$ ist zunächst der Binomische Satz anwendbar und zwar wird man die einzelnen Binomialcoefficienten entwickeln und Alles nach Potenzen von $x$ ordnen; dies giebt

$$f(-u)=\int_0^1 (1-x)^u \left\{1+ux^2+\frac{u}{2}x^3+\frac{2u+3u^2}{2.3}x^4+\ldots\ldots\right\}dx.$$

Die einzelnen Glieder können mit Hülfe der Formel

$$\int_0^1 (1-x)^u x^n\,dx=\frac{1.2.3\ldots\ldots n}{(u+1)(u+2)\ldots\ldots(u+n+1)}$$

integrirt werden, wobei zur Abkürzung

$$(u+1)(u+2)(u+3)\ldots\ldots(u+m)=u_{(m)}$$

sein möge; man hat jetzt

$$f(-u)=\frac{1}{u_{(1)}}+\frac{2u}{u_{(3)}}+\frac{3u}{u_{(4)}}+\frac{8u+12u^2}{u_{(5)}}+\frac{30u+60u^2}{u_{(6)}}+\ldots\ldots$$

$$=\frac{1}{u_{(1)}}+\frac{2u}{u_{(3)}}+\frac{23u+15u^2}{u_{(5)}}+\frac{354u+750u^2+180u^3}{u_{(7)}}+\ldots\ldots$$

mithin

$$8)\quad F(-u)=1-\frac{u}{u_{(1)}}-\frac{2u^2}{u_{(3)}}-\frac{23u^2+15u^3}{u_{(5)}}-\frac{354u^2+780u^3+180u^4}{u_{(7)}}-\ldots\ldots$$

Man ersieht hieraus, dass $F(-u)$ bei unendlich wachsenden $u$ sich der Grenze Null nähert. O. Schlömilch.

---

**XLI. Eine Eigenschaft der conjugirten Diametralebenen des Ellipsoids.** Herr Lector Lindmann bewies im Jahre 1853 das bemerkenswerthe und, wie es scheint, nicht beachtete Theorem, dass die Ellipse von conjugirten Durchmessern in vier gleiche Theile getheilt wird. Vermöge der zwischen den Eigenschaften der Ellipse und denen der Ellipsoide stattfindenden Analogie lässt sich ein ähnlicher Satz für das Ellipsoid vermuthen.

Die Gleichung des Ellipsoides, bezogen auf drei conjugirte Diameter mit den Längen $2a$, $2b$, $2c$ ist

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1.$$

Bezeichnet man mit $\lambda$ den Winkel zwischen den Achsen der $y$ und $z$ und mit $\mu$ den Winkel zwischen der Achse $x$ und der Ebene $yz$, so ist das Volum eines der acht Theile, in welche das Ellipsoid durch die Ebenen $\pm xy$, $\pm xz$, $\pm yz$ getheilt wird,

$$\sin\lambda\,\sin\mu\int_0^{\pm a}dx\int_0^{\pm b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}}dy\int_0^{\pm c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}}dz.$$

sich die verschiedenen Vorzeichen der Grenzen auf jene acht verschiedenen Theile beziehen. Mit Hülfe der Formel

$$\int_0^m dx \int_0^v f(x,y)\,dy = \int_0^m v\,dx \int_0^1 f(x, vy) \quad (v \text{ eine Function von } x)$$

erhält man das in Frage stehende Volum, ohne Rücksicht auf die Zeichen

$$= \sin\lambda \sin\mu\, bc \int_0^{\pm a} dx \int_0^{\pm 1} \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right) \sqrt{1-y^2}\, dy$$

$$= \tfrac{1}{4} \sin\lambda \sin\mu\, \pi\, bc \int_0^{\pm a} \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right) dx$$

$$= \frac{\sin\lambda \sin\mu\, \pi\, abc}{6}.$$

Der absolute Werth dieses Ausdrucks ist unabhängig von den Zeichen der Grenzen; hieraus folgt, dass die conjugirten Diametralebenen das Ellipsoid in acht gleiche Theile theilen.

Gothenburg. G. R. Dahlander.

---

**XLII. Ueber die Genauigkeit einer besonderen Art von Nivellirinstrumenten.** Das von dem Ingenieur-Obersten Hogrewe erdachte Nivellir-Instrument (welches jetzt in vorzüglicher Beschaffenheit vom Mechaniker Starke am k. k. polytechn. Institut in Wien verfertigt wird) hat, wie bekannt, die Eigenthümlichkeit, dass man aus den Umdrehungszahlen welche eine am Instrument angebrachte verticale mikrometrische Schraube angiebt, und welche der horizontalen Richtung der Fernrohraxe und deren Einstellungen auf zwei an der Nivellirlatte befestigte Zielscheiben entsprechen, sowohl die Distanz der Latte vom Instrumente als die Lattenhöhe zu berechnen im Stande ist. Die vollständige Beschreibung seiner Erfindung hat Hogrewe in dem 1800 in Hannover erschienenen Buche: „Praktische Anweisung zum Nivelliren" nebst detailirten Zeichnungen und allen nöthigen Rechnungsvorschriften veröffentlicht. Die späteren Nachahmungen sowohl jenes Instrumentes als jenes Buches gaben zwar diesen beiden Dingen eine äusserlich verschiedene Gestalt, aber das Wesen derselben ist durch sie nicht erweitert worden. Dies ist so richtig, dass, wenn Hogrewe (S. 113 seines Buches) nur den Fehler in der Distanz einer Berechnung unterzieht, welcher aus einer Unrichtigkeit in den Ablesungen an der Schraube entsteht, den aus gleicher Quelle entspringenden Fehler in der Lattenhöhe aber gar nicht untersucht, genau eben so weit auch in allen späteren über diesen Gegenstand erschienenen Schriften und in derselben Weise vorgegangen wird, obgleich schwerlich Jemand verkennen kann

dass die Fehler, welchen das Instrument beim Nivelliren unterworfen ist, viel stärker ins Gewicht fallen und darum weit eher eine genauere Untersuchung erheischen, als jene, welche bei der Anwendung desselben Instrumentes als Distanzmesser zu befürchten sind. Ohne eine genauere Untersuchung ist aber nicht nur kein Urtheil über die Leistungsfähigkeit jenes Nivellirinstruments an sich, sondern auch keine Vergleichung desselben mit den gewöhnlichen Instrumenten möglich, und wenn Jemand, bezüglich des erstern auf die günstigen Resultate von Erfahrungen sich beruft, welche vermeintlich in der nahen Uebereinstimmung zweier mit verschiedenen Instrumen ausgeführten Nivellements von recht langen Linien liegen, so ist es damit wohl nur auf ein „rein praktisches“ Publikum abgesehen.

Dass das mehrerwähnte Nivellirinstrument dem gewöhnlichen, bei sonst gleicher Beschaffenheit der Libelle und des Fernrohrs, nachstehe, lässt schon der Umstand vermuthen, dass bei ersterm die Bestimmung jeder einzelnen Lattenhöhe zwei Pointirungen und drei Ablesungen an der Schraube, somit fünf Fehler zu befürchten sind, während bei letzterm, unter sonst gleichen Umständen, nur ein Fehler beim Einstellen der Zielscheibe möglich ist.

1.

Indem es nun meine Absicht ist, die Gesammtwirkung jener fünf Fehlereinflüsse oder den mittleren Fehler des Instruments zu bestimmen, müssen nothwendig die beiden, bei jeder Pointirung im Visiren und im Ablesen an der Schraube eintretenden Fehler vereinigt gedacht und ihr mittlerer Betrag als gegeben vorausgesetzt werden. Ebenso wird der mittlere Fehler in der Beobachtung der einspielenden Libelle und der entsprechenden Ablesung an der Schraube, — womit, wie bekannt, keine Pointirung in Verbindung steht, — als gegeben betrachtet.

Dies vorausgesetzt sei nun:

$s_0$ die beobachtete Angabe der Schraube bei einspielender Libelle,

$s_1$ und $s_2$ die beobachtenden Angaben der Schraube bei Einstellung der Visirlinien resp. auf die untere und obere Zielscheibe,

$\mu_0$, $\mu_1$, $\mu_2$ die beziehungsweise diesen drei Beobachtungen entsprechenden mittleren Fehler,

$D$ die Entfernung der Zielscheiben,

$A$ der Abstand der untern Scheibe vom Fusspunkte der Latte,

$L$ die aus den Beobachtungen berechnete sogenannte Lattenhöhe,

$\mu$ der mittlere Fehler in $L$.

Dieser Fehler $\mu$ nun wird durch einen Satz bestimmt, welchen Gauss in der *Theoria combin. observ. erroribus minimum obnoxiae* (*pag.* 21, *art.* 18) begründet hat und welcher folgendermassen lautet:

Bezeichnet $L$ eine gegebene Function der Unbekannten $s_0$, $s_1$, $s_2$ und $\mu$

den mittleren Fehler, welcher in der Bestimmung von $L$ zu befürchten ist, wenn für $s_0$. $s_1$, $s_2$ nicht die wahren, sondern die von einander unabhängig beobachteten Werthe, welche resp. den mittleren Fehlern $\mu_0$, $\mu_1$, $\mu_2$ unterworfen sind, gesetzt werden, so ist:

$$\mu = \sqrt{\left(\frac{\partial L}{\partial s_0}\right)^2 \mu_0^2 + \left(\frac{\partial L}{\partial s_1}\right)^2 \mu_1^2 + \left(\frac{\partial L}{\partial s_2}\right)^2 \mu_2^2}.$$

Für die Berechnung von $L$ hat man, wie bekannt, den sehr genäherten Ausdruck:

$$L = A + \frac{s_0 - s_1}{s_2 - s_1} \cdot D,$$

folglich

$$\frac{\partial L}{\partial s_0} = \frac{1}{s_2 - s_1} D; \quad \frac{\partial L}{\partial s_1} = \frac{s_0 - s_2}{(s_2 - s_1)^2} D; \quad \frac{\partial L}{\partial s_2} = \frac{s_1 - s_0}{(s_2 - s_1)^2} D,$$

womit man zu der Formel:

$$\mu = \frac{D}{(s_2 - s_1)^2} \sqrt{(s_2 - s_1)^2 \mu_0^2 + (s_0 - s_2)^2 \mu_1^2 + (s_1 - s_0)^2 \mu_2^2},$$

gelangt, aus welcher sich die folgenden Bemerkungen ergeben.

2.

Unter den Stellungen, welche die Latte, bei unveränderlicher Entfernung vom Instrumente, je nach der höheren oder niederen Lage des Aufstellungspunktes haben kann, giebt es eine, worin der Fehler $\mu$ sein Minimum erreicht. Um diese Stellung zu bestimmen, bemerke man, dass für eine und dieselbe Entfernung die Differenz $s_2 - s_1$ als unveränderlich anzusehen ist, und dass, wenn man für einen Augenblick

$$s_2 - s_1 = r \quad \text{also} \quad s_2 = r + s_1$$

setzt, der Ausdruck für $\mu$ in:

$$\mu = \frac{D}{r^2} \sqrt{r^2 \mu_0^2 + (s_0 - s_1 - r)^2 \mu_1^2 + (s_1 - s_0)^2 \mu_2^2}$$

übergeht. Darin kann sich allein noch $s_1$ ändern, und wenn man nach dieser Grösse differentiirt und $\frac{d\mu}{ds_1} = 0$ setzt, so ergiebt sich als Bedingung für das bezeichnete Minimum die Gleichung

$$(s_0 - s_1 - r) \mu_1^2 - (s_1 - s_0) \mu_2^2 = 0$$

aus welcher man durch Elimination von $r$ findet:

$$s_0 = \frac{s_1 \mu_2^2 + s_2 \mu_1^2}{\mu_2^2 + \mu_1^2}$$

oder, da in der Regel die mittleren Fehler $\mu_1$, $\mu_2$ als gleich anzusehen sind:

$$s_0 = \frac{s_1 + s_2}{2}$$

Wie sich hieraus ergiebt, ist der mittlere Fehler in der Lattenhöhe, bei jeder Entfernung vom Instrumente, am kleinsten, wenn die horizon-

tale Visirlinie die Latte in der Mitte der beiden Zielscheiben trifft. Obgleich sich dieses Ergebniss voraussehen liess, so ist seine Begründung dennoch von Interesse, weil sich aus der Natur des Minimums nun mit Sicherheit schliessen lässt, dass der mittlere Fehler um so stärker ausfallen werde, je mehr die Latte entweder nach der Tiefe oder nach der Höhe sich von der bezeichneten Minimumstellung entfernt.

Daraus folgt, dass das Instrument gerade unter den Umständen, unter welchen es, als die Arbeit fördernd und sehr bequem, besonders empfehlungswerth erscheint, nämlich bei sehr starken Gefällen, die geringste Genauigkeit darbietet.

Ebenso wie bei starken Gefällen verhält es sich bezüglich des Nivellirens auf grosse Distanzen, denn wie ein Blick auf die Formel für $\mu$ zeigt, wächst diese Grösse sehr rasch mit der Distanz, welche durch den Ausdruck:

$$\frac{k}{s_2 - s_1}, \text{ (} k \text{ eine Constante)}$$

bestimmt ist.

Treten starke Gefälle und grosse Distanzen bei Anwendung dieses Nivellirinstruments gleichzeitig auf, so wirken diese beiden, die Genauigkeit beeinträchtigenden, Umstände zusammen und erhält der mittlere Fehler überraschend grosse Werthe. In welchem Maase dies der Fall ist, geht am bestimmtesten aus der nachfolgenden Betrachtung einiger besonderen Fälle hervor.

3.

Was zunächst die Zahlenwerthe der Fehler $\mu_1$ und $\mu_2$ betrifft, welche füglich einander gleich zu setzen sind, so hängen dieselben allerdings von mehreren, nicht allein durch die Beschaffenheit des Instruments bedingten Umständen ab. Man wird aber dem richtigen Werthe nahe kommen, wenn man für eine gewählte Distanz der Latte das Einstellen auf eine Zielscheibe sowie die entsprechenden Ablesungen an der Schraube öfter wiederholt, die Summe der Quadrate der Abweichungen der einzelnen Angaben der Schraube vom arithmetischen Mittel aller durch ihre um die Einheit verminderte Anzahl dividirt, und schliesslich aus dem Resultate die Quadratwurzel zieht.

Für die vom Mechaniker Starke verfertigten Instrumente wird häufig als Ablesungsfehler der Betrag 0,003 einer Umdrehung der Schraube angegeben. Dagegen fanden Prof. Bauernfeind (s. Vermessungskunde 1. Bd. p. 367) und andere Beobachter, dass der Werth 0,005 der Wahrheit näher liegt. Für ein, allerdings schon seit mehreren Jahren in Gebrauch stehendes Instrument bezeichneter Art ergab sich mir (bei einer Distanz von 80 Klaftern) der mittlere Pointirungs- und Ablesungsfehler zu 0,0055. Es ist daher im Allgemeinen eine der Genauigkeit günstige Annahme, wenn man

$$\mu_1 = \mu_2 = 0{,}005$$

setzt.

Für $\mu_0$ kann man, — die sorgfältige Justirung der Libelle und des Fadenkreutzes vorausgesetzt, — in ähnlicher Weise wie oben für $\mu_1$ durch wiederholte Beobachtungen einen mittleren Werth erhalten. Für das so eben genannte Instrument ergab sich immer ein über 0,004 hinausgehender Werth. Zwar stehen mir ähnliche Bestimmungen für andere Instrumente von derselben Construction nicht zu Gebote, jedenfalls aber dürfte der Werth

$$\mu_0 = 0{,}004$$

im Allgemeinen eher zu niedrig als zu hoch gegriffen sein.

Dieses vorausgesetzt, sei nun beispielsweise:

$$s_0 = 21{,}5,\; s_1 = 4{,}5,\; s_2 = 10{,}5,\; D = 1 \text{ Klafter.}$$

Hieraus erhält man aus der am Schlusse des Art. 1 angeführten Gleichung den überaus grossen Werth $\mu = 0{,}0029$ Kl. oder 0,21 Zolle. Der für $\mu_0$ angenommene Werth trägt hier so wenig zur Grösse von $\mu$ bei, dass, wenn man selbst $\mu_0 = 0$ gesetzt hätte, gleichwohl $\mu = 0{,}0028$ erhalten worden wäre.

Die Constante $k$ hat für die hier vorausgesetzten Instrumente von Starke und für $D = 1$ den Werth 324, die Entfernung der Nivellirlatte beträgt also im vorliegenden Falle 54 Klafter.

Der Fehler $\mu$ ist somit der $\frac{1}{18000}$ Theil jener Entfernung!

Obgleich nun die für $s_0, s_1, s_2$ angenommenen Werthe einen ziemlich starken Gefälle entsprechen, so ist doch die Distanz nicht beträchtlich und beziehen sich jene Annahmen auf einen bei Anwendung dieses Instruments keineswegs selten vorkommenden Fall.

Um eines zweiten Falles zu erwähnen, sei

$$s_0 = 21{,}5,\; s_1 = 20{,}0,\; s_2 = 23{,}0,\; D = 1,$$

so entsprechen diese Annahmen der oben gefundenen Bedingung für das Minimum des mittleren Fehlers, und man erhält für $\mu = 0{,}0018$ Kl. Da die Distanz 108 Kl. beträgt, so ist der Fehler $\frac{1}{60000}$ der Distanz, während beim Nivelliren nach der gewöhnlichen Art, welches hier leicht hätte statt finden können, nur $\frac{1}{120000}$, also nur die Hälfte des oben erhaltenen Fehlers zu befürchten gewesen wäre.

Es wäre leicht noch viel ungünstigere Fälle, welche häufig genug vorkommen und in welcher der Fehler das gewöhnliche Maas weit überschreitet, zu bezeichnen. (So ist z. B. wenn $s_0 = 21{,}5$, $s_1 = 36{,}5$, $s_2 = 38{,}5$, $D = 1$ gesetzt wird, die Distanz $= 162$ Kl. $\mu = 0{,}028$ Kl. oder $\frac{1}{5850}$ d. D.) Das Angeführte reicht jedoch schon hin, um die Behauptung zu rechtfertigen, dass die nach dem Princip von Hogrewe verwendeten Nivellirinstrumente gegen die gewöhnlichen, unter sonst gleichen Umständen, hinsichtlich der Genauigkeit bedeutend zurückstehen, so grosse Vorzüge sie unläugbar durch die schnelle Förderung der Arbeit, ferner bei manchen Terrain-

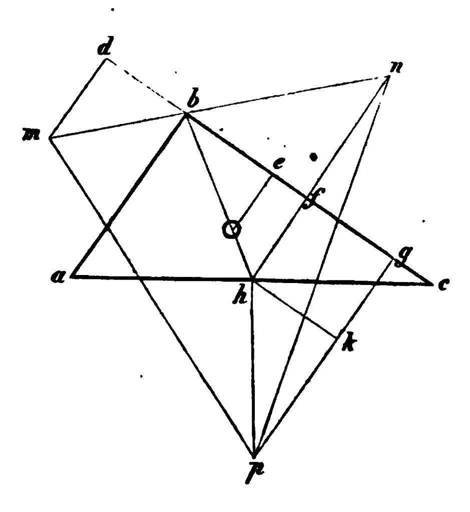
schwierigkeiten und in allen Fällen darbieten, in welchen es sich vor Allem um Zeitgewinn, nicht aber um eine erhebliche Genauigkeit handelt, welche also zu jener Art vorläufiger Ermittelungen gehören, deren Ausführung Gauss bezeichnend „den Horizont abfegen" nennt.

Gratz. DR. A. WINCKLER.

---

**XLIII. Einige Theoreme der Mechanik.** 1) Wenn man über den Seiten eines rechtwinkeligen Dreiecks Quadrate construirt und die Schwerpunkte derselben geradlinig verbindet, so hat das entstehende Dreieck den nämlichen Schwerpunkt wie das rechtwinkelige zuerst erwähnte Dreieck.

Ist *abc* das rechtwinkelige und *mnp* das abgeleitete Dreieck, wobei die Schwerpunkte *m*, *n*, *p* der über den Seiten des rechtwinkligen Dreiecks gezeichneten Quadrate verbunden sind, und bedeutet ferner *o* den Schwerpunkt des rechtwinkeligen Dreiecks, so bleibt zu beweisen, dass *o* der Schwerpunkt des Dreiecks *mnp* ist.




Der Schwerpunkt des Dreiecks *mnp* ist derselbe wie der Schwerpunkt dreier gleichen in den Punkten *m*, *n*, *p* angebrachten Massen. Es genügt dann zu erweisen, dass wenn man *m*, *n*, *p* auf die Seiten *ab* und *bc* projicirt, die Summe der Entfernungen der Projectionen der Punkte *m*, *n*, *p* von der Projection des Schwerpunktes $=0$ ist.

Bezeichnen *d*, *e*, *f*, *g* die Projectionen der Punkte *m*, *o*, *n*, *p* auf *bc*, so ist

$$de = db + be = \tfrac{1}{2}ab + \tfrac{1}{3}bc$$

$$ef = \tfrac{1}{3}bf = \tfrac{1}{6}bc$$

$$fg = hk;$$

wenn *hk* rechtwinklig gegen *pg* ist,

$$hk : hp = hf : hc,$$

und folglich

$$hk = hf = fg.$$

Weiter ist

$$eg = ef \pm fg = \tfrac{1}{6}bc + \tfrac{1}{3}ab,$$

folglich

$$de - ef - eg = 0.$$

Auf gleiche Weise lässt sich zeigen, dass die Summe der erwähnten Entfernung $= 0$ ist, wenn $m, n, p, o$ auf die Linie $ab$ projicirt werden. Das angegebene Theorem ist hierdurch bewiesen.

2) Wenn man aus dem Schwerpunkte eines Körpers als Mittelpunkt sphärische Oberflächen construirt, so ist für jeden Punkt irgend einer dieser Flächen die Summe von den Trägheitsmomenten des Körpers, hinsichtlich dreier gegen einander winkelrecht durch den Punkt gehenden Achsen, dieselbe. Jene Trägheitsmomentsumme ist ein Minimum für den Schwerpunkt des Körpers und wächst immer proportional mit dem Quadrate der Entfernung von diesem Punkte.

Die Summe der Trägheitsmomente eines Körpers bezüglich dreier gegenseitig rechtwinkeligen Achsen ist $2\int(x^2 + y^2 + z^2)\, dm$. Bezeichnet man mit $r$ die Entfernung vom Coordinatenanfang bis zu jedem Partikel des Körpers, so ist die Summe $= 2\int r^2 dm$. Bezeichnet $r'$ die Entfernung vom Coordinatenanfang bis zum Schwerpunkte des Körpers und $r''$ die Entfernung von diesem bis zu einem beliebigen Partikel des Körpers, so ist

$$r^2 = r'^2 + r''^2 - 2r'r'' \cos(r', r''),$$

oder, weil vermöge der Eigenschaft des Schwerpunktes $\cos(r', r'') = 0$,

$$r^2 = r'^2 + r''^2$$

und

$$2\int r\, dm = 2\int(r'^2 + r''^2)\, dm = 2r'^2 M + 2\int r''^2 dm,$$

wenn $M$ die Totalmasse des Körpers ist. Aus dieser Formel für die Summe der Trägheitsmomente findet man die oben erwähnten Sätze.

3) Der Gleichgewichtsbedingung für ein rotirendes Fluidum genügt ein unendlicher hohler Cylinder mit zirkelförmiger Basis, welcher mit constanter Geschwindigkeit um seine Achse rotirt, sobald die gegenseitige Attraction der Partikeln nebst der durch die Rotation verursachten Centrifugalkraft allein auf denselben einwirken.

Die allgemeine Gleichgewichtsgleichung eines rotirenden Fluidums ist

$$dp = \varrho\,[X dx + Y dy + Z dz + w^2 (x dx + y dy)],$$

wenn $p$ den Druck, $\varrho$ die Dichtigkeit, welche hier als constant vorausgesetzt wird, $X, Y, Z$ die Composanten der auf die Masseneinheit einwirkenden Kräfte und $w$ die Winkelgeschwindigkeit sind. Bezeichnet man den inneren Radius des hohlen Cylinders mit $r$, den Radius eines beliebigen Punktes mit $r'$, die Attraction zwischen zwei Massen, jede $= 1$ und in der Entfernung 1, mit $f$, so sind die auf die Masseneinheit in den Punkten $x, y, z$ einwirkenden Attractionscomposanten:

$$X = -\frac{2\pi\varrho f(r'^2 - r^2)}{r'^2}\,x,$$

$$Y = -\frac{2\pi\varrho f(r'^2 - r^2)}{r'^2}\,y,$$

$$Z = 0.$$

Durch Einsetzung dieser Werthe erhält man

$$dp = \varrho\left(w^2 - \frac{2\pi\varrho f(r'^2 - r^2)}{r'^2}\right)(x\,dx + y\,dy).$$

Nun ist $x^2 + y^2 = r'^2$, also

$$x\,dx + y\,dy = \frac{d(r'^2)}{2}$$

und

$$dp = \frac{\varrho}{2}\left(w^2 - \frac{2\pi\varrho f(r'^2 - r^2)}{r'^2}\right) d(r'^2).$$

Durch Integration ergiebt sich

$$p = \frac{\varrho}{2}\left[w^2 r'^2 + 2\pi\varrho f r^2 l(r'^2) - 2\pi\varrho f r'^2\right] + C.$$

Nun ist $p = 0$, wenn $r' = r$, folglich

$$p = \frac{\varrho}{2}\left[w^2(r'^2 - r^2) + 2\pi\varrho f r^2 l\left(\frac{r'^2}{r^2}\right) - 2\pi\varrho f(r'^2 - r^2)\right].$$

Bezeichnet man mit $R$ den Radius des äusseren Grenzcylinders, so ist, wenn $p = 0$ für $r' = R$,

$$w^2 = 2\pi\varrho f\left[1 - \frac{r^2}{R^2 - r^2}\, l\left(\frac{R^2}{r^2}\right)\right].$$

Als Bedingung für die Möglichkeit des Gleichgewichts wird daher erfordert, dass

$$1 - \frac{r^2}{R^2 - r^2}\, l\left(\frac{R^2}{r^2}\right) > 0 \quad \text{oder} \quad \frac{R^2}{r^2} - l\left(\frac{R^2}{r^2}\right) > 1.$$

Diese Bedingung ist immer erfüllt, da $\frac{R}{r}$ immer grösser als 1 ist. Ferner ist es nöthig, dass die auf ein Partikel einwirkende Kraft an der Fläche gegen das Innere der Masse gerichtet ist. Dieser Vorbehalt wird ausgedrückt wie folgt:

$$w^2 R < \left(\frac{2\pi\varrho f(R^2 - r^2)}{R^2}\right) R \quad \text{oder} \quad \frac{R^2}{r^2}\left[1 - l\left(\frac{R^2}{r^2}\right)\right] < 1,$$

welche Bedingung immer erfüllt ist.

Gothenburg. G. R. DAHLANDER.

---

**XLIV. Ueber die elementare Bestimmung der Trägheitsmomente.** Wo es darauf ankommt, die Mechanik ohne Hilfe der höheren Analysis vorzutragen (wie z. B. an Gewerbschulen), benutzt man zur Bestimmung

der Trägheitsmomente das bekannte elementare Summationsverfahren, welches eigentlich eine verkappte Integration ist und zuletzt immer auf den Satz zurückkommt, dass der Quotient

$$\frac{1^k + 2^k + 3^k + \ldots + n^k}{n^{k+1}}$$

bei constanten ganzen positiven $k$ und unendlich wachsenden $n$ gegen die Grenze $\frac{1}{k+1}$ convergirt. Dieser Weg hat zwar keine Schwierigkeiten, ist aber manchmal etwas weitläufig; man wird daher eine kürzere Methode gern sehen, bei welcher der genannte Hilfssatz erspart und nur die Aehnlichkeit geometrischer Gebilde in Anspruch genommen wird. Ein solches Verfahren findet sich in dem „Bericht über die königliche Provinzial-Gewerbeschule zu Hagen, von dem Director Dr. Zehme, Hagen 1858"; mit Erlaubniss des Verfassers theilen wir das Nachstehende daraus mit.

Sind $M_1, M_2, M_3$ etc. die Massentheilchen eines um eine Achse rotirenden Körpers, $x_1, x_2, x_3$ etc. die respectiven Abstände derselben von der Drehungsachse, so ist bekanntlich das Trägheitsmoment des Körpers

$$T = M_1 x_1^2 + M_2 x_2^2 + M_3 x_3^2 + \ldots = \Sigma (M x^2).$$

Das Gewicht eines jener Massentheile sei $G$, sein Volumen $V$, seine Dichtigkeit $\gamma$, und $g$ die Beschleunigung der Schwere; man hat dann

$$M = \frac{G}{g} = \frac{\gamma V}{g},$$

mithin

$$T = \frac{1}{g} \Sigma (\gamma V x^2),$$

und bei einem homogenen Körper, wie er künftig immer vorausgesetzt wird,

$$T = \frac{\gamma}{g} \Sigma (V x^2).$$

Die noch übrige Summe enthält nur geometrische Grössen und kann demnach der geometrische Factor des Trägheitsmomentes heissen. Im Folgenden handelt es sich überhaupt um die Bestimmung dieses Factors und daher sollen künftig unter $M_1$, $M_2$ etc. nicht die Massen selbst, sondern nur ihre geometrischen Factoren verstanden werden.

Aus der Definition des Trägheitsmomentes folgt der bekannte Satz: Ist $T$ das Trägheitsmoment der Masse $M$ in Bezug auf eine gegebene Achse, $U$ ihr Trägheitsmoment in Beziehung auf eine durch den Schwerpunkt von $M$ gehende Parallelachse, endlich $d$ der Abstand beider Achsen, so gilt die Relation

$$T = U + M d^2,$$

deren Beweis wir füglich übergehen können.

Wir betrachten nun zwei geometrisch ähnliche Körper, die um ähnlich liegende Achsen rotiren, und nennen $m$ das Verhältniss zweier entsprechenden Linien in jenen Körpern; wir haben dann einerseits

$$T = \Sigma(Mx^2), \quad \tau = \Sigma(\mu\xi^2).$$

Andererseits ist wegen der Aehnlichkeit $M = m^3\mu$, $x = m\xi$, folglich

$$T = m^5\Sigma(\mu\xi^2), \text{ d. h. } T = m^5\tau.$$

Bei rotirenden Flächen ergiebt sich auf gleich einfache Weise:

$$T = m^4\tau$$

und bei rotirenden Linien:

$$T = m^3\tau.$$

Diese Hilfssätze reichen aus, wie man sogleich sehen wird.

1. Das Trägheitsmoment einer Geraden $l$ in Beziehung auf eine durch ihren Endpunkt senkrecht zu ihr gelegte Achse heisse $T$; in Beziehung auf eine durch ihren Mittelpunkt (Schwerpunkt) parallel zu jener gelegten Achse sei das Trägheitsmoment $U$, es ist dann

$$T = U + M(\tfrac{1}{2}l)^2,$$

wo $M$ die Masse der Geraden bedeutet. Denkt man sich eine zweite Gerade $\frac{1}{2}l$, welche um eine durch ihren Endpunkt senkrecht zu ihr liegende Achse rotirt, und nennt $\tau$ ihr Trägheitsmoment, so ist einerseits

$$U = 2\tau,$$

weil die ganze um die Mittelachse rotirende Gerade $l$ für zwei Gerade (jede $\frac{1}{2}l$) gelten kann, die um eine gemeinschaftliche Endachse rotiren. Andererseits hat man wegen der Aehnlichkeit für $m = 2$

$$T = 2^3\tau = 8\tau;$$

aus den drei vorhandenen Gleichungen mit den Unbekannten $T$, $U$, $\tau$ ergiebt sich

$$T = \tfrac{1}{3}Ml^2 \text{ und } U = \tfrac{1}{12}Ml^2,$$

womit das Trägheitsmoment einer Geraden sowohl in Beziehung auf eine Endachse, als für die Mittelachse bestimmt ist.

2. Das Trägheitsmoment eines Rechtecks von der Breite $b$, der Höhe $h$ und der Masse $M$ sei $T$, wenn die Drehung um $b$ geschieht; es heisse dagegen $U$, wenn die zu $b$ parallele Mittellinie als Rotationsachse genommen wird; es ist dann

$$T = U + M(\tfrac{1}{2}h)^2.$$

Man theile nun das Rechteck durch zwei Mittellinien in vier congruente Rechtecke, deren jedes $\frac{1}{2}b$ zur Breite und $\frac{1}{2}h$ zur Höhe hat, und nenne $\tau$ das Trägheitsmoment eines solchen Rechtecks, wenn es um die Seite $\frac{1}{2}b$ rotirt; es ist dann einerseits

$$U = 4\tau,$$

weil das kleine Rechteck um die Mittelachse des grossen viermal ebenso abgelagert ist, wie um seine Seite $\frac{1}{2}b$. Andererseits giebt die Aehnlichkeit für $m = 2$

$$T = 2^4\tau = 16\tau,$$

und aus diesen drei Gleichungen folgt

$$T = \tfrac{1}{3}Mh^2, \quad U = \tfrac{1}{12}Mh^2.$$

3. Das Trägheitsmoment eines rechtwinkligen Parallel-

epipedes aus den Kanten $a$, $b$, $c$ heisse $T$, wenn die Drehung um die Kante $c$ geht, dagegen $U$, wenn eine durch den Mittelpunkt des Körpers parallel zu $c$ gelegte Gerade zur Rotationsachse genommen wird; es ist dann

$$T = U + Md^2 = U + M\frac{a^2+b^2}{4}.$$

Zerlegt man den Körper durch Mittelflächen in acht congruente Parallelepipede, deren jedes die Kanten $\frac{1}{2}a$, $\frac{1}{2}b$, $\frac{1}{2}c$ besitzt, und nennt $\tau$ das Trägheitsmoment eines solchen Theiles in Beziehung auf $\frac{1}{2}c$ als Drehungsachse, so hat man ähnlich wie vorhin

$$U = 8\tau$$

und zugleich wegen der Aehnlichkeit

$$T = 2^5\tau = 32\tau.$$

Aus diesen Gleichungen finden sich die Werthe

$$T = \tfrac{1}{3}M(a^2+b^2), \quad U = \tfrac{1}{12}M(a^2+b^2).$$

Wie man mittelst der vorigen sechs Formeln die Trägheitsmomente geradliniger Gebilde überhaupt entwickeln kann, ist bekannt genug und bedarf deshalb hier keiner Auseinandersetzung.

Noch wollen wir das Verfahren mittheilen, welches der Verfasser zur Bestimmung der Trägheitsmomente des Kreises, des Cylinders und der Kugel anwendet; dasselbe ist zwar nicht kürzer als das gewöhnliche, aber durch eine gewisse Eleganz bemerkenswerth.

4. **Das Trägheitsmoment der Kreisfläche in Beziehung auf einen Durchmesser.** Man denke sich den Durchmesser $2r$, welcher als Momentenachse genommen ist, in $2n$ gleiche Theile getheilt, wobei $\frac{r}{n} = \delta$ sein möge, lege durch jeden Theilpunkt eine Senkrechte zu $2r$ und ziehe durch die Punkte, in welchen letztere den Kreis treffen, Parallelen zur Achse; es entsteht dann ein Polygon mit abwechselnd ein- und ausspringenden Winkeln. Die Abscissen der Theilpunkte mögen der Reihe nach $x_1, x_2, \ldots x_n = r$, die zugehörigen Ordinaten $y_1, y_2, \ldots y_n = 0$ heissen; irgend einer der entstandenen Streifen hat $x_m - x_{m-1} = \delta$ zur Breite und $2y_m = 2\sqrt{r^2 - x_m^2}$ zur Höhe; seine Masse sei $\mu_m$. Nun ist sein Trägheitsmoment in Beziehung auf die gegebene Momentenachse $= \frac{1}{12}\mu_m(2y_m)^2$, mithin das Trägheitsmoment des halben Polygones

$$T_x = \Sigma(\tfrac{1}{3}\mu y^2) = \tfrac{1}{3}\Sigma[\mu(r^2 - x^2)]$$

oder auch, wenn die Summirung auf die einzelnen Theile bezogen und die Masse des Halbpolygones $= M$ gesetzt wird,

$$T_x = \tfrac{1}{3}Mr^2 - \tfrac{1}{3}\Sigma(\mu x^2).$$

Man denke sich jetzt eine zweite Momentenachse durch den Mittelpunkt des Kreises senkrecht zur ersten gelegt; in Beziehung auf diese ist das Trägheitsmoment des vorigen Streifens $= \mu_m(x_m - \frac{1}{2}\delta)^2 + \frac{1}{3}\mu_m\delta^2$, folglich das Trägheitsmoment des halben Polygones

$$T_y = \Sigma\left[\mu\,(x - \tfrac{1}{2}\delta)^2 + \tfrac{1}{3}\mu\,\delta^2\right]$$
$$= \Sigma(\mu x^2) - \delta\,\Sigma\left[\mu\,(x - \tfrac{1}{2}\delta)\right] + \tfrac{1}{12}\Sigma(\mu\,\delta^2)$$
$$= \Sigma(\mu x^2) - \delta\,\Sigma\left[\mu\,(x - \tfrac{1}{2}\delta)\right] + \tfrac{1}{12}M\delta^2.$$

Aus beiden Gleichungen erhält man durch Elimination von $\Sigma(\mu x^2)$

$$3\,T_x + T_y = M r^2 - \delta\,\Sigma\left[\mu\,(x - \tfrac{1}{2}\delta)\right] + \tfrac{1}{12}M\delta^2.$$

Dabei ist $\Sigma\left[\mu\,(x - \tfrac{1}{2}\delta)\right]$ die Summe der statischen Momente aller Streifen, also $= M\xi$, wenn $\xi$ die Abscisse des Schwerpunktes vom Halbpolygone bezeichnet*). Lässt man nun in der Gleichung

$$3\,T_x + T_y = M r^2 - M\xi\delta + \tfrac{1}{12}M\delta^2$$

$n$ ins Unendliche wachsen also $\delta$ gegen die Null convergiren, so wird

$$3\,T_x + T_y = M r^2$$

und es ist jetzt $T_y$ das Trägheitsmoment des Halbkreises in Beziehung auf den ihn begrenzenden Durchmesser, $T_x$ das Trägheitsmoment desselben Halbkreises in Beziehung auf den zu jenem normalen Durchmesser, $M$ die Masse des Halbkreises. Bezeichnet $U$ das Trägheitsmoment des Vollkreises in Beziehung auf einen Durchmesser und $M'$ seine Masse, so hat man gleichzeitig $T_x = \tfrac{1}{2}U$, $T_y = \tfrac{1}{2}U$, $M = \tfrac{1}{2}M'$, mithin aus dem Obigen

$$U = \tfrac{1}{4}M' r^2.$$

5. **Das Trägheitsmoment eines geraden Kreiscylinders in Beziehung auf seine geometrische Achse** kann auf bekannte Weise aus Nr. 3. abgeleitet werden und findet hier nur des Folgenden (Nr. 7.) wegen Erwähnung; es ist, wenn $r$ den Radius und $M$ die Masse bezeichnet,

$$U = \tfrac{1}{2}M r^2.$$

6. **Das Trägheitsmoment des geraden Kreiscylinders in Bezug auf eine durch seinen Schwerpunkt normal zur geometrischen Achse gelegte Momentenachse** findet man auf eine ganz ähnliche Weise, wie in Nr. 4. das Trägheitsmoment des Kreises. Denkt man sich nämlich die dortige Figur als normalen Querschnitt des Cylinders, dessen Höhe $h$ sei und dessen geometrische Achse senkrecht auf der Ebene der Figur steht, so entsprechen den früheren Parallelstreifen nunmehr Parallelepipede, von denen irgend eines die Kanten $\delta$, $y$, $h$ besitzt und dessen Masse $\mu$ heissen möge. Es ist nun

$$T_x = \Sigma\left[\tfrac{1}{12}\mu\,(h^2 + 4y^2)\right] = \Sigma\left[\tfrac{1}{12}\mu\,(h^2 + 4r^2 - 4x^2)\right]$$
$$= \tfrac{1}{12}M h^2 + \tfrac{1}{3}M r^2 - \tfrac{1}{3}\Sigma(\mu x^2);$$

andererseits in Beziehung auf die $y$-Achse

$$T_y = \Sigma\left[\mu\,(x - \tfrac{1}{2}\delta)^2 + \tfrac{1}{12}\mu\,(h^2 + \delta^2)\right]$$
$$= \Sigma(\mu x^2) + \tfrac{1}{12}\Sigma(\mu h^2) - \delta\,\Sigma\left[\mu\,(x - \tfrac{1}{2}\delta)\right] - \tfrac{1}{6}\delta^2\Sigma\mu$$
$$= \Sigma(\mu x^2) + \tfrac{1}{12}M h^2 - \delta M\xi - \tfrac{1}{6}\delta^2 M,$$

---

*) Wir sind hier, wie auch bei den nachherigen Entwickelungen, dem Verfasser nicht wörtlich gefolgt; derselbe vernachlässigt nämlich das oben durch $\xi$ ausgedrückte Glied, und dies ist deswegen ungenau, weil eine unendliche Menge unendlich kleiner Vernachlässigungen möglicherweise einen endlichen Fehler zur Folge haben könnte.

wo $M$ die Masse des halben eingeschriebenen Parallelepipedes und $\xi$ die Abscisse seines Schwerpunktes bezeichnet. Man hat nun weiter

$$3T_x + T_y = \tfrac{1}{3}Mh^2 + Mr^2 - M\xi\delta - \tfrac{1}{6}M\delta^2,$$

mithin durch Uebergang zum Cylinder

$$3T_x + T_y = M(r^2 + \tfrac{1}{3}h^2).$$

Ist nun $U$ das ursprünglich gesuchte Trägheitsmoment und $M'$ die Masse des ganzen Cylinders, so muss aus naheliegenden Gründen sowohl $T_x$ als $T_y$ gleich $\frac{1}{2}U$ und $M = \frac{1}{2}M'$ sein; daraus folgt

$$U = M'(\tfrac{1}{4}r^2 + \tfrac{1}{12}h^2).$$

7. **Trägheitsmoment der Kugel in Beziehung auf einen Durchmesser.** Denkt man sich den in Streifen zerlegten Kreis um die $x$-Achse rotirend, so beschreibt jeder Streifen einen Cylinder, dessen Masse $\mu$ heissen möge; für jeden solchen Cylinder ist die $x$-Achse die geometrische Achse, daher nach No. 5.

$$T_x = \Sigma(\tfrac{1}{2}\mu y^2) = \tfrac{1}{2}\Sigma[\mu(r^2 - x^2)] = \tfrac{1}{2}Mr^2 - \tfrac{1}{2}\Sigma(\mu x^2).$$

Ferner hat man nach Nr. 6.

$$T_y = \Sigma[\mu(x - \tfrac{1}{2}\delta)^2 + \mu(\tfrac{1}{4}y^2 + \tfrac{1}{12}\delta^2)],$$

oder vermöge des Werthes von $y^2$

$$T_y = \tfrac{1}{4}Mr^2 + \tfrac{3}{4}\Sigma(\mu x^2) - \delta\,\Sigma[\mu(x - \tfrac{1}{2}\delta)] - \tfrac{1}{6}\delta^2 M,$$

folglich

$$3T_x + 2T_y = 2Mr^2 - 2M\xi\delta - \tfrac{1}{3}M\delta^2,$$

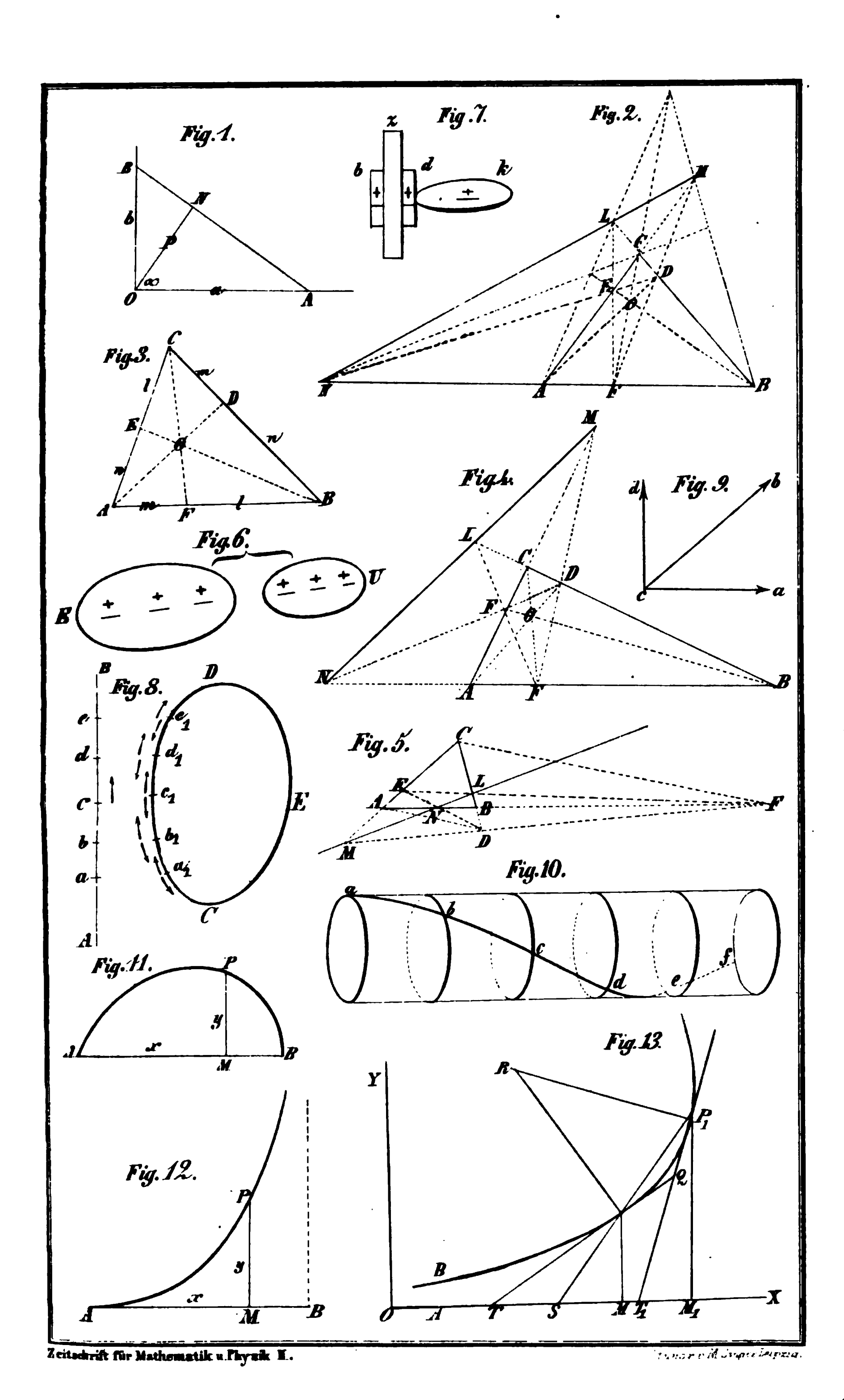
mithin für die Halbkugel

$$3T_x + 2T_y = 2Mr^2.$$

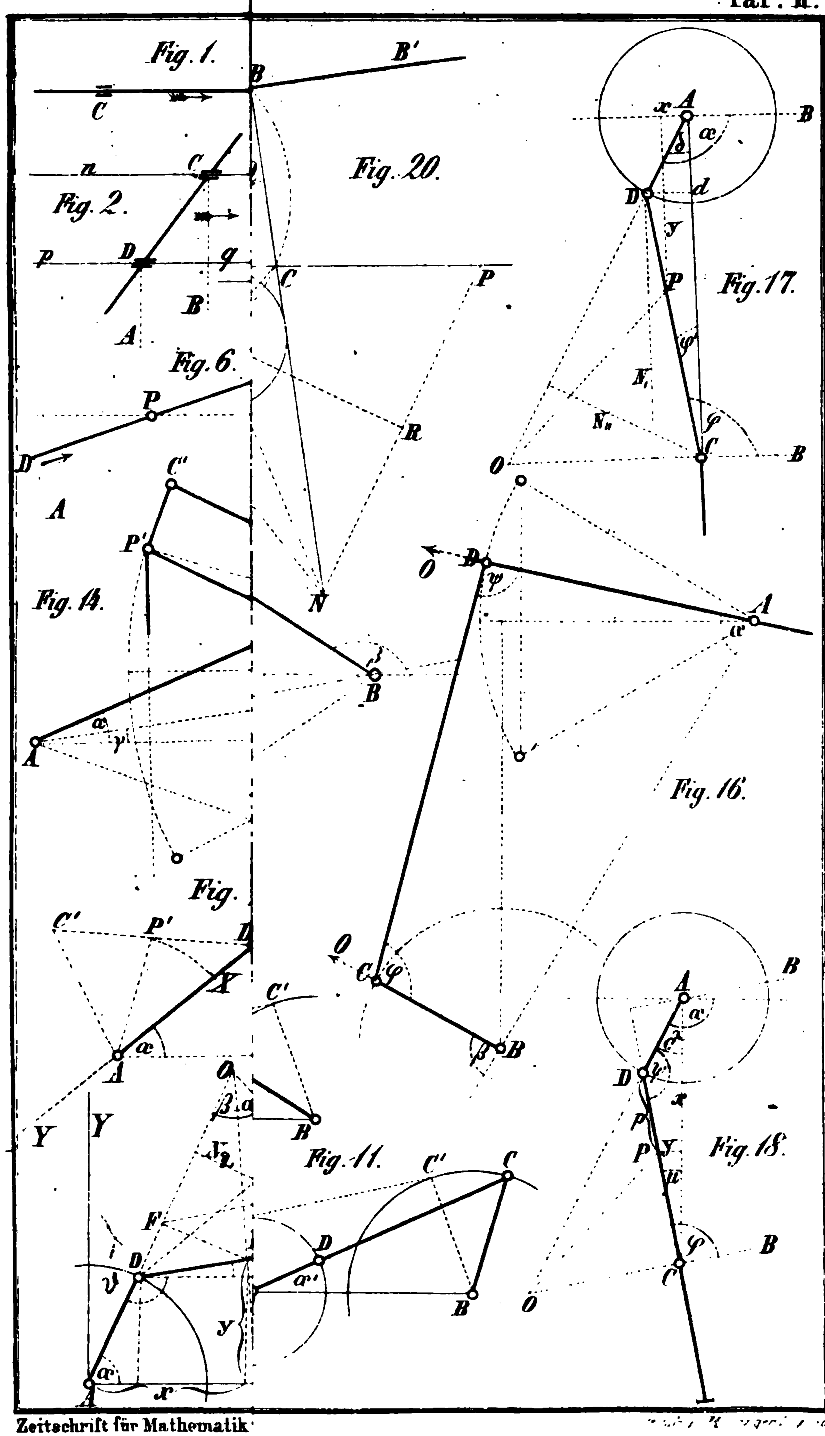
Nennt man $U$ das gesuchte Trägheitsmoment und $M'$ die Masse der Vollkugel, so ist $T_x = \frac{1}{2}U$, $T_y = \frac{1}{2}U$, $M = \frac{1}{2}M'$, folglich

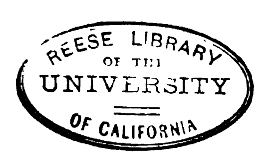
$$U = \tfrac{2}{5}M'r^2.$$

O. Schlömilch.


Fig. 1.
Fig. 2.
Fig. 3.
Fig. 4.
Fig. 5.
Fig. 6.
Fig. 7.
Fig. 8.
Fig. 9.
Fig. 10.
Fig. 11.
Fig. 12.
Fig. 13.

Taf. II.




REESE LIBRARY
OF THE
UNIVERSITY
OF CALIFORNIA

# Literaturzeitung

der

# Zeitschrift für Mathematik und Physik

herausgegeben

unter der verantwortlichen Redaction

von

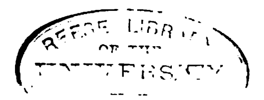
**Dr. O. Schlömilch, Dr. B. Witzschel**

und

**Dr. M. Cantor.**



**Vierter Jahrgang.**




**LEIPZIG,**

Verlag von B. G. Teubner.

1859.

Druck von B. G. Teubner in Dresden.

# Inhalt.

## Arithmetik und Analysis.



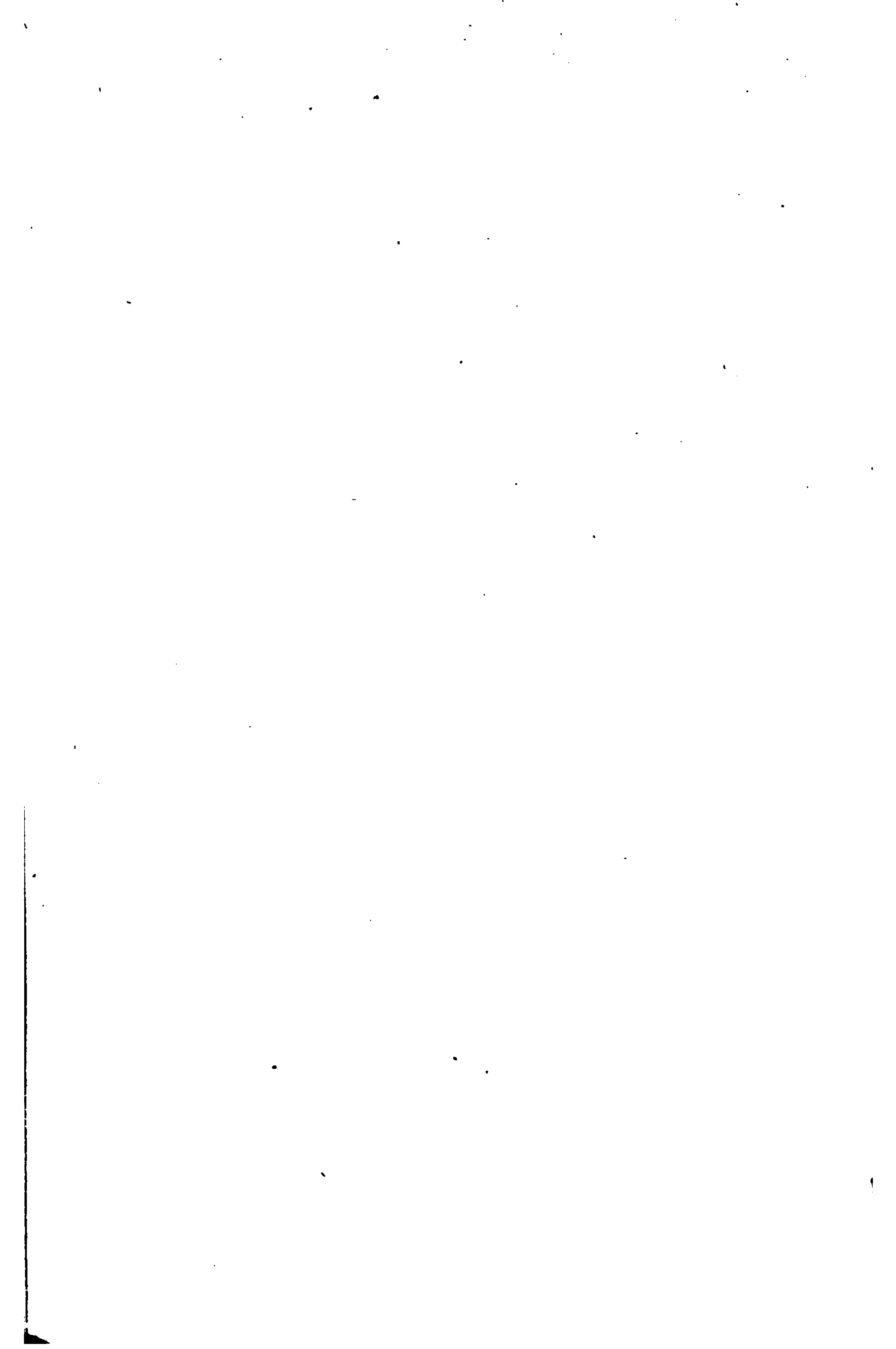
## Geometrie.



## Mechanik.



## Physik.



# Literaturzeitung.

## Recensionen.

**Lehrbuch der Geometrie zum Gebrauche an höheren Lehranstalten.** Von Dr. E. Heis, Professor an der Akademie zu Münster, und Th. J. Eschweiler, Director der höheren Bürgerschule zu Cöln. 2 Theile. Cöln, Du Mont-Schauberg.

Die Verfasser des vorliegenden Werkes gehen von der Ansicht aus, dass ein Lehrbuch die Schüler nach und nach an das Selbstfinden der Beweise und Auflösungen gewöhnen müsse und daher zu beiden nur Andeutungen geben dürfe, welche an Ausführlichkeit in dem Maasse abnehmen, wie die Erkenntniss wächst, und dass zweitens ein Lehrbuch einen möglichst reichen Uebungsstoff darbieten müsse, um sowohl den Wissensdrang besonders strebsamer Schüler zu befriedigen, als auch dem Lehrer eine Erleichterung zu verschaffen, so bald er es nöthig oder rathsam findet, mit dem Uebungsmaterial zu wechseln. Offen gesagt, ist Referent mit dieser Ansicht durchaus nicht einverstanden, vielmehr hegt er, und zwar aus ganz empirischen Gründen, die gerade entgegengesetzte Meinung. Bevor nämlich überhaupt die Rede davon sein kann, den immer nur sporadisch vorkommenden besonders wissbegierigen Schülern etwas Besonderes darzubieten oder mit der vollen Classe Excurse zur Uebung vorzunehmen, muss ohne Zweifel erst das wirklich Nothwendige gelernt sein, jene Fundamentalsätze, die sich von selbst ergeben, wenn man die Geometrie auf das äusserste Maass der Kürze reducirt, müssen unerschütterlich fest stehen; aber schon Das ist nicht so leicht zu erreichen, und Referent gratulirt von Herzen jedem Lehrer, der wenigstens drei Viertheile seiner Schüler dahin gebracht hat. Bleibt dann noch Zeit zu Excursen, so dürfte es wohl keinem Lehrer der Gegenwart schwer werden, das nöthige Uebungsmaterial zusammenzubringen. Nun wird man nicht leugnen, dass in einer Wissenschaft, wo es auf Consequenz des Denkens und Präcision des Ausdrucks so sehr ankommt, gerade die Fundamente nicht oft genug und zwar in der nöthigen strengen Form wiederholt werden können; verweist man zum Zwecke dieser Repetitionen die Schüler auf ein Buch, das nur Andeutungen giebt, so schleichen sich unvermerkt, theils aus Unverstand, theils aus Flüchtigkeit, allerhand schiefe Auffassungen ein, mit deren Correctur man

schliesslich seine Noth hat. Zufolge dieser Gründe, die durch eine zehnjährige Praxis mehr und mehr bestätigt worden sind, ist Referent der Meinung, dass ein Lehrbuch den Schülern ausführliche Beweise der Fundamentalsätze darbieten muss; die Frage kann daher nur noch sein, ob auch die Excurse andeutungsweise mit aufgenommen werden sollen. Selbst dagegen erklärt sich Referent; sind der Excurse wenige, so ist die Auswahl zu gering, sind ihrer viele, so vergrössern sie das Volumen, und es sieht nachher wunderlich aus und bringt den Lehrer in ein ungünstiges Licht, wenn ein dickes und theures Buch angeschafft werden musste und am Ende nur der kleinere Theil desselben beim Unterrichte benutzt worden ist. Will man aber dem Lehrer die von den Verfassern beabsichtigte Erleichterung verschaffen, so scheint es dem Referenten praktischer, ein besonderes Werk, Materialien für den geometrischen Unterricht enthaltend, herauszugeben; dieses sei dann für den Lehrer der Vorrathskeller, woraus er den Wissensdurst der wenigen eminenten Köpfe befriedigt und aus welchem er bei besonderen Gelegenheiten ein *hors d'oeuvre* auftischen kann. Diese Differenz der Ansichten hat übrigens den Referenten nicht verhindert, sich mit dem vorliegenden Werke näher zu befreunden, und er bekennt gern, dass ihm die Ansicht desselben viel Vergnügen gewährt hat. Logische Anordnung des Materiales, Präcision des Ausdrucks und Strenge der Beweise sind Vorzüge, die man nicht immer beisammen findet, und gerade durch diese drei Eigenschaften zeichnet sich das Buch vortheilhaft aus. Der erste Theil desselben erschien bereits 1854 (in zweiter Auflage 1858) und wird den meisten unserer Leser wohl bekannt sein, da schon der Name des Herrn Professor Heis die Aufmerksamkeit erregen musste; unsere weitere Besprechung kann sich daher nur auf den neu erschienenen zweiten Theil (die Stereometrie) beziehen.

Was zunächst die Definition und die Fundamentaleigenschaften der Ebene betrifft, so erscheinen dieselben in einer wohl nicht gut zu rechtfertigenden Art und Weise; im ersten Theile wird nämlich die Ebene als die Fläche definirt, die durch drei Punkte nur auf einerlei Art gelegt werden kann, und als Grundsatz angenommen, dass die Verbindungslinie zweier Punkte derselben ganz in ihr erhalten ist; den Anfang vom zweiten Theil macht eine genetische Erklärung, wobei die Ebene als Kegelfläche mit geradliniger Directrix angesehen wird, und die Verfasser suchen zu beweisen, dass die entstehende Fläche eine Ebene sei. Jene Definition lässt sich allenfalls vom wissenschaftlichen Standpunkte aus vertheidigen, pädagogisch betrachtet ist sie aber nicht viel werth. Wenn eine Ebene durch drei Punkte gelegt ist wie eine Platte auf drei Stützen, so kann sie immer noch geschoben und gedreht werden, ohne die Punkte zu verlassen; bei einer unendlichen Ebene fallen zwar diese verschiedenen Lagen zusammen, wer sich aber die Ebene begrenzt vorstellt — und dies thun die Schüler anfangs immer, wie jeder Nichtmathematiker — der kann jene

Lagen sehr wohl unterscheiden, und für diesen ist die Definition nicht ganz klar. Ausserdem liegt immer eine Schwierigkeit darin, sich einen Gegenstand zu denken, der eine vorher bestimmte Eigenschaft besitzen soll, während es unbedenklich ist, einem schon vorhandenen, durch Construction gewonnenen Objecte irgend welche Prädicate beizulegen. Die Verfasser hätten daher besser gethan, ihren Gedankengang umzukehren und die genetische Definition vorauszuschicken. — Der übrige Inhalt des ersten Capitels (Linien, Ebenen, körperliche Ecke) ist meistens auf die gewöhnliche Weise behandelt. Das zweite Capitel enthält die Sphärik; diese Abweichung von der gewöhnlichen Anordnung ist wohl aus dem Wunsche entstanden, bei den Polyedern Gebrauch von der Kugelfläche machen zu können, denn ausserdem wäre sie nicht nothwendig gewesen. Capitel III behandelt die Polyeder, namentlich den Euler'schen Satz, die Oberflächen (Complanation), die Congruenz, Symmetrie und Aehnlichkeit der Polyeder und die regelmässigen Körper. Darauf folgen in Capitel IV die Schnitte der Cylinder und Kegelflächen, sowie die Complanation derselben nebst der Complanation der Kugelfläche; Capitel V enthält die Cubatur der Polyeder, Capitel VI die Cubatur der runden Körper. — Dieser Anordnung, welche immer mit gerade und krumm wechselt, liegt offenbar folgender Gedanke zu Grunde: Wenn nach irgend einer Richtung ein Gebilde $G$ untersucht werden soll (wie z. B. wenn die Oberfläche oder das Volumen von $G$ zu bestimmen ist), so hat man zu unterscheiden, ob $G$ ein Polyeder oder ein von krummen Flächen begrenztes Gebild ist; daher z. B. die Eintheilung III, IV, V, VI:

*A.* Complanation (*a* Polyeder, *b* runde Körper)
*B.* Cubatur (*a* Polyeder, *b* runde Körper).

Diese Anordnung ist zwar nicht unlogisch, aber unpraktisch, weil die verschiedenen Eigenschaften eines und desselben Gebildes in ganz verschiedenen Capiteln stehen. Will z. B. Jemand irgend eine Untersuchung über den Kegel vornehmen, so muss er bald Capitel IV, bald Capitel VI zu Rathe ziehen, bei Polyedern dagegen sind Capitel I, III und V zu benutzen, da man im Voraus nicht wissen kann, welcher Eigenschaften man im Verlaufe der Untersuchung bedürfen wird. Es giebt aber noch einen anderen, mehr wissenschaftlichen Grund, der gegen jene Eintheilung spricht. Man frage doch die analytische Geometrie, wie sie ihr Material anordnet; hier ist der Gedankengang strikte durch die Natur der Gleichungen begründet. Erst kommen die Gleichungen ersten Grades (die ebenen Gebilde), nachher die Gleichungen zweiten Grades (krumme Flächen) etc., und es wird Niemandem einfallen, hieran etwas zu ändern. Dies giebt einen Fingerzeig, dass die Eintheilung nicht nach den Eigenschaften, sondern nach den Objecten zu machen ist, also im obigen Falle

I. Polyeder (1, Complanation, 2, Cubatur)
II. Runde Körper (1, Complanation, 2, Cubatur).

Bei solcher Anordnung, der auch Referent in seiner Geometrie gefolgt ist, hat man den pädagogischen Vortheil, dass der höhere Unterricht dem niederen parallel läuft.

An die sechs Capitel reihen sich zehn Anhänge verschiedenen Inhalts. Der erste giebt einen Abriss der descriptiven Geometrie, wobei Referent bedauert, dass derselbe zu dürftig ausgefallen ist, um bedeutenden Nutzen stiften zu können. Wer den hohen Werth dieses Theils der Mathematik aus eigener Erfahrung kennt, wird dem Referenten in der Meinung beistimmen, dass die Verfasser besser gethan hätten, hier ausführlicher zu sein und dafür die Complanation und Cubatur der hufförmigen Abschnitte von Cylindern und Kegeln, welche die Quadratur aller Kegelschnitte voraussetzt, ganz wegzulassen. Auch der Anhang über Maxima und Minima gehört, trotz des sehr interessanten Inhaltes, unter die Luxusartikel. Ueberhaupt will es den Referenten bedünken, als wenn die Verfasser bei den Anhängen den bekannten Unterschied zwischen *multum* und *multa* vergessen hätten.

Trotz dieser Ausstellungen ist übrigens Referent nicht im mindesten darüber in Zweifel, dass das vorliegende Werk unter die beachtenswerthesten Erscheinungen der geometrischen Literatur gehört, und hält es daher für seine Schuldigkeit, die Leser darauf aufmerksam zu machen. — Die äussere Ausstattung ist sehr gut, namentlich der Druck so elegant, wie man es von der Teubner'schen Officin gewohnt ist. SCHLÖMILCH.

---

**A. Ganot's Lehrbuch der Physik und Meteorologie.** Nach dem Standpunkte deutscher Wissenschaft für den Selbstunterricht und zum Gebrauche an höheren Lehranstalten frei bearbeitet von Dr. ADOLPH WEISKE, Docent der Physik an der Universität Leipzig. In zwei Bänden. Mit 582 in den Text eingedruckten Holzschnitten. (in 8. 1. Bd. 480 S., 2. Bd. 534 S.) Leipzig, Leopold Voss. 1858.

Das Lehrbuch von Ganot, welches hier dem deutschen Publicum in einer freien Bearbeitung geboten wird, gehört zu jener Classe von Lehrbüchern der Physik, die sich mit einer Darstellung der Resultate der Wissenschaft und mit der Anwendung derselben, sei es zum Nutzen, sei es zur Unterhaltung, begnügen. Es führt in ziemlicher Ausführlichkeit die physikalischen Erscheinungen vor, nennt die Gesetze denen sie folgen, um sie hinterher, wo es angeht, durch das Experiment zu beweisen. Die Experimente werden durch eine grosse Anzahl sauber ausgeführter Holzschnitte von Apparaten nach Originalzeichnungen anschaulich gemacht. Die Darstellung ist einfach und klar. Das Zurechtfinden im Buche wird erleichtert durch Eintheilung in einzelne Paragraphen mit Ueberschriften und durch ein ausführliches Inhaltsverzeichniss. Von einem Bestreben, die Erscheinungen genau nach Zahl und Maass zu bestimmen, um die für

die Theorie unentbehrliche Grundlage zu gewinnen, von einer Aufstellung physikalischer Probleme, und von dem Versuche, dieselben zu lösen, ist in dem Ganot'schen Buche allerdings nicht die Rede. Eine tiefere Einsicht in den Zusammenhang physikalischer Erscheinungen zu eröffnen, scheint nicht in der Absicht des Verfassers gelegen zu haben, wenigstens macht der Titel des Buches „*Traité élémentaire de physique expérimentale et appliquée*“ in dieser Hinsicht keine Erwartungen rege. Was der Verfasser mit seinem Buche will, geht übrigens deutlich aus dem Titel hervor, denn es heisst auf demselben: *à l'usage des Etablissements d'instructions des aspirants aux grades des Facultés et des candidats aux diverses écoles du Gouvernement.* Das Buch ist ganz in die Organisation des öffentlichen Unterrichts in Frankreich eingepasst und den grossen Erfolg, den es dort gehabt hat, verdankt es neben der Klarheit der Darstellung und der schönen Ausstattung zumeist wohl diesem Umstande. Der Erfolg, den ein Buch in Frankreich hat, rechtfertigt aber allein noch nicht eine deutsche Bearbeitung. Das deutsche Schulwesen ist von dem französischen gänzlich verschieden und ein Buch, welches für französische Verhältnisse zugeschnitten ist, muss eben desswegen den Zwecken unserer Lehranstalten nicht entsprechen. Die besseren deutschen Lehrbücher der Physik, mit dem Ganot'schen Lehrbuch verglichen, zeigen zudem deutlich, dass man in Deutschland von ganz anderen Voraussetzungen ausgeht. Für den ersten Unterricht in der Physik, der wenig oder gar keine mathematischen Kenntnisse voraussetzt, bietet das Buch viel zu viel, und für den Unterricht an unseren höheren Lehranstalten ist es zu oberflächlich. Wir können uns eigentlich nur einen Kreis von Lesern denken, denen das Buch willkommen ist, Leuten nämlich, denen es nur um die Anwendung der Wissenschaft zu thun ist und die zu bequem oder mit zu wenigen mathematischen Vorkenntnissen ausgerüstet sind, um einer theoretischen Erörterung folgen zu wollen oder zu können. Dass das Ganot'sche Lehrbuch für deutsche Lehranstalten nicht ausreicht, scheint der Bearbeiter auch gefühlt zu haben, indem er es nach dem Standpunkte deutscher Wissenschaft bearbeitet zu haben vorgiebt. Ein Buch aber, das von Haus aus auf keinen hohen wissenschaftlichen Standpunkt steht, kann durch eine blosse Bearbeitung nicht zu einem Lehrbuche werden, wie wir es auf unseren höheren Lehranstalten gebrauchen. Sollte es ein wissenschaftliches und selbst nur ein elementares Lehrbuch werden, ein Lehrbuch, welches sich unsern guten deutschen Lehrbüchern an die Seite stellen könnte, so müsste es so umgearbeitet werden, dass von seiner ursprünglichen Gestalt wenig oder nichts übrig blieb, d. h. es müsste eine selbstständige Arbeit werden.

Gehen wir nach diesen allgemeinen Bemerkungen etwas näher auf die deutsche Bearbeitung ein, so finden wir, dass eine wörtliche Uebersetzung vor der freien Bearbeitung den Vorzug verdient hätte. Wir können natürlich nicht Schritt für Schritt eine Vergleichung zwischen der Bearbeitung und

dem Originale geben, und beschränken uns daher an einigen Beispielen das Verhältniss beider zu einander zu zeigen. Ueber den Schwerpunkt sagt Ganot: „*Le centre de gravité d'un corps est un point par lequel passe constamment la résultante des actions de la pesanteur sur les molécules de ce corps, dans toutes les positions qu'il peut prendre. On démontre, en statique, que tout corps a un centre de gravité unique;*" der Bearbeiter dagegen: „die an den einzelnen Moleculen eines Körpers wirkenden Schwerkräfte lassen sich alle durch eine einzige Resultante ersetzen. Den Angriffspunkt dieser letzteren nennt man den Schwerpunkt des Körpers. Es kann daher ein Körper nur einen einzigen Schwerpunkt besitzen." Ueber die verschiedenen Arten des Gleichgewichts heisst es bei Ganot: „*L'équilibre stable est l'état d'un corps qui, dévié de sa position d'équilibre, y revient de lui-même aussitôt qu'aucun obstacle ne s'y oppose. Cet état se présente toutes les fois qu'un corps est dans une position telle que son centre de gravité est plus bas que dans toute autre position voisine. Si le corps est alors déplacé, son centre de gravité ne peut être que relevé, et comme la pesanteur tend sans cesse à l'abaisser, elle le ramène, après une suite d'oscillations, à sa position première, et l'équilibre se rétablit. — L'équilibre instable est l'état d'un corps qui, devié de sa position d'équilibre, ne tend qu'à s'en ecarter davantage. Cet état se présente toutes les fois qu'un corps est dans une position telle que son centre de gravité est plus haut que dans toute autre position voisine; car, par un déplacement quelconque, le centre de gravité étant abaissé, la pesanteur ne tend qu'à l'abaisser davantage. — Enfin on nomme équilibre indifférent celui qui persiste dans toutes les positions que peut prendre un corps. Ce genre d'équilibre se rencontre lorsque, dans les diverses positions du corps, son centre de gravité n'est ni relevé, ni abaissé, ainsi qu'il arrive par une roue de voiture soutenue par son essieu, ou pour une sphère reposant sur un plan horizontal.*" Ueber denselben Gegenstand lautet die deutsche Bearbeitung: „Im stabilen Gleichgewicht befindet sich ein Körper dann, wenn er freiwillig in seine Gleichgewichtslage zurückkehrt, nachdem man ihn aus derselben entfernt hat, und ihn dann wieder sich selbst überlässt. Dies Gleichgewicht findet allemal dann statt, wenn der Schwerpunkt des fraglichen Körpers sich unterhalb seines Unterstützungspunktes befindet, also z. B. bei allen frei an einem Faden herabhängenden Körpern. Die Verschiebung eines solchen hat zur Folge, dass er, nachdem das Hinderniss verschwunden, so lange um seine Ruhelage hin und her oscillirt, bis er wieder in derselben stehen bleibt. — Man kann auch einen Körper, der unterhalb seines Schwerpunkts unterstützt ist, in das stabile Gleichgewicht bringen, sobald man ihn nicht blos auf einen einzigen Punkt, sondern auf eine breite Fläche oder mindestens auf drei weit genug auseinander gelegene Punkte stützt. Das labile Gleichgewicht findet dann statt, wenn sich der Schwerpunkt eines Körpers senkrecht über dem Unterstützungspunkte befindet. Verschiebt man in diesem Falle den Schwerpunkt nur wenig seitwärts, so tritt ein völliges Umschlagen des Körpers ein. Beim indifferenten Gleichgewicht endlich beharrt

der Körper in allen möglichen Lagen, in die wir ihn bringen, und zeigt kein Bestreben, von selbst in eine andere Lage sich zu begeben. Es ist dies dann der Fall, wenn der Schwerpunkt mit dem Unterstützungspunkt zusammenfällt, wie wir es bei einem Rade finden, das man um seine Axe drehen kann und das in jeder Lage stehen bleibt. Doch kann auch der Fall vorkommen, dass der Schwerpunkt selbst nicht unmittelbar unterstützt ist, dass sich aber bei jeder Verrückung des Körpers immer wieder senkrecht unter dem Schwerpunkt ein Stützpunkt vorfindet. Ein Beispiel für diesen Fall liefert eine Kugel, die auf einer horizontalen Fläche ruht."

Wollten wir alle Stellen anführen, wo die Bearbeitung zu ihrem Nachtheil von dem Original abweicht, so würden wir uns schwerlich den Dank unsrer Leser verdienen. Wir erwähnen nur noch, dass auch in der Anordnung der einzelnen Gegenstände die deutsche Bearbeitung hier und da vom Original abgewichen ist. So lässt der Bearbeiter z. B. die Betrachtung des Gleichgewichts eines Körpers auf einer schiefen Ebene, die im Original bei Gelegenheit des Falles der Körper eine Stelle findet, auf den Satz vom Parallelogramm der Kräfte (der wie im Original ohne Beweis hingestellt wird) folgen, obgleich von der Schwerkraft erst viel später die Rede ist: aber es kam dem Bearbeiter darauf an „eine der wichtigsten Anwendungen der Zerlegung der Kräfte" zu geben. An die Betrachtung der schiefen Ebene schliesst sich die Betrachtung des Keils und der Schraube. Des Hebels und der Rolle wird in einem andern Abschnitte Erwähnung gethan. Wenn der Bearbeiter über die einfachen Maschinen nichts Besseres zu sagen wusste, als wir hier finden, so war es besser sie ganz mit Stillschweigen zu übergehen, wie es Ganot gethan hat. In dem Paragraphen über die Planetenbewegung, den die deutsche Bearbeitung hinzugefügt hat, findet man nach dem ersten Kepler'schen Gesetze die Bemerkung: „die Brennpunkte sind bekanntlich zwei auf dem grössten Durchmesser der Ellipse gelegene Punkte, die in den geometrischen Beziehungen dieser krummen Linie eine wichtige Rolle spielen." Was diese Bemerkung soll wissen wir nicht; denn entweder setzt man voraus, der Leser weiss, was für Punkte die Brennpunkte sind, oder man setzt es nicht voraus, in welchem letzteren Falle man es ihm einfach zu sagen hat. — Aus dem Angeführten mag Jeder sich ein Urtheil bilden, was er von dem wissenschaftlichen Standpunkte der deutschen Bearbeitung zu halten hat. Erwähnen wollen wir nur noch, dass von den 228 Seiten, die die sogenannte mechanische Naturlehre einnimmt, eine Seite und sieben Zeilen auf die Wellenbewegung kommen. In der Akustik und Optik, wo es wünschenswerth ist die Schwingungsbewegungen durch Abbildungen veranschaulicht zu sehen, fehlen diese fast gänzlich, während sonst im Buche ein unwürdiger Luxus mit Holzschnitten getrieben worden ist; denn wie soll man es anders nennen, wenn das Herabfallen der Feder und der Bleikugel im luftverdünnten Raume, das Zerdrücken einer Membrane durch den Luftdruck, das vergebliche Bemühen

zweier Hände die Magdeburger Halbkugeln von einander zu reissen und ähnliche Dinge abgebildet sind. Die Holzschnitte Fig. 13. 98. 99. 100. 244 gehören aber geradezu in ein Bilderbuch.

Noch einen Punkt müssen wir berühren. Der Bearbeiter hält es, wie er in der Vorrede sagt, entschieden für zweckmässiger die Lehre vom Magnetismus als einen Theil der Electricitätslehre zu behandeln. Uns scheint zunächst die Frage nicht zu sein, ob es zweckmässig ist die Lehre vom Magnetismus als einen Theil der Electricitätslehre zu behandeln, vielmehr wünschten wir vorher die Frage entschieden zu sehen, ob die Wissenschaft überhaupt schon bis zu dem Punkte gelangt ist, alle magnetischen und diamagnetischen Erscheinungen aus den allgemeinen Ausdrücken für die zwischen zwei Electricitätstheilchen wirkende Kraft ableiten zu können. Diese Entscheidung ist im Buche nicht gegeben und in demselben nicht zu erwarten; man findet darin weder das Ampère'sche Fundamentalgesetz noch auch die Verallgemeinerung desselben von Weber ausgesprochen. Gesetzt aber den Fall, die Frage wäre entschieden, und man könnte oder müsste die alte Hypothese der beiden magnetischen Materien fallen lassen, so könnte entweder von Zweckmässigkeit gar nicht die Rede sein oder doch nur insofern, als man es für den Unterricht erspriesslich hielt zu zeigen, was die alte Hypothese leistete, und bei welchem Punkte sie aufgegeben werden musste. Da die alte Hypothese so ziemlich alle magnetischen Erscheinungen ungezwungen zu erklären vermag, so ist es gewiss zweckmässig sie im Unterrichte zunächst noch beizubehalten; der Unterricht hat ja darzulegen, wie die Wissenschaft, von besonderen Hypothesen ausgehend, sich schrittweise zu allgemeineren Vorstellungen erhebt. Diese Ueberlegung ist wohl auch der Grund, warum in unsern besten Lehrbüchern die Lehre vom Magnetismus zunächst getrennt von der Electricitätslehre vorgetragen wird.

Wir glauben von einem weiteren Eingehen in das Buch absehen zu müssen, da eine derartige Bearbeitung der Physik einen zu geringen wissenschaftlichen Werth besitzt. Bedauern müssen wir übrigens, dass der Bearbeiter, der Docent an einer Universität ist, die sofort an die Namen Fechner und Weber erinnert, von dem Standpunkte deutscher Wissenschaft sowohl als von dem Bedürfnisse an unseren höheren Lehranstalten einen so geringen Begriff hat. Dem Referenten kommt unwillkürlich der Gedanke, dass der Bearbeiter bei seiner Bearbeitung des Ganot'schen Lehrbuches an junge Mediciner eines gewissen Schlages gedacht hat, denen er für die Repetitorien der Physik ein Buch hat in die Hände geben wollen. Zu einem solchen Zwecke können wir es immerhin empfehlen und würden es noch lieber thun, wenn es Herrn Dr. Weiske gefallen hätte, eine reine gute Uebersetzung zu liefern. Der Verlagsbuchhandlung ist man hinsichtlich der Ausstattung des Werkes jede Anerkennung schuldig.

Dr. Rudolf Hoffmann.

# Bibliographie

vom 10. November bis 6. December 1858.

---

### Periodische Schriften.

Die Fortschritte der Physik im Jahre 1856. Jahrg. 12, redig. von KRÖNIG. 1. Abth. Berlin, Reimer. 2 Thlr.

*Bulletin de la classe physico-mathématique de l'Académie de Petersbourg. Tome XVII.* Leipzig, Voss. 3 Thlr.

*Mélanges physiques et chimiques tirés du bulletin physico-mathématique de l'Académie des sciences à Petersburg. Tome III, livr.* 3. Leipzig, Voss. 1 Thlr.

### Reine Mathematik.

SCHWARZ, H., Grundzüge einer Elementar-Arithmetik. Hagen, Butz. 24 Ngr.

LEGENDRE's Elemente der Geometrie, übers. von CRELLE. 5. Aufl. Berlin, Rücker & Pichler. 2 Thlr.

ZÄHRINGER, H., Leitfaden für den Unterricht in der Geometrie. 2. Aufl. Luzern, Kaiser. 18 Ngr.

WÖCKEL, L., Die Geometrie der Alten in einer Sammlung von 850 Aufgaben. 5. Aufl. Nürnberg, Bauer & Raspe. 18 Ngr.

MAGENER, A., Cubatur des Fusspunktenkörpers eines Ellipsoides. Posen und Berlin, Mittler. ⅓ Thlr.

### Angewandte Mathematik.

NIEDERRIST, J., Anleitung zur Markscheidekunst. Brünn, Winiker. ⅚ Thlr.

SCHEFFLER, H., Theorie der Festigkeit gegen das Zerknicken nebst Untersuchungen über die inneren Spannungen gebogener Körper und über andere Probleme der Biegungstheorie. Braunschweig, Schulbuchh. (Vieweg). 24 Ngr.

WIEBE, F. K. H., Die Lehre von den einfachen Maschinentheilen. 2. Bd., 4. Lief. Berlin, Ernst & Korn. 1⅓ Thlr.

RAABE, J., Ueber die fortschreitende Bewegung der Schwerpunkte der Planeten. Zürich, Orell, Füssli & Comp. ⅓ Thlr.

ECKHARDT, C. L. P., Neue Sternkarte. 3 lithogr. Blätter mit Text in gr. 8. 4. Aufl. Giessen, Ferber'sche Univers.-Buchh. 1 Thlr.

SCHUBERT, J. F., *Exposé des travaux astronomiques et géodésiques exécutés en Russie dans un but géographique jusqu'à l'année* 1855. Leipzig, Voss. 11 Thlr. 3 Ngr.

### Physik.

FECHNER, G. J., Ueber ein wichtiges psycho-physisches Gesetz und dessen Beziehung zur Schätzung der Sterngrössen. (Abh. d. Leipz. Ges. d. W.) Leipzig, Hirzel. ⅓ Thlr.

DIETRICH, A., Die Elektricitätsverhältnisse der Atmosphäre unter dem Einflusse der Eisenbahnen und der elektrischen Telegraphie. Dresden, Meinhold & Söhne. ⅙ Thlr.

ROBIDA, P. K., Magnetismus. Fortsetzung und Schluss der Vibrationstheorie der Elektricität. Klagenfurt, Liegel's Buchhandlung. ⅙ Thlr.

---

# Mathematisches Abhandlungsregister.

Das hier folgende Register enthält sämmtliche mathematische Abhandlungen, welche innerhalb der jedesmal anzugebenden Zeitperiode in Zeitschriften und Akademieberichten, so weit dieselben der Redaction zugänglich waren, erschienen sind. Es schliesst sich eng an das Register gleichen Inhaltes an, welches in dem ersten (einzigen) Bande der Kritischen Zeitschrift für Chemie, Physik und Mathematik enthalten ist, und benutzt dieselben Abkürzungen. Nämlich:

| | | |
|---|---|---|
| Astr. Nachr. | bedeutet: | Astronomische Nachrichten von Schumacher, fortgesetzt von Peters. — Altona. |
| Berl. Acad. Ber. | " | Monatsberichte d. Academie der Wissenschaften zu Berlin. |
| *Compt. rend.* | " | *Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'académie des sciences. — Paris.* |
| Crelle | " | Crelle's Journal für die reine und angewandte Mathematik, fortgesetzt von Borchardt. — Berlin. |
| Grun. Archiv | " | Archiv für Mathematik und Physik, herausgegeben von Grunert. — Greifswalde. |
| *Journ. Mathém.* | " | *Journal des mathématiques pures et appliquées par M. Liouville. — Paris.* |
| *N. ann. math.* | " | *Nouvelles annales de mathématique par M. Terquem et Gérono. — Paris.* |
| *Petersb. Acad. Bull.* | " | *Bulletin de la classe physico-mathématique de l'academie de St. Petersbourg.* |
| *Phil. Mag.* | " | *The London, Edinburgh and Dublin Philosophical Magazine and Journal of science, conducted by Brewster, Taylor, Kane, Francis and Tyndall. — London.* |
| *Quart. Journ. Math.* | " | *The quarterly Journal of pure and applied mathematics conducted by Sylvester and Ferrers. — London.* |
| Sächs. Acad. Ber. | " | Berichte über die Verhandlungen der k. sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften zu Leipzig. Mathematisch-physikalische Klasse. |
| Wien. Acad. Ber. | " | Sitzungsberichte der mathematisch-naturwissenschaftlichen Klasse der Academie der Wissenschaften zu Wien. |
| Zeitschr. Math. Phys. | " | Zeitschrift für Mathematik und Physik, herausgegeben von Schlömilch und Witzschel. — Leipzig. |

## 1858.

### Erste Hälfte: 1. Januar bis 30. Juni.

### A.

#### Analytische Geometrie (der Ebene).

1. *Sur la courbe* $yx^2 + bx + c = 0$. *N. ann. math. XVII*, 118.
2. *Sur une certaine classe de courbes de troisième degré, rapportées à lignes droites, qui dépendent de paramètres donnés.* *Bjerknes.* Crelle, LV, 310.
3. *Theorems respecting the polar conics of curves of the third degree.* *Smith.* *Quart. Journ. Math. II*, 208.

4. *Sur les ovales de Descartes.* Strebor. *N. ann. math. XVII*, 234.
5. *A word on foci.* Roberts. *Quart. Journ. Math. II*, 195.
6. Die orthogonale Transversale und die Brennlinie der zurückgeworfenen Strahlen für die Cycloide und für die logarithmische Spirale. Gauss. Grun. Archiv XXX, 121.
   Vergl. Cycloide, Ellipse, Evolution, Hyperbel, Kegelschnitte, Kreis, Parabel, Quadratur.

**Analytische Geometrie (des Raumes).**

7. *Sur le lieu géométrique des centres des sections faites dans un cône du second ordre par une suite de plans passant tous ou par un même point, ou par une même droite.* Marquet et Daliçan. *N. ann. math. XVII*, 172.
8. Zur Theorie der parallelen Curven. Hoppe. Crelle LV, 95.
9. Ueber die Enveloppe der Bahnen von nach einem Punkt gravitirenden Körpertheilchen. Beer. Wien. Acad. Ber. XXIV, 314.
10. *Sur la courbure faite dans une surface par un plan tangent.* De la Gournerie. *Journ. Mathém. XXIII*, 73.
11. *Sur l'équation du cylindre parabolique.* Gerono. *N. ann. math. XVII*, 236.
    Vergl. Krümmung.

**Anomalie.**

12. *Note on the expansion of the true anomaly.* Cayley. *Quart. Journ. Math. II*, 229.

**Approximation.**

13. Ueber den Fehler, den man begeht, wenn man den Winkel statt der Tangente und des Sinus setzt. Wolfers. Grun. Archiv XXX, 359.
    Vergl. Bestimmte Integrale 27; Functionen 85; Gleichungen (numerische) 116; Interpolation; Maxima und Minima 153; Methode der kleinsten Quadrate.

**Astronomie.**

14. *On the law of Bode.* Tebay. *Phil. Mag. XV*, 206.
15. *Nouvelle théorie du mouvement de la lune.* Delaunay. *Compt. rend. XLVI*, 912, 953. *Journ. Mathém. XXIII*, 220.
16. *Sur la détermination des déclinaisons et des ascensions droites des étoiles par des observations azimutales.* Emm. Liais. *Compt. rend. XLVI*, 400.
17. Durch Beobachtungen am Passageninstrument ausserhalb des Meridians die Zeit zu finden. Hansen. Astr. Nachr. XLVIII, 113.
18. Referat über Hansen's Mondtafeln (französisch von Puiseux). Liouville. *Journ Mathém. XXXIII*, 209.
19. *Note on the rotation of a heavenly body.* Tebay. *Phil. Mag. XV*, 211.
20. Offenes Schreiben an Herrn Prof. Encke, Director der Sternwarte in Berlin. Hansen. Astr. Nachr. XLVIII, 129.

**Atomistik.**

21. Ueber die geometrischen Eigenschaften der *gravitas accelatrix* Newton's und ihre Consequenzen für die Atomenlehre. Gensler. Grun. Archiv XXX, 1.

**Attraktion.**

22. Ueber die Reduction der Attraktionskräfte zweier Massen. Schell. Zeitschr. Math. Phys. III, 80.
23. *Sur la démonstration de l'équation* $\frac{dX}{dx}+\frac{dY}{dy}+\frac{dZ}{dz}=-4\pi\varepsilon k\rho$. Clausius. *Journ. Mathém. XXIII*, 57.
24. Ueber Gravitation und Erhaltung der Kraft. E. Brücke. Wien. Acad. Ber. XXV, 19. — *Phil Mag XV*, 81.
25. *On the integral of gravitation and its consequents with reference to the measure and transfer or communication of force.* Waterston. *Phil. Mag. XV*, 329.
26. *Note à l'occasion du mémoire de M. Hirst sur l'attraction des paraboloides elliptiques.* Bourget. *Journ. Mathém. XXIII*, 47.
    Vergl. Analytische Geometrie des Raumes 9; Atomistik.

**B.**

**Bestimmte Integrale.**

27. Ueber die Gauss'sche Quadratur und eine Verallgemeinerung derselben. Christoffel. Crelle LV, 61.

28. Ueber die Ableitung des Differentials von $\log \Gamma(x)$. **Clausen.** Grun. Archiv XXX, 169.
29. Transformation eines bestimmten Integrals. **Schlömilch.** Zeitschr. Math. Phys. III, 115.
30. Ueber den Werth des Integrals $\int_0^x \frac{\sin x^m}{x^n} dx$, wenn $m$ und $n$ positive ganze Zahlen und $m \geqq n$. **Minding.** Grun. Archiv XXX, 171.
31. Ueber den Quotient $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - \sin \Theta^2 . \sin \varphi^2}} : \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - \cos \Theta^2 . \sin \varphi^2}}$. **Papin.** *N. ann. math. XVII*, 61.
32. Ueber einige bestimmte Integrale. **Dienger.** Grun. Archiv XXX, 250.
33. Ueber einige bestimmte Integrale. **Zehfuss.** Grun. Archiv 465, 469.
34. *On the multiple integral* $\int^n dx\, dy \ldots dz$. *Schlaeffli.* *Quart. Journ. Math. II*, 269.
35. Reduction eines vielfachen Integrals. **Schlömilch.** Zeitsch. Math. Phys. III, 22.

Vergl. Anomalie; Elliptische Functionen; Functionen 80; Gammafunctionen; Gleichungen 112; Imaginäres 124; Reihen 207.

**Binomialreihe.**

36. Elementare Summirung einiger Reihen und daraus abgeleiteter Beweis des binomischen Lehrsatzes für negative ganze Exponenten. **Grunert.** Grun. Archiv XXX, 336.
37. Ueber die binomische Reihe. **Heine.** Crelle LV, 279.

## C.

**Capillarität.**

38. *Sur la théorie capillaire. Arthur. Compt. rend. XLVI*, 1085.

**Combinatorik.**

39. *Sur le nombre de valeurs que peut acquérir une fonction de n lettres, quand on y permute ses lettres de toutes les manières possibles. Emile Mathieu. Compt. rend. XLVI*, 1017, 1208.

**Cotes'scher Satz.**

40. Der Satz von Cotes auf die Ellipse erweitert. **Grunert.** Grun. Archiv XXX, 104.

**Cubikwurzel.**

41. *Notre sur l'extraction de la racine cubique. Forestier. N. ann. math. XVII*, 7.
42. *Extraction abrégée d'une racine cubique. Genocchi. N. ann. math. XVII*, 136.

**Cubische Formen** vergl. Gleichungen 105; homogene Functionen 119, 120.

**Cycloide.**

43. Lehrsatz über einen rollenden Kreis. **O. Böklen.** Grun. Archiv XXX, 469.
44. Untersuchung der Evoluten der Cycloiden. **Lang.** Grun. Archiv XXX, 319.

## D.

**Determinanten.**

45. *Sur un certain système d'équations linéaires. Painvin. Journ. Mathém. XXIII*, 41.
46. *Solution d'une équation indéterminée à trois inconnues. Souillart. — E. Mathieu. N. ann. math. XVII*, 192.
47. *Rapport entre deux déterminants. E. Mathieu. N. ann. math. XVII*, 187.
48. *Théorème sur les déterminants gauches. Cayley.* Crelle LV, 277.

**Determinanten (in geometrischer Anwendung).**

49. Zu den Doppeltangenten der Curven vierter Ordnung. **Hesse.** Crelle LV, 83.
50. *Discussion des lignes et surfaces du second ordre. Painvin. N. ann. math. XVII*, 130.

### Differentialgleichungen.

51. Integration verschiedener Differentialgleichungen. S. Spitzer. Zeitschr. Math. Phys. III, 106.
52. Note zur Integration der linearen Differentialgleichung
$$y^{(n)} = Ax^m y'' + Bx^{m-1} y' + Cx^{m-2} y.$$
S. Spitzer. Grun. Archiv XXX, 76.
53. Bemerkung zur Integration der Gleichung
$$x_1\,dx + x_2\,dx_1 + x_3\,dx_2 + x\,dx_3 = 0.$$
S. Spitzer. Grun. Archiv XXX, 83.
54. Integration der linearen Differentialgleichung
$$x^3(a_3+b_3x)\,y''' + x^2(a_2+b_2x)\,y'' + x(a_1+b_1x)\,y' + (a_0+b_0x)\,y = 0.$$
S. Spitzer. Zeitschr. Math. Phys. III, 55.
55. Integration der linearen Differentialgleichung
$$x^2(a_2+b_2x)\,y'' + x(a_1+b_1x)\,y' + (a_0+b_0x)\,y = 0.$$
S. Spitzer. Zeitschr. Math. Phys. III, 53.
56. Integration der Differentialgleichung
$$(a_2+b_2x)\,y'' + (a_1+b_1x)\,y' + (a_0+b_0x)\,y = 0.$$
S. Spitzer. Wien. Acad. Ber. XXV, 31. — XXVI, 449, 479.
57. Bemerkungen über die Integration der linearen Differentialgleichung
$$(a_2+b_2x)\,y'' + (a_1+b_1x)\,y' + (a_0+b_0x)\,y = 0.$$
S. Spitzer. Zeitschr. Math. Phys. III, 47.
58. *Sur l'intégration de quelques équations différentielles.* *Lobatto.* Grun. Archiv XXX, 292.
59. Eine Bemerkung über Integration linearer Differentialgleichungen. Weiler. Crelle LV, 274.
60. Ueber Herrn Spitzer's Abhandlung: die Integration mehrerer Differentialgleichungen betreffend, und die darin erhobenen Prioritätsansprüche. Petzval. Wien. Acad. Ber. XXVIII, 253.
61. Integration einer partiellen Differentialgleichung. S. Spitzer. Grun. Archiv XXX, 335.
62. Aufstellung der linearen Differentialgleichung, von welcher ein gewisses particuläres Integral bekannt ist. S. Spitzer. Zeitschr. Math. Phys. III, 178.

### Differentialquotient.

63. Entwickelung des $\mu^{\text{ten}}$ Differentialquotienten von $y = e^{ax^2}$. S. Spitzer. Grun. Archiv XXX, 79.
64. Zur Theorie der höheren Differentialquotienten. Schlömilch. Zeitschr. Math. Phys. III, 65.

### Differentialrechnung.

65. Ueber einige Aufgaben von Bertrand. Mathieu. *N. ann. math. XVII,* 12.

### Differenzengleichungen.

66. Ueber die Auflösung der linearen endlichen Differenzengleichungen mit variabeln Coefficienten. G. Zehfuss. Zeitschr. Math. Phys. III, 175.

## E.

### Elasticität.

67. *Mémoire sur le travail des forces élastiques dans un corps solide élastique déformé par l'action de forces extérieures. Clapeyron. Compt. rend. XLVI,* 208.
68. *Du travail des forces élastiques dans l'interieur d'un corps solide et particulièrement des ressorts. Phillips. Compt. rend. XLVI,* 333, 440.
69. *Etablissement élémentaire des formules de la torsion des prismes élastiques. De Saint-Venant. Compt. rend. XLVI,* 34.
70. *Nouveau principe sur la distribution des torsions dans les systèmes élastiques. Ménabréa. Compt. rend. XLVI,* 1056.

### Ellipse.

71. Der Satz des Ptolemäus auf die Ellipse erweitert. Grunert. Grun. Archiv XXX, 109.
72. Ueber eine Eigenschaft der Ellipse. O. Böklen. Grun. Archiv XXX, 436.
73. *Sur les diamètres conjugués de l'ellipse. Gerono. N. ann. math. XVII,* 125.

74. Ueber den Flächeninhalt in oder um eine Ellipse beschriebener Dreiecke und Vierecke. Grunert. Grun. Archiv XXX, 11.
75. Merkwürdige Construction des grössten in, und des kleinsten um eine Ellipse beschriebenen Vielecks von gegebener Seitenzahl. Grunert. Grun. Archiv XXX, 84. – S. Spitzer, ibid. 352.
Vergl. Cotes'scher Lehrsatz; Rectification; Trisection des Winkels 222.

**Elliptische Functionen.**

76. *Transformation de Landen considérée géométriquement.* Küpper. Crelle LV, 89.
77. *On the cubic transformation of an elliptic function.* Cayley. *Phil. Mag. XV,* 363.
78. *Sur quelques formules relatives à la transformation des fonctions elliptiques.* Hermite. *Compt. rend. XLVI,* 171. – *Journ. Mathém. XXIII,* 26.
79. *Sur quelques formules pour la transformation des intégrales elliptiques.* Cayley. Crelle LV, 15.
Vergl. Gleichungen 105, 106, 107, 108.

**Evolution.**

80. *Sur les centres successifs de courbure des lignes planes.* Haton de la Goupillière. *Compt. rend. XLVI,* 930, 979.
Vergl. Cycloide 44.

**F.**

**Factorielle.**

81. *On the factorial notation.* Elphinstone. *Quart. Journ. Math. II,* 254.

**Functionalgleichungen.**

82. Ueber die Gleichung $\varphi(x) + \varphi(y) = \psi(x f(y) + y f(x))$. Clausen. Grun. Archiv XXX, 170.

**Functionen.**

83. Ueber die lineare Abhängigkeit von Functionen einer einzigen Veränderlichen. Christoffel. Crelle LV, 281.
84. *Sur une question du calcul inverse des différences.* Terquem. *N. ann. math XVII,* 122.
85. Ueber die approximative Darstellung gegebener Functionen. Schlömilch. Zeitschr. Math. Phys. III, 124.
86. Ueber die Function $f(n) = 1 - \frac{1}{3^n} + \frac{1}{5^n} - \frac{1}{7^n} + \ldots.$ Clausen. Grun. Archiv XXX, 166. — Schlömilch. Zeitschr. Math. Phys. III, 130.

**G.**

**Gammafunction.**

87. Einfache Herleitung des Gauss'schen Ausdrucks für $\Gamma(\mu)$. Zehfuss. Grun. Archiv XXX, 441.

**Geodäsie.**

88. *Sur le développement modifié de Flamsteed.* A. Tissot. *Compt. rend. XLVI,* 646.

**Geometrie (höhere).**

89. Ueber die Perpendikel beim Dreiecke. Oxamendi. *N. ann. math. XVII,* 19.
90. Vermischte Sätze und Aufgaben. Steiner. Crelle LV, 356.
91. *Propriétés des figures homographiques dans l'espace.* De Jonquières. *N. ann math. XVII,* 51.
92. *Note sur un problème de géométrie à trois dimensions.* De Jonquières. *Journ. Mathém. XXIII,* 53.
93. *Sur un théorème de Brianchon.* Mention. *Petersb. Acad. Bull. XVI,* 280.

**Geschichte der Mathematik.**

94. *Les coniques d'Appollonius.* Housel. *Journ. Mathém. XXIII,* 153.
95. *Sur les Porismes d'Euclide.* Breton (de Champ.). *Journ. Mathém. XXIII,* 89.
96. Ueber ein arabisches Astrolabium. Wöpcke. Berl. Acad. Ber. 1858, 50.
97. Ramus in Heidelberg. Cantor. Zeitschr. Math. Phys. III, 133.
98. Ueber wieder aufgefundene Schriften Vieta's. Fillon. *Compt. rend. XLVI,* 57.
99. *Sur les tables logarithmiques de Prony.* Biot. *Compt. rend. XLVI,* 911. — Le Verrier, *ibid.* 912. — Lefort, *ibid.* 994.

100. *Nécrologue d'Augustin Louis Cauchy*. Biot. Grun. Archiv XXX, 46.
101. *Sur la direction des coordinées*. Terquem. *N. ann. math. XVII*, 121.
102. *Origine du mot calculer*. Terquem. *N. ann. math. XVII, Bulletin de bibl.* 33.
Vergl. Quadratwurzel.

**Gleichungen.**

103. Auflösung dreier Gleichungen mit drei Unbekannten. Grunert. Grun. Archiv XXX, 470.
104. *Sur quelques théorèmes d'algèbre et la résolution de l'équation du quatrième degré*. *Hermite*. *Compt. rend. XLVI*, 961.
105. *Sur la résolution de l'équation du quatrième degré*. *Hermite*. *Compt. rend. XLVI*, 715.
106. *Sur la résolution de l'équation du cinquième degré*. *Hermite*. *Compt. rend. XLVI*, 508.
107. *Sur la résolution de l'équation du cinquième degré*. *Kronecker*. *Compt. rend. XLVI*, 1150.
108. Ueber Gleichungen des siebenten Grades. Kronecker. Berl. Acad. Ber. 1858, 287.
109. *Démonstration d'une proposition relative aux équations transcendantes*. *Gérono*. *N. ann. math. XVII*, 201.
110. Von der Auslösbarkeit ganzer rationalen Functionen $n^{ten}$ Grades in Factoren. Am Ende. Grun. Archiv XXX, 442.
111. *On certain researches of Euler*. *Cockle*. *Phil. Mag. XV*, 389.
112. Auflösung der algebraischen Gleichungen in Form bestimmter Integrale. R. Hoppe. Zeitschr. Math. Phys. III, 173.
Vergl. Combinatorik; Determinanten.

**Gleichungen, numerische.**

113. Ueber eine von transcendenten Operationen nicht abhängende Formel zur Auflösung des irreduciblen Falls bei den cubischen Gleichungen. Grunert. Grun. Archiv XXX, 135.
114. *Résolution numérique des équations du troisième degré*. *Castrogiovanni*. *Compt. rend. XLVI*, 668.
115. *Sur le nombre des racines réelles de l'équation* $x = A \cdot \sin x + B$. *Vanuson*. *N. ann. math. XVII*, 108.
116. Ueber die Auflösung der Gleichungen durch Näherung. Grunert. Grun. Archiv XXX, 54.
Vergl. Methode der kleinsten Quadrate 171.

## H.

**Homogene Functionen.**

117. Ueber ein die homogenen Functionen zweiten Grades betreffendes Theorem. Weierstrass. Berl. Acad. Ber. 1858, 207.
118. *On the simultaneous transformation of two homogeneous functions of the second order*. *Cayley*. *Quart. Journ. Math. II*, 192.
119. *Sur la théorie des formes cubiques à trois indéterminées*. *Hermite*. *Journ. Mathém. XXIII*, 37.
120. Theorie der homogenen Functionen dritten Grades von drei Veränderlichen. Aronhold. Crelle LV, 93.

**Hydrodynamik.**

121. Ueber Integrale der hydrodynamischen Gleichungen, welche den Wirbelbewegungen entsprechen. Helmholtz. Crelle LV, 25.

**Hyperbel.**

122. Ueber die gleichseitige Hyperbel und die ihr analoge Fläche zweiten Grades Küpper. Zeitschr. Math. Phys. III, 119.
Vergl. Trisection des Winkels 223.

## I.

**Imaginäres.**

123. Ueber die graphische Darstellung imaginärer Functionen. Siebeck. Crelle LV, 221.

124. *Note relative aux périodes d'une intégrale d'ordre quelconque.* *Marie.* *Compt. rend. XLVI,* 738.

### Integralrechnung.

125. Ueber das Integral $\int \frac{dx}{\sqrt{a+bx+cx^2}}$. Gauss. Grun. Archiv XXX, 229.

126. *Sur les intégrales multiples.* *Blanchet.* *Compt. rend. XLVI,* 892.

### Interpolation.

127. *Sur l'interpolation des valeurs fournies par les observations.* *Tchebychef.* *Petersb. Acad. Bull. XVI,* 353.

### Irrationalität.

128. *On the incommensurability of the perimeter and area of some regular polygons to the radius of the inscribed or circumscribed circle.* *Prouhet.* *Quart. Journ. Math. II,* 202.

## K.

### Kegelschnitte.

129. *Déterminer les axes d'une section conique par certaines conditions.* *Poudra.* *N. ann. math. XVII,* 162.
130. *Méthode rapide pour écrire les équations aux axes des lignes et surfaces du second ordre.* *Dostor.* Grun. Archiv XXX, 202.
131. Ueber einen Satz von Salmon. Laquière. *N. ann. math. XVII,* 11.
132. *Sur la constance d'un certain angle, dont le sommet est au foyer d'une conique.* *Cormet.* *N. ann. math. XVII,* 179. *Bergis.* *N. ann. math. XVII,* 180.
133. *Sur le nombre de points qui déterminent une courbe du second degré.* *Gerono.* *N. ann. math. XVII,* 77.
134. *On the system of conics which pass through the same four points.* *Cayley.* *Quart. Journ. math. II,* 206.
135. Ueber homofocale Kegelschnitte. Papin. *N. ann. math. XVII,* 55.
136. *Sur la théorie de deux coniques.* *G. Salmon.* *N. ann. math. XVII,* 83.
137. Ueber Unrichtigkeiten in einem früheren Aufsatze. Grunert. Grun. Archiv XXX, 474.
138. Lamarle's Construction des Krümmungskreises der Kegelschnitte. Grunert. Grun. Archiv XXX, 296.
139. Einige Bemerkungen über die Fusspunktslinien, insbesondere die der Kegelschnitte. Drobisch. Zeitschr. Math. Phys. III, 1.
140. *On the area of the conic section represented by the general trilinear equation of the second degree.* *Ferrers.* *Cayley.* *Quart. Journ. Math. II,* 217, 248.

Vergl. Determinanten in geometrischer Anwendung 50; Ellipse; Hyperbel; Kreis; Parabel.

### Kettenbrüche.

141. Darstellung des unendlichen Kettenbruches $x + \cfrac{1}{x+1+\cfrac{1}{x+2+\cfrac{1}{x+3+\ldots}}}$ in geschlossener Form. S. Spitzer. Grun. Archiv XXX, 81.

142. Darstellung des unendlichen Kettenbruches $2x+1+\cfrac{1}{2x+3+\cfrac{1}{2x+5+\ldots}}$ in geschlossener Form. S. Spitzer. Grun. Archiv XXX, 331.

### Kreis.

143. *Sur le cercle coupant orthogonalement trois autres cercles.* *Laquière.* *N. ann. math. XVII,* 238.
144. *Note on the conditions that the equation of the second degree should represent a circle or sphere.* *Ferrers.* *Quart. Journ. Math. II,* 267.

Vergl. Verwandtschaft 230.

### Krümmung.

145. Neue Darstellung der Theorie der Berührung und Krümmung der Curven. Grunert. Grun. Archiv XXX, 361.
Vergl. Analytische Geometrie des Raumes 10; Kegelschnitte 138; Ober ichen 179, 180.

### Krystallographie.

146. Ueber die graphische Kreismethode. L. Ditscheiner. Wien. Acad. Ber. XXVI, 279.
147. Ueber die graphische Parabelmethode. L. Ditscheiner. Wien. Acad. Ber. XXVIII, 93.
148. Ueber die graphische Hyperbelmethode. L. Ditscheiner. Wien. Acad. Ber. XXVIII, 134.
149. Ueber die Zonenflächen. L. Ditscheiner. Wien. Acad. Ber. XXVIII, 201.

## L.

### Logarithmen.

150. *Erreurs nombreuses qui existent dans les tables de logarithmes de Callet. Lefort et Hoüel. N. ann. math. XVII, Bulletin de bibl.* 41.
151. *On the formation of tables of logarithms of the trigonometrical ratios. Elphinstone. Quart. Journ. Math. II,* 222.
Vergl. Geschichte der Mathematik 99.

## M.

### Maxima und Minima.

152. Bemerkungen zur Theorie der Maxima und Minima. Richelot. Ast. Nachr. XLVIII, 273.
153. *Sur les questions de minima qui se rattachent à la représentation approximative des fonctions. Tchebychev. Petersb. Acad Bull. XVI,* 145.
154. *Recherches analytiques et expérimentales sur les alvéoles des abeilles. Brougham. Compt. rend. XLVI,* 1024.
155. *Théorème sur le centre du cercle inscrit à un triangle. Geropo. N. ann. math. XVII,* 152.
Vergl. Ellipse 74, 45.

### Mechanik.

156. *Sur les conditions d'équilibre d'une droite reposant sur une ellipse. Laquière. Fénéon. N. ann. math. XVII,* 195.
157. *Développements sur un chapitre de la mécanique de Poisson. Liouville. Journ. Mathém. XXIII,* 1; *Connaissance des Temps pour* 1859.
158. *On a class of dynamical problems. A. Cayley. Phil. Mag. XV,* 306.
159. *Sur un problème de mécanique. J. Liouville. Journ. Mathém. XXXIII,* 69. — *Addit. à la Con. d. Temps pour* 1860.
160. Ueber die Bewegung eines schweren Körpers auf einer Schraubenlinie. Schlömilch. Zeitschr. Math. Phys. III, 64.
161. *Mémoire sur une nouvelle théorie de la géométrie des masses et sur celle des axes principaux d'inertie. Haton de la Goupillière. Compt. rend XLVI,* 92.
162. Dynamische Untersuchungen über den Stoss der Körper. Poinsot. Zeitschr. Math. Phys. III, 143. — *Phil. mag. XV,* 161, 263, 349.
163. Ueber die Vertheilung der Elektricität anf Kugeln. Lobeck. Zeitschr. Math. Phys. III, 89.
164 Ueber Pendel mit Quecksilber-Compensation. J. Böhm. Wien. Acad. Ber. XXVI, 345.
165. *Sur la force nécessaire pour mouvoir une clef de robinet, ou un axe conique maintenu dans sa gaîne par la pression de la vapeur. Mahistre. Compt rend. XLVI,* 978.
166. *On the general laws of optical instruments. Maxwell. Quart. Journ. Math. II,* 233.
167. Zur Theorie der Beugungserscheinungen. Zehfuss. Grun. Archiv XXX, 92.
168. *Théorie mathématique du thermomultiplicateur. F. de la Provostaye. Compt. rend. XLVI,* 768.
169. Kleine Beiträge zur Undulationstheorie der Wärme. Mann. Zeitschr. Math. Phys. III, 57.
Vergl. Atomistik; Attraktion; Elasticität; Hydrodynamik; Schwerpunkt.

**Methode der kleinsten Quadrate.**

170. Zur praktischen Geometrie. Vorländer. Zeitschr. Math. Phys. III, 189.
171. Bemerkungen über das numerische Eliminiren bei geodätischen Operationen. Vorländer. Zeitschr. Math. Phys. III, 16.
172. *Stellar Photography. Bond.* Astr. Nachr. XLVIII, 1.
Vergl. Interpolation.

**Mittelgrössen.**

173. Ueber das arithmetische, das geometrische und das harmonische Mittel. Schlömilch. Zeitschr. Math. Phys. III, 187.

## O.

**Oberflächen.**

174. *Note sur la théorie des surfaces réglées. D. Bonnet. Compt. rend XLVI,* 906.
175. *Sur le glissement et le roulement des corps solides et sur quelques propriétés des surfaces. H. Resal. Compt. rend. XLVI,* 801.
176. *Note relative au mémoire de M. Resal. Bertrand. Compt. rend. XLVI.* 819.
177. *Sur une surface enveloppe. Chanson et Challiot. N. ann. math. XVII,* 113.
178. Ueber Flächen von gewisser Krümmung. Weingarten. Zeitschr. Math. Phys. III, 43.
179. *Sur les surfaces dont les lignes de courbure sont planes ou sphériques. Picart. Compt. rend. XLVI,* 356.
180. *Sur la surface lieu des centres de courbure principaux d'une surface courbe. Curtis. Journ. Mathém. XXIII,* 79.
181. *Equation générale des surfaces, qui passent par un point donné et par l'intersection de deux surfaces données Challiot. N. ann. math. XVII,* 191.

**Oberflächen zweiten Grades.**

182. *Méthode des sections planes pour la discussions des lignes et surfaces du second ordre. Doxtor.* Grun. Archiv XXX, 185.
183. *Sur l'existence du système conjugué rectangulaire dans les surfaces du second degré. E Brassinne. Journ. Mathém. XXIII,* 236.
184. Ueber einige geometrische Sätze von Flächen. Böklen. Zeitschr. Math. Phys. III, 45.
185. *Extension du théorème de M. Dandelin. Sauze. N. ann. math. XVII,* 33.
186. Ueber Focalpunkte. Heilermann. Berl. Acad. Ber. 1858, 270.
187. *On the equation of the surface of centres of an ellipsoid. Salmon. Quart. Journ. Math II,* 217.
188. *Propositions diverses sur l'hyperboloide à une nappe. Poudra. N. ann. math. XVII,* 158.
189. *Détermination du sommet et des axes drincipaux d'un paraboloide. Housel. N. ann. math. XVII,* 223.
Vergl. Determinanten in geometrischer Anwendung 50; Geometrie (höhere) 92; Kegelschnitte 130.

## P.

**Parabel.**

190. Ueber die Parabel, welche eine Ellipse berührt, mit welcher sie einen Brennpunkt gemeinschaftlich besitzt. Pepin. *N. ann. math. XVII,* 60.

**Partialbrüche.**

191. *Sur la théorie de la décomposition des fractions rationelles. E. Rouché. Compt. rend. XLVI,* 540.

**Perspective.**

192. *An exemple of the instinct of constructive geometry. Monro. Quart. Journ. Math. II,* 225.

**Planimetrie.**

193. Ueber einen planimetrischen Satz des Fermat. Lindmann. Grun. Archiv XXX, 120. — Heinen und Siebel. Grun. Archiv XXX, 246.
194. Ueber eine durch einen Eckpunkt eines Dreiecks gezogene Linie. Grunert. Grun. Archiv XXX, 355. — König. Grun. Archiv XXX, 479.

195. *Théorème sur le quadrilatère.* Legrandais. *N. ann. math. XVII,* 229.
196. *Théorème sur deux cercles se touchant extérieurement.* Boischevallier. *N. ann. math. XVII,* 177.
Vergl. Maxima und Minima 155.

**Potential** vergl. Attraktion; Hydrodynamik.

**Potenzsumme.**

197. *Note on a formula in finite differences.* Cayley. *Quart. Journ. Math. II,* 198.

## Q.

**Quadratur.**

198. Elementare Herleitung des Flächeninhaltes eines elliptischen Sectors. Grunert. Grun. Archiv XXX, 472.
199. *Sur l'aire comprise entre deux paraboles du troisième et du second ordre.* Dellac. *N. ann. math. XVII,* 205. — Dupain. *N. ann. math. XVII,* 207.
200. Quadratur der cubischen Parabel. Laquière und Fénéon. *N. ann. math. XVII,* 5.

**Quadratwurzel.**

201. Ueber zwei besondere Methoden der Ausziehung der Quadratwurzel mit besonderer Rücksicht auf Pietro Antonio Cataldi. Grunert. Grun. Arch. XXX, 275.
202. *Extraction abrégée de la racine carrée.* Beynac. *N. ann. math. XVII. Bulletin de bibl.* 11. — Catalan. *N. ann. math. XVII,* 232.

**Quotial.**

203. Ein Analogon für die Taylor'sche Reihe. Zehfuss. Grun. Archiv XXX, 466.

## R.

**Rectification.**

204. Neue Methode, die Ellipse zu rectificiren. Grunert. Grun. Archiv XXX, 213.

**Reihen.**

205. Ein neues mathematisches Paradoxon. Zehfuss. Grun. Archiv XXX, 229.
206. *Sur le développement des fonctions en séries ordonnées suivant les dénominateurs des réduites d'une fraction continue.* E. Rouché. *Compt. rend. XLVI,* 1221.
207. Ueber die Reihe $1+\frac{x}{1}+\frac{x^2}{1.3}+\frac{x^3}{1.3.5}+\ldots$ Schlömilch. Zeitschr. Math. Phys. III, 180.
Vergl. Anomalie.

## S.

**Schwerpunkt.**

208. *Sur le centre de gravité d'un dé.* Chanson. *N. ann. math. XVII,* 182.

**Sphärik.**

209. *Formules fondamentales de l'analyse sphérique.* Vannson. *N. ann. math. XVII,* 65, 99, 140, 163, 209.

**Stereometrie.**

210. *Note sur la théorie des polyèdres.* Poinsot. *Compt. rend. XLVI,* 65.
211. *Sur le nombre possible de polyèdres réguliers.* Bertrand. *Compt. rend. XLVI,* 79.
212. Ueber den körperlichen Inhalt schief abgeschnittener dreiseitiger Prismen. Grunert. Grun. Archiv XXX, 118.
213. Neue Formel für den körperlichen Inhalt schief abgeschnittener Prismen. Grünert. Grun. Archiv XXX, 453.
214. Stereographische Projection. Heis. Grun. Archiv XXX, 354.

## T.

**Tabellen.**

215. Hilfstafeln für die Berechnung der speciellen Störungen. Zech. Astr. Nachr. XLVIII, 241.
Vergl. Geschichte der Mathematik 99; Logarithmen.

### Trigonometrie.

216. Ableitung der Grundformel der Trigonometrie in völlig allgemeiner Giltigkeit aus den Elementen der Coordinatenlehre. v. Riese. Grun. Archiv XXX, 143.
217. Ueber die Relation, die zwischen den Abschnitten der Seiten eines Dreiecks besteht, welche durch sich in einem Punkte schneidende Gerade gebildet werden. Durège. Grun. Archiv XXX, 241.
218. Eine Aufgabe vom Dreiecke. Challiot. Legrandais. *N. ann. math. XVII*, 9, 63.
219. *Théorème sur deux triangles semblables. Malinvaud. N. ann. math. XVII*, 123.
220. *Théorème fondamental de la trigonométrie sphérique. Patry. N. ann. math. XVII*. 208.
221. *Règle mnémonique pour écrire les formules de Delambre. G. Dostor.* Grun. Archiv XXX, 467.

### Trisection des Winkels.

222. Ueber drei geometrische Aufgaben. O. Böklen. Grun. Archiv XXX, 434.
223. Neue geometrische Auflösung der Aufgabe von der Dreitheilung des Winkels. Tietz. Grun. Archiv XXX, 114.

## U.

### Ultraelliptische Functionen.

224. Ueber die Substitution

$$(ax^2+2bx+c)y^2+(a'x^2+2b'x+c')y+a''x^2+b''x+c''=0$$

und über die Reduction der Abel'schen Integrale erster Ordnung in die Normalform. C. G. J. Jacobi. Crelle LV, 1.
225. *Sur l'intégration des équations ultra-elliptiques. Brioschi.* Crelle LV, 56.

## V.

### Variationsrechnung.

226. Ueber diejenigen Probleme der Variationsrechnung, welche nur eine unabhängige Variable enthalten. Clebsch. Crelle LV, 335.
227. Ueber die Transformationen, welche in der Variationsrechnung zur Nachweisung grösster oder kleinster Werthe dienen. Minding. Crelle LV, 300.
228. Ueber die Reduction der zweiten Variation auf ihre einfachste Form. Clebsch. Crelle LV, 254.

### Verwandtschaft.

229. *Théorèmes homographiques. Lafitte. N. ann. math. XVII*, 48.
230. Ueber conjugirte Kreise. Möbius. Sächs. Acad. Ber. X, 1.

Vergl. Kegelschnitte 139.

## Z.

### Zahlentheorie.

231. *Nombre des solutions entières et positives de l'équation $ax+by=n$. Rassicod. N. ann. math. XVII*, 126.
232. Zwei ganze Zahlen, deren Quotient ihrer Differenz gleich ist. Grunert. Grun. Archiv XXX, 230.
233. Beweis des Fermat'schen Satzes nach Cauchy. Grunert. Grun. Archiv XXX, 357.
234. Ueber einen Satz von ganzen Zahlen. Durège. Grun. Archiv XXX, 163.
235. Zerlegung einer Zahl in vier gerade Quadrate. Zehfuss. Grun. Archiv XXX, 466.
236. *Sur le produit de quatre nombres entiers consécutifs. P. A. G. N. ann math XVII*, 98.
237. *Du produit de plusieurs nombres consécutifs. E. Mathieu. N. ann. math. XVII*, 235.
238. *Sur les nombres premiers de la forme $8\mu+3$. Liouville. Journ. Mathém. XXIII*, 84.
239. Ueber eine zahlentheoretische Function. Stern. Crelle LV, 193.
240. *Généralisation d'une formule concernant la somme des puissances des diviseurs d'un nombre. J. Liouville. Journ. Mathém. XXIII*, 63.
241. *Note sur la composition du nombre 47 par rapport aux vingt-troisièmes racines de l'unité. Cayley.* Crelle LV, 192.
242. *Sur quelques formules générales qui peuvent être utiles dans la théorie des nombres. J. Liouville. Journ. Mathém. XXIII*, 143, 193, 201.
243. Ueber die allgemeinen Reciprocitätsgesetze der Potenzreste. Kummer. Berl. Acad. Ber. 1858, 158.

# Literaturzeitung.

**Die Elementar-Mathematik** für den Schulunterricht bearbeitet von LUDWIG KAMBLY, Professor am Gymnasium zu St. Elisabeth in Breslau. Vollständig in vier Theilen:

Erster Theil: Arithmetik und Algebra. Dritte, vermehrte und verbesserte Auflage. Breslau, Ferdinand Hirt's Verlag. 1857.

Zweiter Theil: Planimetrie. Fünfte, verbesserte Auflage. Mit vier Tafeln lithographirter Abbildungen. 1858.

Dritter Theil: Ebene und sphärische Trigonometrie. Dritte, verbesserte Auflage. Mit einer Tafel lithographirter Abbildungen. 1857.

Vierter Theil: Stereometrie. Zweite, verbesserte Auflage. Mit vier Tafeln lithographirter Abbildungen. 1858.

Die vorliegende Elementar-Mathematik soll, wie der Verfasser selbst bemerkt, nicht ein ausführliches Lehrbuch für den Selbstunterricht oder für tiefer eingehende Studien, sondern nur ein Leitfaden für die Schule sein. Der Verfasser hat sich aus diesem Grunde auf das Unentbehrlichste beschränkt und da er vorzugsweise die Bedürfnisse der Gymnasien im Auge gehabt hat, so war auch die Zeit, die auf diesen dem mathematischen Unterricht eingeräumt ist, für die Menge des aufzunehmenden Stoffes maassgebend. Mit der Einschränkung des mathematischen Unterrichts auf ein enges Gebiet kann man sich gewiss nur einverstanden erklären, nur muss das Wenige dafür um so genauer und gründlicher durchgenommen werden. Soll der Leitfaden dem Schüler die Ausarbeitung eines vollständigen Heftes ersetzen und er denselben mit Nutzen zur Vorbereitung auf die Stunden und zur Wiederholung gebrauchen können, so muss er mit einer gewissen Ausführlichkeit geschrieben sein. Der Verfasser hat hierbei jedenfalls das richtige Maass getroffen. Die Form der Darstellung ist in allen vier Theilen die dogmatische. Wenn der Referent sich mit der Wahl dieser Darstellungsweise nicht ganz einverstanden erklären kann, so will er hiermit den Streit über die Wissenschaftlichkeit der dogmatischen Form und über die Zweckmässigkeit derselben in didaktischer Beziehung nicht erneuern, zu-

mal da bei der Anordnung des Inhalts ein heuristischer Gedankengang im Wesentlichen bestimmend gewesen ist. Aber man braucht kein Gegner der synthetischen Methode zu sein, um die bis zur Ermüdung getriebene Wiederholung der Wörter: Lehrsatz, Behauptung, Beweis, Folgerung, Zusatz, Anmerkung u. s. w. weder schön noch unbedingt nothwendig zu finden. Dass man auch ohne dogmatische Form kurz, wissenschaftlich streng und systematisch schreiben kann, und eine heuristische Gedankenentwickelung auch ohne eine unerträgliche Breite oder einen ermüdenden Wortschwall möglich ist, davon geben die üblichen Darstellungen der nicht elementaren Theile der Mathematik und der mit ihr verwandten Wissenschaften wie z. B. die Mechanik einen glänzenden Beweis. Freilich einen guten Styl zu schreiben ist auch in der Mathematik nicht leicht und das erklärt uns einigermaassen die Hartnäckigkeit, mit der man in den Büchern über die Elementar-Mathematik an der dogmatischen Form hängt. Auch können wir nicht zugeben, dass bei einem guten Style die individuelle Bedeutung der Sätze verloren gehe, müssen vielmehr behaupten, dass gerade bei einer ungezwungenen und ungekünstelten Darstellung die wichtigsten und fruchtbarsten Sätze in ihrer Bedeutung sich am nachdrücklichsten hervorheben lassen.

Im ersten Theile, welcher die Arithmetik und Algebra enthält, ist der Verfasser seinem Vorsatze, dem Inhalt eine solche Anordnung zu geben, „dass man an ihr einen stetigen Fortschritt der Entwickelung, die nothwendige Bewegung des mathematischen Denkens nachweisen kann," nicht immer treu geblieben. So wird die Untersuchung der Verbindung der (absoluten ganzen) Zahlen zu Summen, Differenzen, Producten und Quotienten unterbrochen durch die Erklärungen von Potenz und Wurzel, die vor der Erklärung des Quotienten zu stehen kommen. Wollte man den Grund gelten lassen, dass die Definition der Potenz und deren unmittelbare Folgerungen nur einen speciellen Fall der Multiplication betreffen und sich dieser eng anschliessen, so müsste ja auch das Product unmittelbar nach der Summe, als specieller Fall derselben, genannt werden, und damit wäre immer noch nicht erklärt, warum Differenz und Wurzel vor dem Product und vor dem Quotienten erwähnt werden. Soll jede neue Rechnungsart zunächst als ein besonderer Fall der vorhergehenden erscheinen, was doch zu einem stetigen Fortschritt der Entwickelung gehört, so wäre der Erklärung des Products in § 12 die Auffassung desselben als Summe gleicher Posten vorzuziehen. Nachdem die Division auf eine Erweiterung des Begriffs der Zahl in der Weise geführt hat, dass er auch gebrochene Zahlen umfasst, ist es natürlich nothwendig, die früheren Definitionen der Multiplication und Division zu erweitern und die Gültigkeit der früheren Lehrsätze für gebrochene Zahlen zu erweisen und zwar in aller Strenge. Dass eine pädagogische Rücksicht es war, die den Verfasser veranlasste, die Erweiterung der gefundenen Gesetze auf eigentliche Brüche nicht in aller Strenge zu erweisen,

muss uns Wunder nehmen. Wenn schon hier in Rücksicht auf die jugendliche Kraft der Schüler die Strenge aufgegeben werden soll, so fragen wir, welchen Zwecken der mathematische Unterricht dient? Nach der Meinung des Referenten treibt man mit einem Schüler erst dann allgemeine Arithmetik, nachdem er in dem sogenannten Zahlenrechnen die nöthige Fertigkeit erlangt hat. Ist dies aber der Fall, so sind die Schwierigkeiten, welche der Eintritt in die allgemeine Arithmetik dem jugendlichen Geiste bereitet, wahrhaftig nicht so gross, als dass er sie nicht bewältigen könnte. Und heisst es denn Schwierigkeiten entfernen, indem man die Strenge zum Opfer bringt? Strenge allein gewährt auf die Dauer dem Schüler volle Befriedigung und man täuscht sich, wenn man glaubt, dass ihm eine sogenannte populäre Darstellung zusagt. Wir müssen noch einige Punkte anführen, wo der Verfasser, ohne durch die Sache dazu genöthigt zu sein, von der mathematischen Strenge abgewichen ist. Nach der Erklärung des Quotienten in § 17 muss der Divisor immer eine unbenannte Zahl sein; gleichwohl ist in Anmerkung 2 desselben § von einem Quotienten die Rede, dessen Glieder benannte Zahlen sind. Die Strenge erfordert hier nicht nur eine Erklärung, was man unter dem Quotienten gleichnamiger Zahlen, sondern was man unter dem Quotienten gleichartiger Grössen überhaupt zu verstehen habe. Diese Erklärung würde freilich zum Messen der Grössen oder zur Angabe ihres (geometrischen) Verhältnisses und somit schliesslich zu den irrationalen Zahlen geführt haben, vor denen aber der Verfasser, wahrscheinlich aus pädagogischen Rücksichten, eine gewaltige Scheu zu haben scheint. Dass es irrationale Zahlen giebt, erfährt der Schüler erst in § 50, nachdem die Lehre von den Verhältnissen und Proportionen und die ganze Lehre von den Potenzen und Wurzeln vorgetragen worden ist. Verweist man die Lehre von den Verhältnissen und Proportionen in die Arithmetik, so folgt sie naturgemäss auf die Lehre von den Producten und Quotienten. Das Verhältniss incommensurabler Grössen führt dann auf die Irrationalzahlen und macht somit eine Erweiterung des Zahlbegriffs nöthig. Der Nachweis, dass alle für Rationalzahlen bewiesenen Gleichungen auch für Irrationalzahlen gelten, darf nicht ausgelassen werden. Der Verfasser übergeht, wie schon gesagt, die Irrationalzahlen, und lässt sich in der Lehre von den Verhältnissen und Proportionen nur auf Zahlen, Verhältnisse und Zahlenproportionen ein. Der Bezeichnung und dem allgemeinen Gebrauch entsprechend wäre es gewesen, den Verhältnissexponenten dem Quotienten des Vordergliedes durch das Hinterglied gleich zu setzen und nicht umgekehrt; ein Nutzen erwächst jedenfalls nicht aus dieser Auffassung. Warum § 23 und § 24, die von der Null und dem Unendlichgrossen und Unendlichkleinen handeln, zwischen die Lehre von den Producten und Quotienten und die Lehre von den Verhältnissen und Proportionen eingeschaltet sind, begreift man nicht recht; unsrer Ansicht nach gehören sie an die Spitze des zweiten Abschnitts, der von den relativen oder algebraischen Zahlen han-

delt. Die Ausdrücke „algebraische Zahlen," „algebraische Addition," „algebraische Subtraction" u. s. w. zu vermeiden ist wohl wünschenswerth, indessen für die jetzige Terminologie schwieriger durchzuführen, jedenfalls ist es aber thunlich den Namen Algebra nur für die Lehre von den algebraischen Gleichungen beizubehalten, wie es ja auch so ziemlich allgemein Gebrauch geworden ist. — In § 53 sagt der Verfasser: „Eine gerade Wurzel aus einer negativen Zahl ist unmöglich, weil keine positive und negative Zahl, ins Quadrat oder in eine andere gerade Potenz erhoben, eine negative Zahl hervorbringen kann." Hieran schliesst er die Erklärung: „Solche gar nicht existirende, unmögliche Wurzeln werden imaginäre, und im Gegensatz zu ihnen alle übrigen Zahlen reelle Zahlen genannt." Nun ist es richtig, dass, so lange der Zahlbegriff blos reelle Zahlen umfasst, eine gerade Wurzel aus einer negativen Zahl unmöglich d. h. keine reelle Zahl ist, ebenso wie es unmöglich ist, so lange man nur absolute Zahlen kennt, einen Unterschied anzugeben, dessen Subtrahend grösser als der Minuend ist. In beiden Fällen liegt in dieser Unmöglichkeit die Aufforderung den Begriff der Zahl zu erweitern; obige Erklärung ist daher nicht statthaft. Von etwas, was gar nicht existirt und unmöglich ist, lässt sich überhaupt keine Erklärung geben; aber in der That sind die imaginären Wurzeln etwas Existirendes und folglich Mögliches — unmöglich sind sie denn doch nur innerhalb eines zu engen Begriffs. — Im dritten Abschnitt, der von den Logarithmen handelt, finden wir bei den numerischen Beispielen siebenstellige Logarithmen angewendet und entnehmen daraus, dass der Verfasser die gleichen Tafeln auch bei seinem Unterrichte anwendet. Man muss sich wirklich wundern, dass siebenstellige Logarithmentafeln noch so oft in unseren Schulen angetroffen werden, da doch gegen ihr Beibehalten so viele und gewichtige Gründe sprechen und auch oft genug schon geltend gemacht worden sind. Für die Schule zunächst empfehlen sich Tafeln mit möglichst wenig Bruchstellen nicht nur durch den geringen Umfang und die Uebersichtlichkeit, sondern auch durch den Umstand, dass der Schüler bei dem Gebrauch solcher Tafeln in das Wesen der Interpolation besser eindringen muss, was ihn befähigt auch andere mathematische Tafeln von abweichender Einrichtung zu gebrauchen. Ferner darf wohl die nicht unbedeutende Zeitersparniss in Anschlag gebracht werden, die hierbei keineswegs auf Kosten der Gründlichkeit erkauft wird, da in den meisten Fällen Tafeln mit vier oder fünf Stellen diejenige Genauigkeit geben, welche den einer Aufgabe zu Grunde liegenden Zahlen und somit der Genauigkeit des daraus abgeleiteten Resultates entsprechen. Bei jeder numerischen Rechnung kommt es darauf an das Endergebniss mit dem geringsten Aufwand von Mitteln zu erreichen und solche einfache und ausreichende Mittel sind vier- oder fünfstellige Logarithmentafeln. Zuletzt ist für die Schule auch der geringere Preis kleiner Tafeln nicht ausser Acht zu lassen.

Was die Logarithmen von Decimalbrüchen anlangt, so halten wir, mit

Rücksicht auf § 63, folgende Bemerkungen für die Praxis des Rechnens, obwohl sie nicht neu sind, nicht für überflüssig: Der Logarithmus eines Decimalbruchs ist negativ. Um negative Logarithmen zu vermeiden, kann man zwei Wege einschlagen. Der erste Weg besteht darin, dass man negative Charakteristiken einführt; z. B.

$$\log 0{,}25 = \log \frac{25}{100} = \log 25 - \log 100 = 1{,}39794 - 2 = 0{,}39794 - 1.$$

Hierbei bleibt die Mantisse positiv. Diese Art die Logarithmen der Decimalbrüche auszudrücken verlangt aber auch das Minuszeichen und fordert Aufmerksamkeit, um sich in den zwei entgegengesetzten Operationen, der Addition der Mantisse und der Subtraction der Charakteristik, nicht zu irren. — Der zweite Weg, welcher auch negative Kennziffern vermeidet, verdient allgemein befolgt zu werden. Da es in keiner Rechnung vorkommen kann, dass man sich um 10000 Millionen irrt, so vermehre man, wenn es nöthig ist, die Charakteristik um 10 Einheiten, um sie immer positiv zu haben. Man schreibe also

$$\log 0{,}25 = \log \frac{25}{100} = 9{,}39794, \log 0{,}025 = \log \frac{25}{1000} = 8{,}39794,$$
$$\log 0{,}0025 = \log \frac{25}{10000} = 7{,}39794$$

u. s. w. Hieraus folgt die Regel: um die Kennziffer des Logarithmus eines Decimalbruchs zu finden, hat man nur nöthig die Anzahl der Nullen, welche im gegebenen Bruche unmittelbar hinter dem Komma stehen, von der Zahl 9 abzuziehen. — Hat man umgekehrt zu dem Logarithmus eines Decimalbruchs diesen Bruch zu suchen, so schreibe man eine Null hin und lasse auf dieselbe das Komma und so viele Nullen folgen, als Einheiten an der Kennziffer fehlen, um sie zu 9 zu ergänzen; hierauf suche man, ohne Rücksicht auf die Kennziffer, in den Tafeln die zur Mantisse gehörige Zahl und hänge diese den schon hingeschriebenen Nullen an. — Da der Logarithmus eines Decimalbruchs stets eine Kennziffer hat, die kleiner als 10 ist, so braucht man bei der Addition der Logarithmen von Decimalbrüchen auf die Zehner der Kennziffer der Summe nicht Rücksicht zu nehmen. Man kann dieselben stets weglassen. Diese Regel gilt auch noch, wenn unter den Logarithmen, die zu addiren sind, sich solche von Zahlen finden, die grösser als die Einheit sind; z. B.

$$\log (0{,}25 \times 0{,}2) = \log 0{,}25 + \log 0{,}2; \quad \log (0{,}25 \times 12) = \log 0{,}25 + \log 12$$

$$\begin{array}{rl} \log 0{,}25 = & 9{,}39794 \\ \log 0{,}2 = & \underline{9{,}30103} \\ \text{Summe} = & 18{,}69897, \end{array} \qquad \begin{array}{rl} \log 0{,}25 = & 9{,}39794 \\ \log 12 = & \underline{1{,}07918} \\ \text{Summe} = & 10{,}47712, \end{array}$$

wofür man schreibt $8{,}69897 = \log 0{,}05$; wofür man schreibt $0{,}47712 = \log 30$.

Hat man zwei Logarithmen zu subtrahiren, so wird man, wenn es nöthig sein sollte, die Kennziffer des Minuenden um 10 Einheiten erhöhen; z. B.

$$\log \frac{3}{4} = \log 3 - \log 4, \quad \log 3 = 0,47712$$
$$\log 4 = 0,60206$$
$$\text{Unterschied} = 9,87506 = \log 0,75;$$
$$\log \frac{0,06}{0,12} = \log 0,06 - \log 0,12, \quad \log 0,06 = 8,77815$$
$$\log 0,12 = 9,07918$$
$$\text{Unterschied} = 9,69897 = \log 0,5.$$

Hat man einen Decimalbruch auf eine gegebene Potenz zu erheben, seinen Logarithmus also mit dem Potenzexponenten zu multipliciren, so lässt man im Producte ebenfalls die Zehner der Kennziffer weg. Es ist z. B. $(0,4)^2 = 0,16$ und $(0,4)^3 = 0,064$. Mit Hilfe der Logarithmen findet man

$$\log 0,4 = 9,60206; \quad \log 0,4 = 9,60206$$
$$2 \log 0,4 = 19,20412; \quad 3 \log 0,4 = 28,80618$$

wofür man schreibt

$$2 \log 0,4 = 9,20412; \quad 3 \log 0,4 = 8,80618$$
$$= \log 0,16 \quad\quad = \log 0,064.$$

Hat man aus einem Decimalbruch die $m^{te}$ Wurzel zu ziehen, also den Logarithmus derselben durch den Wurzelexponenten zu dividiren, so muss man zur Kennziffer des Logarithmus $(m-1)$ Zehner hinzudenken; z. B.

$$\log \sqrt[2]{0,16} = \frac{1}{2} \log 0,16; \quad\quad \log \sqrt[3]{0,064} = \frac{1}{3} \log 0,064$$
$$\log 0,16 = 9,20412 \quad\quad \log 0,064 = 8,80618$$
$$(= 19,20412) \quad\quad (= 28,80618)$$
$$\frac{1}{2} \log 0,16 = 9,60206 = \log 0,4; \quad \frac{1}{3} \log 0,064 = 9,60206 = \log 0,4.$$

Da die Sinus und Cosinus, sowie die Tangenten unter $45^0$ und die Contangenten über $45^0$, stets echte Brüche sind, so gilt für ihre Logarithmen Alles, was wir von den Logarithmen der Decimalbrüche gesagt haben; hiernach erklären sich auch die in den Tafeln stehenden Kennziffern der Logarithmen der Winkelfunctionen. — Hat die zu einem Logarithmus gehörige Zahl das negative Vorzeichen, so zeigt man dies durch ein $n$ an, welches man auf die letzte Decimale der Mantisse folgen lässt; z. B. $\log \cos 120^0 = 9,69897_n$.

Der vierte Abschnitt handelt von den Bestimmungsgleichungen und zwar von den algebraischen Gleichungen des ersten und zweiten Grades, von den Gleichungen mit mehren unbekannten Grössen, von den Exponentialgleichungen und von der Synthesis der Gleichungen d. i. von der Bildung der Gleichungen nach Bedingungen einer in Worten gegebenen Aufgabe. Im fünften Abschnitt findet man die arithmetischen und geometrischen Reihen und die Zinses-Zins-Rechnung und im sechsten Abschnitt die Combinationslehre und den binomischen Lehrsatz. Der Binomialsatz konnte auch ohne die Aufnahme der Combinationslehre entwickelt werden, diese aber zugelassen, durfte der construirende Theil derselben wohl nicht ganz übergangen werden. Die Decimalbrüche, die Kettenbrüche, die Lehre von der

Theilbarkeit der ganzen Zahlen und die Theorie der diophantischen Gleichungen sind auf 22 Seiten abgehandelt und in den Anhang verwiesen. Zweckmässig und wissenschaftlich zu gleicher Zeit wäre es gewesen, die Rechnungsoperationen mit Decimalzahlen auf die Rechnung mit Polynomen folgen zu lassen und an diese die Ausziehung der Quadrat- und Cubik-Wurzeln anzuschliessen. Ebenso gebührte den Elementen der Zahlentheorie ein Platz vor der Lehre von den Potenzen und Wurzeln.

Der zweite Theil, die Planimetrie, geht von der Betrachtung einer Geraden, zweier einander schneidender Geraden und der parallelen Linien (1. Abschnitt) über zur Betrachtung von drei und mehren sich schneidenden Geraden und der hierbei entstehenden ebenen Vielseiten, insbesondere der Triangel und Vierseite (2. Abschnitt). Hieran schliesst sich die Entwickelung der Eigenschaften des Kreises und der regulären Polygone (3. Abschnitt). Der folgende Abschnitt enthält die Lehre vom Flächeninhalt geradliniger Figuren, ihre Vergleichung, Verwandlung, Theilung und Ausmessung. Im fünften Abschnitte ist von der Proportionalität gerader Linien und der Aehnlichkeit geradliniger Figuren und von der Proportionalität gerader Linien am Kreise die Rede; im sechsten von der Berechnung der Seiten regulärer Polygone und der Rectification und Quadratur des Kreises. Der siebente Abschnitt enthält Aufgaben aus der rechnenden Geometrie und die Construction algebraischer Ausdrücke. Im Anhang endlich sind 156 Uebungsaufgaben zusammengestellt. Wir vermissen in diesem Theile, der es doch mit der Geometrie des Maasses zu thun hat, die Vergleichung der Längen gerader Linien und die Aufsuchung des numerischen Verhältnisses zweier commensurablen oder incommensurablen Linien, ferner die Angabe der Kennzeichen der Proportionalität zweier zusammengehörigen Grössenarten. Die Behandlung mehrer Sätze würde dadurch an Strenge gewonnen haben. Dass die einer Geometrie der Lage angehörenden Sätze ausgeschlossen sind, können wir bei dem Zwecke des Buches nicht tadeln.

Dem planimetrischen Theile entsprechend ist der Lehrgang des vierten Theiles, der Stereometrie. Die drei Abschnitte derselben behandeln 1) die Lage gerader Linien gegen Ebenen und gegen einander (gerade Linien, welche eine Ebene schneiden, und gerade Linien, welche einer Ebene parallel sind) und die Lage der Ebenen gegen einander (zwei einander schneidende, zwei parallele und drei oder mehr durch einen Punkt gelegte Ebenen), 2) die Körper in Beziehung auf ihre Grenzen und Durchschnittsfiguren, nämlich die ebenflächigen Körper (Prisma, Pyramide und die übrigen Polyeder) und die krummflächigen Körper (Cylinder, Kegel und Kugel), 3) die Ausmessung des räumlichen Inhalts und der Oberfläche der Körper, nämlich Prisma und Cylinder, Pyramide und Kegel und die Kugel. Den Anhang bildet die Construction der regulären Polyeder, die Berechnung ihrer Volumina und der Neigungswinkel ihrer Seitenflächen und Kanten, und 127 Uebungsaufgaben. — Als einen grossen Mangel dieses Theiles

müssen wir bezeichnen, dass die Congruenz (und Symmetrie) und Aehnlichkeit der Polyeder und der runden Körper ganz mit Stillschweigen übergangen ist.

Was endlich die ebene und sphärische Trigonometrie betrifft, die den dritten Theil von K.'s Elementar-Mathematik bildet, so finden wir zuerst einen kurzen Abriss der Goniometrie (Erklärung der trigonometrischen Linien und Functionen spitzer Winkel; Abhängigkeit der trigonometrischen Functionen eines Winkels von einander; Aenderung der trigon. Functionen durch Aenderung des Winkels, Functionen der Winkel über 90°; Functionen zusammengesetzter Winkel). In der ebenen Trigonometrie folgt auf die Auflösung der rechtwinkligen Triangel, die Auflösung der gleichschenkligen Triangel und der regulären Polygone und zuletzt die Auflösung der schiefwinkligen Triangel. Ein Anhang enthält eine Zusammenstellung der wichtigsten goniometrischen Formeln und Uebungsaufgaben, zum Theil mit Andeutung ihrer Auflösung. Die sphärische Trigonometrie behandelt zuerst die rechtwinkligen sphärischen Triangel, dann die sphärischen Triangel im Allgemeinen und schliesst mit der Berechnung ihres Flächeninhalts. Ein Anhang enthält noch eine Anzahl Uebungsaufgaben. — In der Goniometrie genügt es nicht, wie es in § 10 geschehen ist, den Zeichenwechsel der goniometrischen Functionen als blosse Sache des Uebereinkommens zu behandeln; vielmehr muss die Nothwendigkeit desselben nachgewiesen werden. Am einfachsten und anschaulichsten kann das aber auf folgende Weise geschehen. Man denke sich in einem mit dem Halbmesser $r$ beschriebenen Kreis zwei aufeinander senkrechte Durchmesser $AB$ und $CD$ gezogen und die Bogen in dem Sinne von $A$ nach $C$ positiv gerechnet. Ist dann $\alpha$ ein beliebiger positiver oder negativer Bogen, der bei $A$ anfängt und im Punkte $E$ endet, so ist sein Complement, $90^0 - \alpha$, ein bei $E$ anfangender und in $C$ endender Bogen. Bezeichnet man die Projection des Bogens $\alpha$ auf den Durchmesser $AB$ mit $a$, die Projection seines Complementes auf den andern Durchmesser mit $b$, so liegen die Werthe von $a$ und $b$ stets zwischen den Grenzen $0$ und $2r$. Bezeichnet man ferner die Projectionen des beweglichen Radius auf die Durchmesser $AB$ und $CD$ resp. mit $r'$ und $r''$, so stellen $r'$ und $r''$ die Cosinuslinie und die Sinuslinie vor, und man hat für sie Ausdrücke

$$r' = r - a \text{ und } r'' = r - b.$$

Aus diesen Gleichungen ergiebt sich, dass die Cosinuslinie $r'$ (und folglich $\cos\alpha = \frac{r'}{r}$) positiv ist für $a < r$, d. i. für Bögen, deren Endpunkte im ersten und vierten Quadranten liegen und negativ für $a > r$, d. i. für Bögen im zweiten und dritten Quadranten; dass ferner die Sinuslinie $r''$ (und folglich $\sin\alpha = \frac{r''}{r}$) positiv oder negativ ist, je nachdem $b < r$ oder $> r$, d. i. für Bögen, die bezüglich im ersten und zweiten oder im dritten und vierten Quadranten liegen. Kennt man den Zeichenwechsel der Sinus und Cosinus, so findet man aus den Definitionsgleichungen

$$\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = tg\,\alpha,\ \frac{1}{tg\,\alpha} = cotg\,\alpha,\ \frac{1}{\cos\alpha} = sec\,\alpha,\ \frac{1}{\sin\alpha} = cosec\,\alpha$$

leicht den Zeichenwechsel der übrigen Functionen. Am anschaulichsten tritt der Verlauf auch dieser Functionen, d. h. ihre Werth- und Zeichen-Aenderung, in den entsprechenden goniometrischen Linien hervor, deren Darstellung in einem Buche wie das vorliegende nicht fehlen sollte. — An § 12, wo die Formel für $\sin(\alpha+\beta)$ entwickelt wird, wollen wir schliesslich noch die Bemerkung knüpfen, dass man die Herleitung allgemein geltender Formeln füglich wohl auch in die Elemente der Goniometrie verweisen kann, zumal diese mit so wenig Schwierigkeiten verbunden, wie gerade hier. Am besten nimmt man hierzu die Formel

$$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}$$

zum Ausgangspunkt.

Wenn Referent an einem Schulbuche, von dem das Erscheinen mehrerer Auflagen beweist, dass es seinem Zwecke als Leitfaden für den mathematischen Unterricht an Gymnasien entsprechend befunden worden ist, die obigen Ausstellungen nicht hat unterdrücken wollen, hat er damit lediglich im Interesse der Sache zu handeln gemeint und er würde sich freuen, wenn sein Referat in diesem Sinne auch von dem verdienstvollen Verfasser dieses Leitfadens aufgefasst würde, eventuell bei einer folgenden Auflage des einen oder andern Theils einige Berücksichtigung erführe.

Dresden. Dr. Rudolf Hoffmann.

---

**Die Physik,** für den Schulunterricht bearbeitet von Albert Trappe, Oberlehrer an der Realschule zu Breslau. Zweite, wesentlich verbesserte und bereicherte Auflage. Mit 205 in den Text gedruckten Abbildungen. Breslau, Verlag von Ferdinand Hirt, 1858. 8. 246 S.

Die Verlagshandlung von Ferdinand Hirt in Breslau hat schon eine Reihe von Jahren der naturwissenschaftlichen Schulliteratur ihre Sorge gewidmet und ist bemüht gewesen für eine den Forderungen der Gegenwart entsprechende Vertretung der Naturwissenschaften mitzuwirken. Die Vorzüge ihrer Unternehmungen sucht sie in dem inneren Gehalte, der praktischen Brauchbarkeit, der vorzüglichen Ausstattung und dem überaus wohlfeilen Preise. Was namentlich die naturgeschichtlichen Bücher anlangt, so hat sie kein Opfer gescheut, der Anschauung durch naturgetreue künstlerisch ausgeführte Abbildungen zu Hilfe zu kommen.

Die vorliegende Physik von Trappe bildet einen Theil dieser Schulbibliothek. Sie macht keinen Anspruch auf den Namen eines Lehrbuches der Physik; sie ist nicht für den Selbstunterricht, sondern lediglich für den Schulunterricht geschrieben, und setzt einen Lehrer voraus, der des von ihm vorzutragenden Gegenstandes mächtig ist und, wie der Herr Verfasser

selbst bemerkt, seine Kenntnisse nicht erst aus dem Schulbuche zu schöpfen braucht.

Ueber den Zweck und den Gebrauch des Buches spricht sich der Herr Verfasser in der Vorrede aus. Das Buch soll dem Schüler zunächst das Ausarbeiten eines vollständigen Heftes ersparen; er soll nicht daraus lernen, sondern das Gelernte danach repetiren. Uebrigens enthält das Buch reichlichen Stoff, an welchem der Schüler unter Anleitung des Lehrers seine Kräfte üben kann. Der Menge des Stoffes nach, welche in dem Buche verarbeitet ist, kann es auch auf Anstalten benutzt werden, die dem physikalischen Unterrichte mehr Zeit widmen als das Gymnasium oder bisweilen auch die Realschule. Da überall die Anwendung der physikalischen Gesetze auf das praktische Leben berücksichtigt wird, so dürfte das Buch sich vielleicht auch auf Gewerbschulen als brauchbar erweisen, welche der Herr Verfasser bei Abfassung desselben allerdings zunächst nicht im Auge gehabt hat. Dem Zweck des Buches entsprechend, welches stets die Mitwirkung des Lehrers beim Unterricht voraussetzt, ist bei den Abbildungen der Instrumente alles Unwesentliche weggelassen und nur das Princip derselben dargestellt, welches der Schüler sich ja zunächst einprägen soll. Der Gesichtspunkt des Herrn Verfassers ist hierbei jedenfalls der richtige, denn Abbildungen von Instrumenten, wie sie meistens nur grosse physikalische Cabinete anschaffen können, lenken die Aufmerksamkeit des Schülers zu leicht von dem Wesentlichen ab und haben jedenfalls dann keine Bedeutung für ihn, sobald der Lehrer nicht mit ähnlichen Apparaten experimentiren kann. Dies wird aber wohl immer der Fall sein, denn ein und dasselbe Instrument hat in den verschiedenen Cabineten ein verschiedenes Aussehen.

Der Inhalt des Buches ist in folgende sechs Abschnitte vertheilt: I. Eigenschaften der Materie und Wirkungen der Massentheilchen auf einander; II. Ruhe und Bewegung der Körper; III. der Schall; IV. das Licht; V. die Wärme; VI. Magnetismus, Electricität, Galvanismus. Dass der zweite Abschnitt, welcher von den Gleichgewichts- und Bewegungsgesetzen der festen, flüssigen und luftförmigen Körper handelt, den andern Abschnitten gegenüber mit grösserer Ausführlichkeit bearbeitet ist, kann der Referent nur passend finden. Besonders verdient hervorgehoben zu werden, dass der Erläuterung der so wichtigen Begriffe der mechanischen Arbeit und der lebendigen Kraft einige Seiten gewidmet sind.

Nach der Einsicht, welche der Referent in die Physik von Trappe genommen hat, kann er das Buch mit vollem Rechte der Beachtung der Schulmänner anempfehlen. Der billige Preis von 25 Silbergroschen, für Schulbücher ein nicht unwichtiges Moment, mag zum Schluss noch besonders hervorgehoben werden.

Dresden. Dr. Rudolf Hoffmann.

---

**Lehrbuch der Stereometrie** zum Gebrauche an höheren Lehranstalten und beim Selbststudium von CARL SPITZ, Lehrer an der polytechnischen Schule in Carlsruhe. Mit 101 in den Text gedruckten Figuren. Leipzig und Heidelberg. C. F. Winter'sche Verlagshandlung. 1858. 8. 132 S.

Dieses Lehrbuch stimmt in Hinsicht der Art der Behandlung, sowie in Betreff der Reichhaltigkeit des zur Untersuchung gezogenen Materials mit des Verfassers Lehrbuch der ebenen Geometrie überein, das im zweiten Jahrgange dieser Zeitschrift besprochen worden ist. Der erste Abschnitt, §. 1—50, handelt von der Verbindung der geraden Linien und Ebenen im Raume. Analog den Sätzen der ebenen Geometrie findet man hier, und zwar vollständiger als es in vielen Lehrbüchern der Stereometrie der Fall ist, die Sätze über den Parallelismus stereometrischer Gebilde und über die Keile. Der zweite Abschnitt, §. 51—73, enthält in ziemlicher Ausführlichkeit die Lehre von den Ecken und berücksichtigt namentlich auch die Congruenz und Symmetrie derselben. In §. 65 und 72 wird die Bestimmung der Grösse einer dreikantigen und einer n kantigen Ecke durch ihre Winkel gegeben und darauf in §. 75, wie bei Legendre, der Beweis des Euler'schen Satzes gegründet. Der dritte Abschnitt, §. 74—128, umfasst die Lehre von den geometrischen Körpern und zwar in §. 74—107 die Lehre von den eckigen Körpern oder Polyedern und in §. 108—128 die Lehre von den runden Körpern (Kegel, Cylinder, Kugel). Von dem an der Spitze des Abschnitts befindlichen Euler'schen Satze ist ausser dem Legendre'schen Beweise noch ein anderer, so viel uns bekannt von J. H. T. Müller herrührender, Beweis gegeben. An die Betrachtungen über die Polyeder im Allgemeinen schliesst sich die Betrachtung der regelmässigen Polyeder und an diese die Lehre von den unregelmässigen Polyedern. Letztere umfasst die Entstehung und Benennung der unregelmässigen Polyeder (Pyramide, Prisma, Obelisk), die Eigenschaften derselben und ihre Congruenz und Aehnlichkeit. In gleicher Weise folgt in der Lehre von den runden Körpern auf deren Entstehung und Benennung die Entwickelung ihrer Eigenschaften und die Betrachtung ihrer Congruenz und Aehnlichkeit. Die Entstehungsweise der regulären Polyeder durch Abgrenzung regelmässiger, um einen Punkt, als gemeinschaftlichen Scheitel, herumliegender Ecken, sowie die der übrigen Polyeder durch Abgrenzung der betreffenden, durch entsprechende Bewegung einer Geraden erzeugten halbbegrenzten Räume ist mit Recht den übrigen Darstellungsweisen vorgezogen worden. — Die Ausführlichkeit, mit welcher die Lehre von der Congruenz und Aehnlichkeit, von der symmetrischen Gleichheit und Symmetrie, sowie von der Gleichheit der Polyeder überhaupt behandelt ist, darf als ein besonderer Vorzug dieses Buches hervorgehoben werden. Der vierte und letzte Abschnitt enthält die Berechnung der Körper (Berechnung des Prisma, der Pyramide, des schief abgeschnittenen dreiseitigen Prisma, des Obelisken; Verhältniss der ähn-

lichen Polyeder; Berechnung des Cylinders, des Kegels und der Kugel). Jedem Abschnitte ist eine reichhaltige Sammlung von Uebungsaufgaben beigefügt, welche theils in zu beweisenden Lehrsätzen, theils in Aufgaben zu Constructionen und Körperberechnungen bestehen. Die Auflösungen zu diesen Aufgaben, mit Andeutungen sie zu finden, sind in einem besonderen Schriftchen unter dem Titel: „Anhang zu dem Lehrbuch der Stereometrie von Carl Spitz“ erschienen.

Die Reichhaltigkeit des Inhalts, die knappe und fassliche Darstellung machen das vorliegende Buch zu einer sehr empfehlungswerthen Erscheinung. Ob für ein Lehrbuch der Stereometrie zum Gebrauch an höheren Lehranstalten und beim Selbststudium, das Gebiet der Stereometrie nicht füglich etwas weiter auszudehnen wäre, so dass die Kegelschnitte und die Lehre von den Projectionen noch innerhalb desselben fielen, wollen wir hier nicht entscheiden, die Frage aber immerhin der Beachtung empfehlen.

Die äussere Ausstattung des Buches lässt wenig zu wünschen übrig. Unter mehreren Druckfehlern machen wir nur auf folgende aufmerksam: Seite 54, Zeile 19 von oben muss es heissen $4R = \frac{1}{2} 4\,ER$ — etc. und Zeile 24: $4R = 2\,ER - 2KR + 2FR$.

Dresden. Dr. Rudolf Hoffmann.

---

# Bibliographie

vom 7. December 1858 bis 15. Februar 1859.

### Periodische Schriften.

Denkschriften der Kaiserl. Akademie der Wissenschaften zu Wien. Mathem.-naturw. Classe. Bd. 15. Wien, Gerold's Sohn in Comm. 10 Thlr.

Sitzungsberichte der Kaiserl. Akademie der Wissenschaften zu Wien. Math.-naturw. Classe. Bd. 27, Heft 2. Ebendaselbst. 2 Thlr. 4 Ngr.

Abhandlungen der Königl. Bayrischen Akademie der Wissenschaften. Mathem.-phys. Classe. Bd. 8, Abth. 2. München, Franz in Comm. $2^2/_3$ Thlr.

*Mélanges physiques et chimiques tirés du bulletin physico-mathématique de l'Académie à Petersbourg. Tome III, livr.* 3. Leipzig, Voss. 1 Thlr.

Archiv der Mathematik von Grunert. Theil 32, Heft 1. Greifswald, Koch. pr. compl. 3 Thlr.

Astronomische Nachrichten, fortges. von P. Hansen und F. Peters. Bd. 50 und 51, Heft 1. Hamburg, Perthes Besser & Mauke in Comm. pro Band 5 Thlr.

Wochenschrift für Astronomie, Meteorologie und Geographie. Neue Folge, Bd. 2. (1859.) Red. von Heis. No. 1. Halle, Schmidt. pro compl. 3 Thlr.

## Reine Mathematik.

Recht, G., Die Elemente der niederen Analysis und der Gleichungen. München, liter.-artist. Anstalt. 28 Ngr.

Schmidt, J. P., Auflösung der Gleichungen ersten Grades nebst Aufgaben. Trier, Lintz. $^1/_3$ Thlr.

Strauch, G. W., Auszug aus der Abhandlung: Anwendung des Variationscalculs auf zweifache und dreifache Integrale. Wien, Gerold's Sohn in Comm. 4 Ngr.

Becker, F. W., Lehrbuch der Elementargeometrie. Thl. I: Planimetrie. 1. Abth. Oppenheim a. R., Kern. $^1/_2$ Thlr.

Glasl, C., Lehrbuch der Geometrie für Unterrealschulen. 4. Aufl. Wien, Braumüller. 1 Thlr.

Noeggerath, E., Leitfaden zum Unterrichte in der Elementargeometrie. Thl. 2, Abth. 1. Saarbrücken, Neumann. $^1/_3$ Thlr.

Ising, C., Leitfaden für den Unterricht in der Geometrie. 1. Thl. Planimetrie. Münster, Brunn. 6 Ngr.

Wittstein, Th., Lehrbuch der Elementarmathematik. Bd. 2. Abth. 1. Ebene Trigonometrie. Hannover, Hahn. $^1/_2$ Thlr.

Schering, E., Ueber die conforme Abbildung des Ellipsoids auf der Ebene. Göttingen, Dietrich. 12 Ngr.

## Angewandte Mathematik.

Ditscheiner, L., Ueber die graphische Ellipsenmethode. Wien, Gerold's Sohn in Comm. 14 Ngr.

Schmidt, R., Theoretisch-praktischer Lehrgang der Axonometrie. Leipzig, Förstner. 1 Thlr. 18 Ngr.

Stoevesandt, C. H., Lehrbuch der Perspektive. Lief. 1. Berlin, Herbig. 1 Thlr.

Weisbach, J., Die neue Markscheidekunst. Abth. 2. Braunschweig, Vieweg & Sohn. 4 Thlr.

Lübsen, H. B., Einleitung in die Mechanik. Thl. 4. Bewegung fester Körper. Hamburg, O. Meissner. $^2/_3$ Thlr.

Ludwig, C. und J. Stefan, Ueber den Druck, den das fliessende Wasser senkrecht zu seiner Stromrichtung ausübt. Wien, Gerold's Sohn in Comm. $^1/_3$ Thlr.

Semper, G., Ueber die bleiernen Schleudergeschosse der Alten und über die zweckmässige Gestalt der Wurfkörper im Allgemeinen. Frankfurt a. M., Verlag für Kunst und Wissenschaft. 3 Thlr.

Sammlung ausgeführter Constructionen aus dem Gebiete des Wasser-, Strassen- und Eisenbahnbaues. Heft 4, 5 und 6. Carlsruhe, Veith. à 2 Thlr.

Oeltzen, W., Argelander's Zonenbeobachtungen. Abth. 6, vom $19^h$ bis $23^h$. Wien, Gerold's Sohn in Comm. 14 Ngr.

Sternkarten, akademische. Zone $0^h$ und Zone $IX^h$. Berlin, Dümmler in Comm. à 1 Thlr.

Reuter, F., Der nördliche gestirnte Himmel. 2. Aufl. 4 Bl. Imp.-Folio. Gotha, Perthes. $1^1/_2$ Thlr.

Allé, M., Ueber die Bahn der Leda. Wien, Gerold's Sohn in Comm. 3 Ngr.

Schinz, C., Compendium zu: „die Wärmemesskunst etc. Stuttgart, Mäcken. 1 Thlr.

## Physik.

Encyclopädie der Physik, bearbeitet von Brix, Decher etc., herausgegeben von Karsten. Lief. 4. Leipzig, Voss. $2^2/_3$ Thlr.

Physikalisches Lexikon von Marbach und Cornelius. Lief. 69 und 70. Leipzig, O. Wigand. pro Lief. $^1/_2$ Thlr.

Die Naturwissenschaften populär dargestellt von Dippel, Gottlieb, Koppe etc. Lief. 23 bis 27. Essen, Bädeker. à $^1/_3$ Thlr.

Poggendorf, J., Biographisch-literarisches Handwörterbuch zur Geschichte der exacten Wissenschaften. Lief. 2. Leipzig, Barth. $2^2/_3$ Thlr.

Kunzek, A., Lehrbuch der Experimentalphysik. 6. Aufl. Wien, Braumüller. 28 Ngr.

Böttger, C., Das Mittelmeer; eine Darstellung seiner physischen Geographie. Lief. 6—8. Leipzig, Meyer. pro Lief. 12 Ngr.

Harting, P., Das Mikroskop. Theorie, Gebrauch, Geschichte und gegenwärtiger Zustand desselben. Aus dem Holländ. übersetzt von Theile. Braunschweig, Vieweg & Sohn. 5 Thlr.

Blaserna, P., Ueber den inducirten Strom der Nebenbatterie. Wien, Gerold's Sohn in Comm. 6 Ngr.

Gavarret, J., Lehrbuch der Elektricität. Deutsch von R. Arendt. Leipzig, Brockhaus. 1 Thlr.

Peterin und Weiss, Ueber das Tönen der Flammen flüssiger und fester Körper. Wien, Gerold's Sohn in Comm. 6 Ngr.

Naumann, C. E., Ueber die verschiedenen Bestimmungen der Tonverhältnisse und die Bedeutung des reinen Quintensystems für unsere heutige Musik. Leipzig, Breitkopf & Härtel. $^3/_4$ Thlr.

Vogel, A., Experimentelle Beiträge zur Beurtheilung hygrometrischer Methoden. München, Franz in Comm. $3^1/_2$ Ngr.

Arago's Sämmtliche Werke, herausg. von Hankel. Bd. 9 Leipzig, O. Wigand. $1^2/_3$ Thlr.

Dieselben. Bd. 14. (Populäre Astronomie.) Ebend. $2^1/_2$ Thlr.

Arago, F., *Oeuvres complètes publiés par* J. A. Barral. *Tome VIII. Mémoires scientifiques (T. V.).* Leipzig, O. Weigel. 2 Thlr.

Zantedeschi, F., *Della lege fondamentale delle verghe vibranti e della canne a bocca.* Wien, Gerold's Sohn in Comm. 5 Ngr.

# Literaturzeitung.

## Recensionen.

**Die Vibrationstheorie der Elektricität** des Professor ROBIDA in Klagenfurt.

P. Karl Robida, Professor am K. K. Gymnasium zu Klagenfurt, hat im Jahre 1857 eine Vibrationstheorie der Elektricität veröffentlicht, zu welcher ein anderes 1858 unter dem Titel Magnetismus erschienenes Schriftchen*) die Fortsetzung und den Schluss bildet. In der „Vibrationstheorie der Elektricität" beschäftigt sich Robida ausschliesslich mit der Mikroelektricität, indem er nach der Darstellung und Begründung seiner Vibrationstheorie dieselbe auf die wichtigsten elektrischen Erscheinungen (im Kleinen) anwendet; im „Magnetismus" dagegen passt er dieselbe Vibrationstheorie den kosmisch-elektrischen Erscheinungen an und modificirt dieselbe dann für den Magnetismus und für die Erklärung der magnetischen Erscheinungen. Beide Schriftchen sollen hier einer Besprechung unterworfen werden, und zwar sollen nicht minder die Mängel, als die Vorzüge der in ihnen enthaltenen Theorie hervorgehoben werden, denn nur so kann die Besprechung dem gemeinsamen Zwecke förderlich werden.

*A.* Begründung der Vibrationstheorie. (Vibrationsth. §§. 1—7.)

Nachdem Robida in der Einleitung ganz kurz auf die Schwächen der Fluidumstheorie hingedeutet hat, gibt er eine Definition der Elektricität, welche (mit Berücksichtigung der auf S. 59 des „Magnetismus" folgenden Berichtigung) so lautet: „Die Elektricität beruht auf Longitudinalschwingungen der Theilchen eines elektrischen Körpers, aus welchen Longitudinalwellen entstehen, die als positiv elektrische, mit verdichtetem Vordertheile als negativ elektrische mit verdünntem Vordertheile in der Fortpflanzungsrichtung der entsprechenden Elektricität fortschreiten." Der directe Beweis (§§. 1 und 2) dafür ist in 3 Theile getheilt:

1. Die Elektricität beruht auf Schwingungen.

*a*) „Streicht man die angeschraubte (fixe) Zinkplatte des Fechner'schen Elektroskops (mit Condensator) mit dem Violinbogen, so schlägt das Goldplättchen aus; entstand dabei ein Ton, so zeigte die mit Sand bestreute

---

*) Beide Druck von Leon in Klagenfurt.

Zinkplatte eine 4strahlige, die Kupferplatte eine 6strahlige Klangfigur. Wurde die Platte während des Streichens mit dem Finger berührt, so gab sie keinen Ausschlag des Goldplättchens."

*b*) „Jenachdem man in einer auf der Plattenebene senkrechten Ebene, oder an der Peripherie der Platte parallel zur Peripherie streicht, hat das Goldplättchen die eine oder die andere Elektricität."

*c*) „Wenn die auf der fixen Zinkplatte liegende Kupferplatte mit dem Violinbogen angestrichen wird, so schlägt das Goldplättchen aus; wenn man aber die isolirt gehaltene Kupferplatte, oder diese und die fixe Zinkplatte mit dem Violinbogen in Schwingungen versetzt, und dann die Kupferplatte auf die Zinkplatte legt, so stellt sich das Goldplättchen in die Mittellinie, obwohl Zink und Kupfer, wenn sie abgesondert an das Electroscop angeschraubt, und mit dem Violinbogen gestrichen werden, die gleichnamige Elektricität zeigen."

*d*) „Eine Zinnplatte vom doppelten Durchmesser der fixen Zinkplatte und von verhältnissmässiger Dicke wurde am gläsernen Handgriffe einen Schuh hoch über der Zinkplatte so gehalten, dass beide Plattenebenen nahe parallel standen, und mit dem Violinbogen in Schwingungen versetzt. Das Goldplättchen zeigte sich elektrisch und zwar stärker elektrisch bei grösserer Annäherung der Platten, blieb elektrisch beim Auflegen der Zinnplatte auf die fixe Zinkplatte, sogar noch nach erfolgter Berührung mit dem Finger."

*e*) „Wenn man die mit dem Violinbogen angestrichene Metallplatte des Elektroskops mit dem Finger berührt, so kehrt das Goldplättchen sogleich in die Mittellinie zurück. Der Ausschlag des Goldplättchens vermindert sich auch, wenn man das Glasröhrchen, welches den messingenen Goldplättchenträger umschliesst, mit dem Finger berührt, und somit die Schwingungen des Glasröhrchens dämpft."

*f*) „Beim Condensator divergiren ebenfalls die Goldplättchen, wenn man die Collectorplatte, oder die daraufliegende Condensatorplatte mit dem Violinbogen in Schwingungen versetzt."

Mit welchem Rechte nennt Robida dies einen d i r e c t e n Beweis*) dafür, dass die Elektricität auf Schwingungen beruht? Die unter *d*) und *e*) aufgeführten Fälle der Influenz und Ableitung durch Mittheilung haben für den zu beweisenden Satz keine Beweiskraft, und die andern Versuche beweisen nur, dass da, wo man durch Streichen (tönende oder nicht tönende)

---

*) Direct wäre der Beweis zu nennen, wenn Robida das Vorhandensein von Schwingungen da nachwiese, wo, beim Ausschluss aller anderen Ursachen von Schwingungen, Elektricität auftritt Eine Gelegenheit dazu böte vielleicht das Entstehen von Tönen in einem vom Strom durchströmten Leiter, oder die elektrischen Lichterscheinungen, ja vielleicht selbst die mechanischen Wirkungen der Elektricität. So z. B. sagt Robida (Vibr. Th. S. 29): „Alle mechanischen Wirkungen der Elektricität deuten auf eine schwingende Bewegung der Leitertheilchen. An Isolatoren, deren Theilchen sich schwer in elektrische Schwingungen versetzen lassen, sind diese Wirkungen besonders auffallend. Die durch ein Glas dringende Elektricität versetzt dieses in solche Schwingungen, wie jede andere gleichartige Störung des molekularen Gleichgewichts.

Schwingungen erregt, Elektricität auftritt. Das Streichen ist jedoch nicht das einzige Mittel, um Schwingungen zu erregen; der Beweis ist daher zunächst in dieser Hinsicht wenigstens nicht vollständig. Daraus ferner, dass gleichzeitig mit den durch das Streichen hervorgerufenen Schwingungen Elektricität auftritt, folgt noch nicht ohne weiteres, dass die Elektricität selbst auf Schwingungen beruht. Wir könnten es dann zwar gelten lassen, wenn Robida (Vibr. Th. S. 13) sagt: die elektrischen Wellen entstehen aus Longitudinalschwingungen, doch verlangen wir gewiss mit Recht erst noch den Beweis, wenn Robida damit sagen wollte: die electrischen Wellen bestehen aus Longitudinalschwingungen. Und selbst dann, wenn bestehen mit entstehen gleichbedeutend wäre, hätte Robida den Beweis eben nur für die Reibungselektricität geführt, und es müsste wenigstens noch nachgewiesen werden, dass die Elektricität aller übrigen Quellen sich in dieser Beziehung nicht von der Reibungselektricität unterscheidet. Robida sagt in seinem Beweise davon kein Wort; dieser Theil des Beweises ist daher keineswegs vollständig oder ausreichend.

2. Das Schwingungssubstrat sind die Theilchen elektrischer Körper.

*a*) „Dieses ergiebt sich schon aus 1., denn die Störung des molekularen Gleichgewichts versetzt die Körpertheilchen in Schwingungen. Die eine Klasse der Schwingungen ist die Quelle des Schalls; eine andere Klasse derselben ist die Quelle der Elektricität, für welche letztere keine nähere Ursache als die Theilchenschwingungen vorliegt. Die bei den angeführten Versuchen stattfindende Reibung ist wohl die Ursache der Schwingungen, aber keineswegs die letzte Ursache der Elektricitätserscheinung, welche Behauptung der Versuch unter 1. *b*) ausser Zweifel setzt."

*b*) „In eine 1 Zoll weite, 1 Schuh lange Glasröhre streute ich vom offenen Ende an bis nahe zur Mitte Lycopodiumsamen, fasste das geschlossene Ende mit der linken Hand, und führte mit der rechten gegen das offene Ende der Röhre das amalgamirte Leder. Lycopodiumtheilchen bewegten sich springend gegen das offene Ende, und viele flogen aus der Röhre hinaus. Berührte ich nun das offene Ende mit der Hand, so bewegten sich Lycopodiumtheilchen rückwärts gegen die Mitte der Röhre."

*c*) „Aus angestellten Versuchen darf man nach Riess schliessen, dass ein elektrischer Körper in einem luftleeren (absolut leeren) Raume seine Elektricität für immer behalten würde."

Auch dieser Theil des Beweises ist nicht bindend. In *a*) liegt eben nur der Nachweis dafür, dass ein Körper, dessen Theilchen in Schwingungen versetzt wurden, elektrisch wurde; und wir wiederholen, dass damit noch nicht unbedingt gesagt ist, dass das Elektrischsein selbst im Schwingen der Körpertheilchen beruhe, wenn schon es durch das Schwingen derselben hervorgerufen wurde. Ursache und Wesen einer Sache darf man nicht mit einander verwechseln. Wenn jedoch die Reibung die Ursache der Schwing-

ungen ist, und wenn eben diese Schwingungen Electricität sind, so ist auch die Reibung die Ursache der Elektricität. Zugegeben nun, dass überhaupt die Elektricität auf Schwingungen beruht, warum müssen es gerade und allein Schwingungen der Körpertheilchen sein? In *b*) und *c*) liegt wohl kaum die Antwort auf diese Frage. Während wir bisher nur gegen die Form des Beweises, nicht gegen das Bewiesene selbst sprachen, möchten wir hier mit dem Beweise zugleich auch die zu beweisende Behauptung zurückweisen, in Erinnerung der guten Dienste, welche uns die Annahme leistete*), dass die elektrischen Schwingungen aus Schwingungen der Körpertheilchen und aus Schwingungen der Aethertheilchen gemischt seien**). Ohne Schwierigkeit haben wir aus dieser Annahme bereits eine Erklärung für die unter *c*) aufgeführte Erscheinung entwickelt, während Robida bei der Annahme bloser Körperschwingungen schwerlich eine genügende Erklärung für das Ueberspringen des Funkens durch einen leeren Raum und für die vertheilende Wirkung elektrischer und magnetischer Körper auf andere Körper wird geben können, von denen sie durch einen leeren Raum getrennt sind. Robida leugnet zwar die Möglichkeit eines leeren Raums (Vibr. Th. §. 2, 2) und hält jedes Vacuum für erfüllt mit losgerissenen kleinsten Theilchen der Materie. Wenn man aber an Stelle der letzteren den überall verbreiteten, höchst elastischen und unwägbar feinen Aether setzt und annimmt, dass der Aether sich nach aussen nicht elektrisch zeige, so lange er allein (ohne die materiellen Körpertheilchen) in elektrischen Schwingungen begriffen ist, so hat man in ihm ein bloses Fortpflanzungs- und Uebertragungsmittel für die elektrischen Schwingungen, einen natürlichen Unterschied zwischen Leitung und Strahlung, zwischen Leitern und Nichtleitern.

3. Die Schwingungsrichtung der Theilchen elektrischer Körper ist eine longitudinale in der Fortpflanzungsrichtung der Elektricität und Wellen mit verdichtetem Vordertheile (mit dem Berge voraus) geben positive, Wellen mit verdünntem Vordertheile (mit dem Thale voraus) geben negative Elektricität.***)

Robida führt den Beweis gesondert für Metalle, Holz, Glas und elektronegative Körper:

*a*) „Ein 1 Schuh langer, geschmiedeter, ungefeilter Eisenstab (nicht Draht, dessen Theilchen durch den Zug in krumme Lagen gerückt worden sind) von der Dicke der messingenen Fassung des Goldplättchenträgers im Elektroskope wurde an diesen Träger angeschraubt und mit dem Violinbogen vom obern Ende gegen das untere, oder vom untern Ende gegen das obere gestrichen. Um reine Longitudinalschwingungen der Theil-

---

*) Vergl. S. 132 ff. des IV. Jahrg. dies. Zeitschrift.

**) Auch Spiller, Phantom der Imponderabilien, S. 11, stellt eine ähnliche Ansicht auf.

***) Spiller, Phantom, S. 46, statuirt keine Verdichtungen und Verdünnungen.

chen des Stabes zu erhalten, muss der Violinbogen mit der Längenrichtung des Stabes einen spitzen Winkel bilden, und dieser Winkel sowie die Streichstelle des Violinbogens muss während des Striches beibehalten werden. Uebrigens wird der Strich kurz und leicht geführt. Die durch den Violinbogen erregten Schwingungen des Eisenstabes werden vor Beginn des Gegenstriches mit der den Stab berührenden Hand unterdrückt. Wenn man die Versuche mit Beobachtung dieser Vorsichten anstellt, so gelingen sie sicher, und das Goldplättchen zeigt beim Abwärtsstreichen positive, beim Aufwärtsstreichen negative Elektricität."

„Diesen Versuch betrachte ich zur Begründung meiner ausgesprochenen Behauptung als den fundamentalen, weil die dabei erregten Wellen im Metalle bleiben, und bei den Reflexionen an den beiden Metallenden keine Umkehrung der Wellenform erleiden. Denn beim Uebergange der Welle aus Metall in Luft, nämlich aus einem für elektrische Wellen geeigneteren in ein minder geeignetes Medium wird der Wellenberg als Berg, das Thal als Thal reflectirt."

*b*) „Ein Holzstab, welcher zu akustischen Versuchen bestimmt ist, wurde an den messingenen Träger des Goldplättchens angeschraubt und mit dem Violinbogen auf gleiche Art und mit gleicher Vorsicht gestrichen. Bei abwärts gerichteten Strichen zeigte das Goldblättchen positive, bei aufwärts gerichteten Strichen negative Elektricität. Der Schwingungsvorgang im Holzstabe ist jedoch complicirter, als jener im Eisenstabe, weil das Holz zur Fortpflanzung elektrischer Wellen minder geeignet ist, als der messingene Träger des Goldplättchens. Daher wird die aus dem Holz in das Metall übergehende Welle*) an der Uebergangsgrenze mit Umkehrung ihrer Wellenhälften reflectirt. Beim aufwärts geführten Striche bleibt die aus der Interferenz der reflectirten (verdichteten, +) und der directen (verdünnten, —) Wellen resultirende Welle vorherrschend im Sinne der intensiveren directen, und das Goldplättchen zeigt negative Elektricität; beim abwärts geführten Striche dagegen, welcher den interferirenden Wellen einen grösseren Spielraum gestattet, bekommt die resultirende Welle leicht die Form der reflectirten (verdünnten, —), und das Goldplättchen zeigt wieder negative Elektricität, sobald der abwärts geführte Strich nicht reine Longitudinalschwingungen geweckt hat. Man sichert sich das Gelingen des Abwärtsstriches, wenn man auch diesen am untern Ende des Holzstabes führt."

Den Versuch *a*) bezeichnet also Robida selbst als den fundamentalen, den entscheidenden. Aber was entscheidet er? Robida sagt Vibr. Th. S. 5: „bei den Versuchen mit Metall und Holz habe ich mich des Violinbogens als Schwingungserreger vorzugsweise bedient, weil seine Anwendung am leichtesten modificirt wird, und weil man damit die störenden Transversal-

*) Nicht auch beim Uebergange aus Eisen in Messing, da der Leitungswiderstand im Eisen sich zu dem im Messing etwa verhält wie 2 : 1?

und Rotationsschwingungen eines an dem Ende befestigten Stabes am sichersten vermeidet," und bemerkt S. 12 ganz richtig; „Der angeführte Versuch mit dem Eisenstabe, welcher noch instructiver ausfallen wird, wenn man jedes Ende eines gebogenen Eisen- oder Kupferstabes an ein Fechner-sches Elektroskop anschraubt, was mir wegen Mangel eines zweiten Elektroskops unthunlich war, zeigt deutlich, dass das Goldplättchen beim Eintritte der verdünnten longitudinalen Welle negativ elektrisch, und beim Eintritte der verdichteten longitudinalen Welle positiv elektrisch wird." Diess, aber auch nicht mehr beweist dieser Versuch. Robida erzeugte absichtlich blos longitudinale Schwingungen und fand dabei die mitgetheilten Resultate; dass er dann abgesondert in Holz und Metall auch transversale Schwingungen, auch Rotationsschwingungen erzeugt und dabei andere oder gar keine Resultate erhalten habe, davon sagt er nichts, ebensowenig widerlegt er a priori, dass bei den beiden letzteren Schwingungsarten Elektricität auftreten könne, worauf doch der Versuch 1. *b*) hindeutet. Wohl aber nennt Robida die Transversal- und Rotationsschwingungen störend und schreibt es ihrer Gegenwart zu, wenn der Holzstab auch abwärts gestrichen negativ elektrisch wird. Entscheidend scheint übrigens zwar das Auftreten der positiven Elektricität beim Abwärtsstriche und der negativen beim Aufwärtsstriche. Indessen es ist der Versuch nicht bestimmt und ausführlich genug beschrieben; es ist blos die Richtung des Striches mit dem Violinbogen abwärts oder aufwärts angegeben; ob aber die Haltung des Bogens bei beiden Strichen dieselbe war, ob z. B. der Griff des Bogens dem festgeschraubten Ende des Holz- oder Eisenstabes beide Male zugewendet, oder beide Male abgewandt war, ist nicht gesagt. Das aber ist gerade bei der verschiedenen Structur des Rosshaares in der Richtung gegen seine Wurzel und gegen seine Spitze von wesentlichem Gewichte, da bekanntlich bei der Reibungselektricität das Vorzeichen von dem Unterschiede in der Structur, Faserrichtung u. s. w. abhängig ist. Dadurch könnte es selbst bedingt sein, dass Holz- und Eisenstab gleiche Resultate lieferten, so lange reine Longitudinalschwingungen geweckt wurden. Die Betrachtung des „complicirten" Schwingungsvorganges im Holzstabe hätte Robida füglich ganz aus dem Spiele lassen sollen; denn er erkennt ja nicht am Holzstabe, sondern an dem Goldplättchen das Vorzeichen der Elektricität, hat es also nur mit den aus dem Holze ins Metall übergegangenen Wellen zu thun, und wenn auf diese der complicirte Vorgang im Holzstabe von Einfluss ist, so wäre es klug, die Beobachtung abzuschliessen, bevor noch der complicirte Vorgang Einfluss gewann. Wie aber bei aufwärts geführten Strichen die directe Welle kräftiger ist, als die reflectirte, so sollte es doch wohl auch bei abwärts geführten Strichen sein? Warum und wie sollen die letzteren den interferirenden Wellen einen grösseren Spielraum gestatten? Mahnt nicht etwa der versteckte Einfluss anderer, als longitudinaler Schwingungen zur Vorsicht und zu fortgesetztem Studium?

Die beiden Versuche beweisen also weder, dass die Elektricität blos aus longitudinalen Schwingungen entsteht, noch, dass Wellen mit verdichtetem Vordertheile positive, Wellen mit verdünntem Vordertheile negative Elektricität geben, am allerwenigsten aber, dass die positive und negative Elektricität aus solchen Schwingungen und Wellen besteht.

*c*) „Wenn man gewöhnliches Glas mit amalgamirtem Leder, mit Seide oder Katzenfell reibt und dem Elektroskope nähert oder mit dessen messingenem Träger des Goldplättchens in Berührung bringt, so zeigt sich das Goldplättchen positiv elektrisch; wenn man aber das elektrische Glas vom Elektroskope entfernt, so zeigt das Goldplättchen negative Elektricität. (Influenz z. Th.) Wenn man aber eine Glas-Platte, Röhre oder einen Glasstab mit der kleineren Fläche auf den messingenen Träger des Goldplättchens aufstellt, das freie Ende mit der Hand hält, und zwischen Träger und Hand mit amalgamirtem Leder, mit Seide, Katzenfell oder Violinbogen in Längenschwingungen versetzt: so zeigt das Goldplättchen positive Elektricität, mag der Reiber auf- oder abwärts geführt werden. Bei mattgeschliffenem Glase dagegen erscheint nur beim Reiben mit amalgamirtem Leder positive, sonst negative Elektricität im Goldplättchen."

Um diese Resultate mit jenen beim Eisenstabe in Uebereinstimmung zu bringen, geht Robida wieder auf die im Glase stattfindenden Reflexionen und Welleninterferenzen ein und stützt die noch complicirtere Erklärung auf die Voraussetzung, „dass das gewöhnliche Glas nur verdichtete Wellen als wirksam fortpflanzt," deren Richtigkeit sich zum Theil daraus ergeben soll, „dass eine Glasröhre, welche man durch Reibung in starke Longitudinalschwingungen versetzt, in Trümmer geht." Diese durchaus nicht gerechtfertigte*) Voraussetzung macht die vorhergehende verwickelte Erklärung noch verdächtiger und da Robida schon gefunden hat, dass gewöhnliches Glas bei einzelnen Strichen (aufwärts oder abwärts) blos positive Elektricität giebt**), und gleich darauf sagt, dass beim mattgeschliffenen Glase die Natur der geweckten Elektricität von dem Reiber abhängt: so hätte er wohl eher noch der reibenden und der geriebenen Substanz einen Einfluss im Momente des Entstehens der Welle beilegen dürfen, nicht aber dem geriebenen Körper verdünnte oder verdichtete Wellen als bei der Interferenz vorwiegend octroiren sollen, jenachdem er die einen oder die andern behufs einer gekünstelten Erklärnng des Auftretens der positiven oder der negativen Elektricität braucht. Während nämlich das gewöhnliche Glas nur verdichtete Wellen (positive Elektricität) als wirksam fortpflanzt, und die ursprünglich erregten, aber aus dem eben genannten

---

*) Elasticitätsgesetze! Es ist nicht abzusehen, warum das gewöhnliche Glas sich lieber erst verdichten und dann verdünnen, und das mattgeschliffene Glas sich lieber erst verdünnen und dann verdichten lassen sollte. Robida nennt in §. 2 als Ursache davon „die starke Spannung der Theilchen im molekularen Gleichgewichte."

**) Warum reibt R. das gewöhnliche Glas nicht auch mit Körpern, die es negativ elektrisch machen?

Grunde nur schwachen verdünnten Wellen erst nach ihrer bei der Reflexion erfolgenden Umwandlung in verdichtete Wellen kräftiger und ordentlich wirksam werden, soll das amalgamirte Leder die Glastheilchen in intensivere Schwingungen versetzen und so auch im mattgeschliffenen Glase die dem gewöhnlichen Glase eigenthümlichen Schwingungen*), die andern Reiber aber vorzugsweise die der matten Glasoberfläche eigenen Wellen (negative Elektricität) wecken. Die Schlussbemerkung über die Erscheinungen am Glas bekräftigt nur unser Urtheil; sie lautet: „bei zusammenhängenden transversalen Gegenstrichen (d. h. aufwärts und abwärts in wechselnder unmittelbarer Aufeinanderfolge) ist die Wirkung der eben beschriebenen (bei zusammenhängenden longitudinalen Gegenstrichen) ganz gleich, was ebenfalls für die Eigenthümlichkeit des Glases nur gewisser Art Schwingungen als wirksame fortzupflanzen spricht. Bei wie immer gerichteten Strichen über der das Glas haltenden Hand zeigt das Goldplättchen keine Einwirkung, weil die erregten Wellen von der Hand nach oben reflectirt werden."

*d*) „Ganz ähnlich urtheilen wir über die von Robida angeführten Erscheinungen bei „sogenannten-negativ-elektrischen Körpern" als Harzstab (d. i. ein mit einer Harzlösung überstrichener Glasstab), Schellack, Siegellack, Harzkuchen, Schwefel." Das Resultat dieser letzteren Versuche fasst Robida in folgende Worte zusammen: „Daraus ist ersichtlich, dass das amalgamirte Leder und der Violinbogen im Harzstabe eine ähnliche Wirkung hervorbringt, wie das amalgamirte Leder im mattgeschliffenen Glase (d. h. positive Elektricität sowohl beim Auf- als beim Abwärtsstriche); dass beim Schwefel mit verdünnten Wellen das Auftreten der negativen Elektricität, mit verdichteten Wellen das Auftreten positiver Elektricität manchmal zusammenfällt; endlich dass beim Gebrauche der Seide oder des Katzenfells alle genannten Körper die ihnen eigenthümlichen, verdünnten Wellen vorzugsweise bemerken lassen (natürlich ebenfalls als Folge der Interferenz). Bei zusammenhängenden Gegenstrichen zeigt nur die Harzstange beim Gebrauche des amalgamirten Leders oder des Violinbogens als Wirkung des Aufwärtsstriches positive, beim Gebrauche des amalgamirten Leders oder des Katzenfells zeigen alle beim Aufwärtsstriche negative Elektricität im Goldplättchen; beim Abwärtsstriche kehrt das Goldplättchen in allen Fällen zur Mittellinie zurück und zeigt nach Entfernung des Reibers jene Elektricität, welche beim Aufwärtsstriche beobachtet worden ist."

---

*) Diess steht im Widerspruch mit Vibr. Th. S. 13: „Nach Coulomb wird von zwei an einander geriebenen Flächen diejenige leicht positiv, deren integrirende Theilchen die kleinste Bewegung um ihre Gleichgewichtslage machen. Dagegen wird diejenige Fläche leicht negativ, deren Theile durch die Rauheit der andern Fläche, oder aus einer andern Ursache weiter von einander entfernt werden. Fechner rieb frische Hölzer an einander und kam zum allgemeinen Resultate, dass die dichteren, schwereren Holzarten mit leichteren gerieben negativ elektrisch werden."

Der Beweis von Robida ist also kein directer Beweis und als Inductionsbeweis ist er nicht erschöpfend; dass Robida die willkürliche und unklare Voraussetzung, auf welche sich der dritte Theil des Beweises stützt, beibehält, ist um so unbegreiflicher, weil er im Verlauf seiner Abhandlung mehrere Thatsachen aufführt, die deutlich gegen Longitudinalschwingungen sprechen. Robida fühlt selbst die Unzulänglickeit seiner „wenigen“ Versuche und findet deren Fortsetzung wünschenswerth. In unparteiischer Anerkennung seines verdienstlichen Strebens zur Erforschung der Wahrheit theilen wir seine Hoffnungen auf den Erfolg fortgesetzter Versuche, wenn dieselben planmässig erweitert werden.*) So lange aber derartige Erfahrungen noch fehlen, scheint es räthlicher zu sein, aus Analogien zu schliessen.

An den Beweis knüpft Robida eine „kurze Anführung der gewöhnlicheren Quellen der Elektricität,“ nämlich der Reibungselektricität (§. 3), der Berührungselektricität (§. 4) und der Thermoelektricität (§. 6). Sein Zweck dabei ist nicht deutlich ausgesprochen; doch scheint er das Entstehen der Elektricität aus Schwingungen in diesen 3 Fällen herleiten und erklären zu wollen. Dass das Auftreten der Elektricität in der Regel von Bewegungserscheinungen begleitet ist, lässt sich sehr leicht und weit bestimmter nachweisen. Neben der Unklarheit der Darstellung giebt uns aber Robida hier auch ein Paar Pröbchen seines Scharfsinns und seines Wissens, die nicht eben Vertrauen erwecken. Vibr. Th. S. 14 behauptet er, dass bei der Berührung gleichartiger Metalle Elektricität entstehe, weil bei der Trennung der beiden Metallplatten**) Elektricität bemerkbar wird. S. 15 meint er, dass 2 Elektromotorplatten bei zwischengelegtem feuchten Leiter sich gar nicht berührten, und dass da dennoch der Strom (doch wohl in dem die Platten verbindenden Schliessungsbogen?!) kräftiger werde, und betrachtet flottweg bei einer galvanischen Batterie die in einer Zelle befindlichen Platten als ein zusammengehöriges Paar, bei welchem „die sorgfältig vermiedene Berührung der Elektromotoren durch chemische Action mehr als ersetzt wird.“ Mit seiner Erklärung der Elektrolyse (in §. 5 der Elektrochemie) kann Robida jetzt schon desshalb kein Glück mehr machen, weil er sich z. B. die Sauerstoffatome und die Wasserstoffatome in den Wasseratomen als deren Bestandtheile vorhanden denkt, welche entgegengesetzte Schwingungen haben; und an diese Ansicht schliessen sich in demselben §. noch obendrein andere ungereimte und unbegründete Voraussetzungen.

Das Gesetz der Fernwirkung der Elektricität (§. 7) steht ganz ausser Zusammenhang; Robida giebt keine Erklärung, sondern deutet nur auf die

---

*) Welche Resultate erhält man z. B., wenn man Schwingungen durch Klopfen mit einem Hammer in der Axenrichtung eines Stabes und senkrecht dazu erzeugt u. s. w.

**) Bei der Trennung tritt doch die Luft an die Stelle der einen Metallplatte. Voraussichtlich haben beide Platten dieselbe Elektricität.

Analogie der Elektricität mit Schall, Licht und Wärme rücksichtlich der Wirkung in die Ferne hin.

*B.* Anwendung der Vibrationstheorie zur Erklärung einiger elektrischer Erscheinungen. (Vibr. Th. §§. 8—17.)

§. 8. Mittheilung und Vertheilung (Influenz) der Elektricität. Mittheilung erfolgt bei der Berührung eines elektrischen Körpers mit einem unelektrischen; der Influenz liegt eine Wirkung aus der Ferne zu Grunde. Da nun Robida die elektrischen Schwingungen nur als Körperschwingungen betrachtet, so entsteht zunächst die Frage: wie hat man sich die Wirkung in die Ferne vorzustellen? Robida schweigt darüber. Sie kann jedoch keine gewöhnliche Fortpflanzung der Schwingungen sein; sondern unterscheidet sich von der Mittheilung dadurch, dass der zwischen dem influenzirenden Körper liegende Nichtleiter (oder leere Raum) selbst nicht elektrisch wird. Ferner treten auf dem influenzirten Körper beide Elektricitäten auf; ausserhalb desselben lässt sich dafür keine Ursache finden; desshalb sucht sie Robida in ihm selber: er lässt die erste, von dem influenzirenden in den influenzirten Körper eintretende Welle in dem letztern nur ein Stück vordringen, bis zu einem Theilchen *k*, an welchem sie wirkungslos ankommt; die nachfolgenden intensiveren (?) Wellen gehen über *k* hinaus, treten bei *k* „gleichsam in ein elastischeres (?) Medium über als gleichnamige Elektricität und werden von *k* reflectirt als entgegengesetzte Elektricität; an der Scheidegrenze *k* liegt der Indifferenzgürtel.“ Abgesehen davon, dass die Lage von *k* ganz unbestimmt ist, und *k* sich wohl stetig gegen das abgewandte Ende des influenzirten Körpers hin, ja vielleicht über dasselbe hinaus bewegen müsste, widerspricht die obige Annahme der Erfahrung, insofern *k* um so weiter vom influenzirenden Körper wegrücken müsste, je stärker der erste Impuls war, während doch die Indifferenzzone gerade um so näher an den influenzirenden Körper heranrückt, je kräftiger dessen Einwirkung ist. — Im Nachtrag (Magnetismus S. 59) ändert Robida die Erklärung der Influenz dahin ab, dass er die am zugewandten Ende auftretende entgegengesetzte Elektricität „durch die an der Grenze zwischen Luft und Metall mit Umkehrung ihrer Wellenhälften reflectirten Wellen hervorgerufen werden lässt, wobei an der Grenze zwischen den entgegengesetzt elektrischen Wellen des influenzirten Körpers der Indifferenzgürtel liegen soll.“ Aber auch darin ist kein Grund für das gleichzeitige Auftreten der beiden Elektricitäten nebeneinander und der Indifferenzzone dazwischen enthalten; man kann sich nicht darüber klar werden. wie die beiden Arten elektrischer Wellen durch die Indifferenzzone auf die eine Hälfte des influenzirten Körpers gebannt bleiben können, und gerade auf derjenigen Hälfte, auf welche sie erst von der andern übergegangen sind. — Dass übrigens bei der Vertheilung die Elektricität auch auf dem nichtableitend berührten influenzirten Körper und auch bei der Mittheilung auf dem

elektrisirten Körper bei der weitern oder gänzlichen Entfernung des elektrischen Körpers in die entgegengesetzte umschlägt (Vibr. Th. S. 21), ist neu und interessant; leider zeigen aber die Versuche mit dem Condensator (Vibr. Th. S. 24) gerade das Gegentheil!

Aehnlich steht es um die z. Th. auf die Influenzerscheinungen gestützte Erklärung des Elektrophors (§. 9), des Condensators und der Leydener Flasche (§. 10), für welche wieder mehrfache Interferenzen durch Reflexion zu Hilfe genommen werden. Die Erklärung der Leydener Flasche lautet kurz gefasst so: wird die innere Belegung positiv elektrisirt, so gehen die positiv elektrischen Wellen durch das Glas und die äussere abgeleitete Belegung in die Erde; durch Reflexion an der Grenze des Glases gegen die äussere Belegung entstehen im Glase negativ elektrische Wellen und diese gehen nun zwar in die äussere Belegung, aber nicht (!) in den Erdboden über. Auch die weniger starke Ladung der isolirten Flasche ist nicht genügend erklärt.

Die Erklärung des elektrischen Stroms (§. 11) ist ihrem Wesen nach in der auf S. 138 ff. des IV. Jahrg. dies. Zeitschr. gegebenen enthalten und schliesst mit den Worten: „die Geschwindigkeit der elektrischen Wellen hängt von der Schwingungsdauer eines Theilchens, und die Intensität von der Schwingungsintensität und Menge der Theilchen des Erregers zunächst ab und wird überdiess durch die Beschaffenheit des Leiters modificirt. Daher giebt die Reibungselektricität einen vorzugsweise intensiv starken Strom; die Contactelektricität giebt einen intensiv starken Strom beim Gebrauche vieler galvanischer Elemente und einen quantitativ starken Strom beim Gebrauche eines Elementes mit grossen Elektromotorenflächen."

Die Erklärung der Induction (§. 12) ist ebenfalls unklar und leidet an denselben Mängeln, wie die Erklärung der Influenz, aus welcher sie hergeleitet wird.

In §. 13 führt Robida eine Reihe von mechanischen Wirkungen der Elektricität auf, unter denen er das meiste Gewicht auf die Erscheinung am Quecksilber legt, wenn es als Elektrode verwendet wurde: „die kegelförmige Hebung des Quecksilbers am positiven und die Senkung am negativen spricht für verdichtete Wellen der positiven und für verdünnte Wellen der negativen Elektricität." Die Anordnung des Versuchs ist nicht beschrieben*); wenn nur nicht etwa eine Capillarerscheinung darunter verborgen steckt.

---

*) Zantedeschi beschreibt in seinem *trattato di fisica elementare* III. II. S. 46 das Verhalten des Quecksilbers über den beiden, in das Quecksilber durch den Boden eingeführten Poldrähten in folgender Weise: „das Quecksilber erhob sich über den Enden der Dräthe und bildete Kegel von $\frac{1}{12}$ bis $\frac{1}{10}$ Zoll, von deren Spitzen Wellen nach allen Richtungen hin ausgingen, derart, dass nur der Punkt, wo die Wellen sich trafen, in Ruhe war. Ging der Pol eines Magnetes in der Entfernung von einigen Zollen über einen dieser Kegel, so wurde er niedriger und breiter, auch die Wellenbewegung nahm ab. Kam der Magnet noch näher, so wurde die Oberfläche des Queck-

Aus den §. 14 angeführten wärmenden und leuchtenden Wirkungen heben wir hervor: dass die Temperatur, bei welcher der Leitungsdraht glüht, unter seiner sonstigen Glühhitze liegt, und dass das Schmelzen durch gleichzeitige Zerkleinerung und Erhitzung erfolgt (Riess); dass materielle Theilchen durch den Strom stets (?) von der positiven Polspitze fortgeführt und auf der negativen Polplatte abgelagert werden*); dass Licht ausschliesslich (?) dem negativen und Wärme vorzüglich dem positiven Pole angehöre, und dass desshalb die negativ elektrischen Schwingungen in Lichtschwingungen und die positiv elektrischen in Wärmeschwingungen übergingen. Einen innern, aus der Natur dieser 3 Wellengattungen, aus ihren Verschiedenheiten oder ihrer Verwandschaft abgeleiteten Grund dafür giebt Robida nicht an; hält es auch nicht einmal für nöthig, nachzuweisen, wie sich die longitudinalen elektrischen Schwingungen in transversale Licht- und Wärmeschwingungen umsetzen können. Dürfte man nicht auch rückwärts schliessen, dass Licht ausschliessend negative und Wärme vorzüglich positive Elektricität hervorrufen müsse? Davon hat Robida an dem betreffenden Orte (§. 5 und §. 6) nichts erwähnt.

Bezüglich der Schall erregenden Wirkung der Elektricit führt Robida (in §. 15) die Versuche von de la Rive an; aber der Ton, welcher entsteht, wenn ein eiserner Draht oder Stab der Länge nach von discontinuirlichen Strömen durchflossen wird, entspricht dem Querton des Stabes oder Drahtes; Robida fügt desshalb bei: „in manchen Fällen scheinen die elektrischen Längenschwingungen in Querschwingungen des Schalles überzugehen," aber auch hier sagt er nicht, wie dies zugeht.**)

Die physiologischen Wirkungen der Elektricität (§. 16) sollen ebenfalls für elektrische Wellen in der von Robida angenommenen Form und Richtung sprechen, weil nach Ritter der Finger am positiven Pol eine

---

silbers eben und das Metall begann ihn zu umkreisen, um so schneller, je näher der Magnet kam; wenn dieser endlich der Oberfläche des Quecksilbers ganz nahe gekommen war, so erschien an der Stelle, wo früher der Kegel war, eine Höhlung voll Wirbel. Vergl. *H. Davy*, *Annales de Chimie et Physique*, T. XVI.

*) Aber Vibr. Th. S. 32 sagt Robida: „Neef sah zwar auf beiden Elektroden von Platina sehr feine Spitzen auf rauher Oberfläche aufsitzen; doch scheinen mir diese Spitzen nur an der Elektrode aus Substanzgewinn, an der positiven aus Substanzverlust herzurühren. Denn die Beobachtung Moigno's stellt ausser Zweifel, dass vorzugsweise an der positiven Elektrode Wärme auftritt, also nur von dieser die schwingenden Theilchen in der Schwingungsrichtung fortgerissen und an der negativen Elektrode abgelagert werden können." (Wie so?!)

**) Werthheim erklärt den Ton aus Molecularveränderungen, nämlich aus einer geringen Verlängerung des Stabes; van Marum und Edmund Becquerel dagegen beobachteten eine Verkürzung (vergl. S. 152 des IV. Jahrg. dieser Zeitschr.). „Wenn ein weicher Eisenstab durch einen starken elektrischen Strom magnetisirt wird, so giebt er, aber nur beim Oeffnen und Schliessen der Kette, einen deutlichen Ton (Page); Marrion fand, dass die Höhe dieses Tones stets dem Longitudinaltone entspricht, welchen der Stab beim Streichen giebt; der Querschnitt des Stabes ist dabei von keinem Einflusse; Stahlstäbe tönen ebenfalls, aber nicht Stäbe von andern Metallen, oder gar Nichtleitern, wie Glas, Holz u. s. w.; vergl. Ganot, Lehrbuch der Physik und Meteorologie, deutsch bearbeitet von Dr. Weiske (Leipzig 1858), 2. Band, S. 194.

Einwirkung wie von innen nach aussen (Anschwellung), am negativen Pol aber wie von aussen nach innen (Contraction) erleidet. Mindestens mit gleichem Rechte könnte aber die Anschwellung nach der Spitze des Fingers hin am positiven Pole als Zeichen einer in den Finger eintretenden Verdünnungswelle geltend gemacht werden.

Die §. 17 gegebene Erklärung der Anziehung und Abstossung paralleler oder gegeneinander geneigter Stromleiter ist zu verfehlt, als dass sie noch weitläufig widerlegt zu werden brauchte.

In der Anwendung der Vibrationstheorie zur Erklärung der elektrischen Erscheinungen ist also Robida keineswegs glücklich gewesen. Dafür, dass die elektrischen Schwingungen longitudinale sind, liefern die Erklärungen keinen entschiedenen neuen Beweisgrund, wohl aber eher Gegenbeweise. Transversale tönende, Wärme- und Licht-Schwingungen gehen aus den (longitudinalen) elektrischen Schwingungen nicht nur hervor, sondern Wärme und Licht wecken auch elektrische Schwingungen, und dass es auch transversale tönende ebenfalls thun können, ist nirgends widerlegt, ja es spricht dafür ebensowohl der Versuch 1. *b*) des Beweises als unter 3. *c*) das Resultat mit transversalen Gegenstrichen. Freilich ist es auch nicht undenkbar, dass neben den longitudinalen Schwingungen transversale bestehen, oder sogar durch sie entstehen können; denn die aufeinander folgenden Verdichtungen und Verdünnungen werden abwechselnd eine Vergrösserung und Verkleinerung des Querschnittes veranlassen, welche in ihrer Aufeinanderfolge ebenfalls Schwingungen bilden. Könnten aber nicht diese beiden, auf einander senkrechten Antriebe zur Längen- und Querschwingung die Theilchen veranlassen, in geschlossenen krummen Bahnen zu schwingen? *)

Wenn aber schon bei den elektrischen Erscheinungen im Kleinen so viel noch zu wünschen übrig bleibt, wie wird es mit den elektrischen Erscheinungen im Grossen stehen, bei denen die einflussreichen Bedingungen ausser unserer Gewalt liegen, wir sie nicht einmal kennen, geschweige denn nach Bedürfniss abändern können? Da nun Robida in seiner Vibrationstheorie durchaus noch nicht die unerlässliche Klarheit und einen so sicheren Grund erlangt hat, dass selbst mit aller Richtigkeit und Deutlichkeit daraus abgeleitete Folgerungen auf unbedingte Glaubwürdigkeit Anspruch machen könnten, so glauben wir uns einer durchgreifenden Besprechung

---

*) Vergl. S. 159 des IV. Jahrg. dieser Zeitschr. Die dort ebenfalls erwähnten spiralförmigen Knotenlinien bei längsschwingenden Cylindern oder Röhren (Savart) stellt Robida als Analogien der Influenz hin. Wird nämlich eine Glasröhre mit einem feuchten Tuch gerieben, so entsteht beim Grundton auf der nicht geriebenen Hälfte eine spiralförmige Knotenlinie; die Knotenlinien beider Hälften sind nicht Fortsetzungen von einander, sondern beide scheinen von der Mitte auszugehen und sich beide nach derselben Weise, oder auch nach entgegengesetzter, herumzuwinden. Aber Savart erkennt in ihnen nicht einen Ausfluss der Longitudinalschwingungen, sondern eher der durch das Zusammendrücken und Wiederausdehnen veranlassten, secundären seitlichen Bewegung der Theilchen. (Pouillet.)

des Inhaltes seines zweiten Schriftchens „Magnetismus" um so eher überheben zu dürfen, als in diesem selbst wieder vielfache Unklarheiten, ja selbst Verwirrung und Verwechselung der Begriffe auftreten*); doch wollen wir wenigstens einen Ueberblick über die die darin entwickelten Ideen zu geben versuchen.

*C.* Elektrische Erscheinungen im Grossen. (Magnetismus §§. 1—8.)

Wenn Robida auch in der Vorrede vorausschickt, dass er der grössern Deutlichkeit wegen die bisherige Terminologie beibehalten wolle, so überrascht es doch, dass er die elektrischen Erscheinungen im Grossen weit mehr nach dualistischen Principien erörtert, als nach seiner Vibrationstheorie erklärt, und wo sich ja neben den Beschreibungen Spuren von solchen Erklärungen finden, da sind sie zumeist ungeniessbar und unzulänglich.

Chemische, thermische Vorgänge und die Berührung heterogener Stoffe wecken in der Erdkugel Elektricität, welche der Erfahrung gemäss negativ**) ist (§. 2); ihre Intensität nimmt von der Oberfläche nach dem Mittelpunkte hin ab, weil sich die freie Elektricität hauptsächlich an der Oberfläche lagert, sie nimmt aber wie die Temperaturdifferenzen vom Aequator nach den Polen hin zu. In der Luft sind 79 Theile Stickstoff mit 21 Theilen Sauerstoff gemischt; Sauerstoff verhält sich gegen Stickstoff negativ, Stickstoff gegen Sauerstoff positiv elektrisch: jedes Lufttheilchen ist also ein galvanisches Element***); da aber die Anzahl der schwingenden Stickstofftheilchen grösser ist, und da bei der Ausgleichung sich gleich viel positive und negative Wellen (!) neutralisiren, so bleiben positive Wellen übrig, und die Luft ist positiv, d. h. stets der Erde entgegengesetzt elektrisch (§. 1). Die Erdelektricität neutralisirt und bindet einen Theil davon; der Ueberschuss strebt nach der Oberfläche der Atmosphäre und die Intensität nimmt daher mit der verticalen Höhe zu; dabei dient der Wasserdampf hauptsächlich als Leiter der freien Elektricität welche z. Th. auch in den Weltraum****) ausströmt; die Luftelektricität wird durch die Erdelektricität modificirt und diese modificirte Elektricität ist die Totalelektricität der Erde (§. 3). Hier nun tischt uns Robida aus Unverdautem einen unverdaulichen Brei auf, indem er Begriffe, die wohl von einer Kraft (Anziehung und Abstossung bei Magneten) gebraucht werden können, ohne weiteres auf Schwingungen überträgt, die einer

*) Robida gesteht ihre Mangelhaftigkeit in der Vorrede selbst zu.

**) Wohin kommt denn die positive Elektricität, da doch durch die Berührung immer beide Elektricitäten gleichzeitig entwickelt werden? Dass Robida in seiner Beobachtung (Magn. S. 7., 2) zwei Maxima aufzählt, zwischen denen kein Minimum liegt, fällt weiter nicht auf.

***) Hat die Berührung zwischen Erde und Luft, Meer und Luft keinen Einfluss?

****) Dieser kann also nicht leer sein, da die elektrischen Schwingungen nach Robida Schwingungen der Körpertheilchen sind.

allseitigen Fortpflanzung fähig sind; er sagt Magn. S. 10: „die in der verticalen Richtung thätige, mit der Erdelektricität in Spannung stehende Luftelektricität eines Ortes der Erde soll die verticale Componente der Totalelektricität heissen. Ausser dieser giebt es noch eine horizontale Componente derselben. Die den einzelnen Luftschichten zukommende freie Elektricität ist am Aequator die intensivste. Vom Aequator gegen die Pole nimmt die horizontale Componente der Totalelektricität ab und zwar schneller gegen Norden als gegen Süden. Demnach muss die horizontale Componente der Totalelektricität vom Aequator gegen die Pole zur Herstellung des Gleichgewichts streben und dies in der Richtung des geographischen Meridianes, weil die seitliche*) in der Regel gleich stark sein soll." Aus den beiden Componenten ergiebt sich natürlich auch eine Resultirende der Totalelektrität, und diese hat ihre „Normallage in der Ebene des geographischen Meridianes," hat „die Lage der Inclinationsnadel," also eine bestimmte Richtung. Was für eine Bedeutung aber diese Richtung für die Schwingung und Wellenbewegung hat, behält Robida für sich; die Fortpflanzungsrichtung der Schwingungen kann und soll es doch nicht etwa sein?

Nach einer Beschreibung (nicht Erklärung aus der Vibrationstheorie) des St. Elmsfeuers, des Polarlichtes und der Gewitter (§. 4) folgt die Besprechung der Variationen der Componenten der Totalelektricität. (§. 5), der Variationen der Resultirenden der Totalelektricität (§. 6) und der Perturbationen der letzteren (§. 7) eine fortlaufende Verwechselung mit den magnetischen Componenten, mit der Intensität und Richtung der Resultirenden des Erdmagnetismus.

Endlich reicht auch die Elektricität noch über die kleine Erde hinaus (§. 8). Alle Himmelskörper bestehen aus heterogenen Stoffen u. s. w., erzeugen also Elektricität; „diese Elektricität pflanzt sich theilweise, sowie die Elektricität der Erde auf den feinsten materiellen Theilchen von den Himmelskörpern in den Weltraum fort; also durchdringt die Elektricität, sowie die Schwere, das Licht und die Wärme den ganzen Weltraum." Die Photosphäre der Sonne ist eine sonnenelektrische Erscheinung. Aehnliche Vorgänge finden auf den Planeten statt.

### *D.* Der Magnetismus. (Magn. §§. 9—16.)

Wesen des Magnetismus (§. 9): „Der Magnetismus besteht in stehenden Circulationswellen, welche an der östlichen Seite des Magnetstabes aufsteigend, an der westlichen niedersteigend, den Magnet entweder vom Nordpol gegen den Südpol oder vom Südpol gegen den Nordpol umkreisen. Das Substrat magnetischer Wellen sind die Theilchen der des Magnetismus fähigen Körper." Ueber die Form und Art der Schwingungen, welche die

---

*) Was?

stehenden (Magn. S. 28: Verdichtungs- und Verdünnungs-) Wellen bilden, sagt Robida nirgends ein Wort, ebensowenig, wie die magnetischen Wellen dazu kommen, sich in Schraubenlinien fortzubewegen. Ja noch mehr: bisher hat er die elektrischen Schwingungen sich in geraden Linien fortpflanzen lassen, und jetzt auf einmal bewegen auch diese sich als Circulationswellen in Schraubenlinien, besonders die Wellen der Resultirenden der Totalelektricität (Magn. S. 28, 30, 49), und es weckt jede elektrische Welle eine parallele, aber entgegengesetzt gerichtete magnetische Welle und ist mit ihr gleichbedeutend (Magn. S. 56). Die Veranlassung zum Entstehen dieser Ansicht scheinen die schraubenförmigen Windungen des Leiters um die Elektromagnete gegeben zu haben*); ein Unterschied musste aber doch sein; desshalb entgegengesezte Richtung. Da nun die Spirale selbst magnetisch wird und ihre Pole ebenso liegen, wie im Eisenkern, so entstehen natürlich in ihr zugleich auch den elektrischen Wellen entgegengesetzt gerichtete magnetische, ohne alle Interferenz. Wie beim Magnetisiren beide Magnetismen zugleich entstehen, bedarf keiner Erklärung, oder ist der Phantasie eines jeden Lesers überlassen. Dass die elektrischen Wellen sich „zur Herstellung des Gleichgewichts" (Rotation bei unipolarer magnetischer Induction; Magn. S. 43) selbst wieder bewegen, dass die Wellen (als blose Formen einer Bewegung) sich anziehen und abstossen, wer kann daran zweifeln? Verlockend (doch nur beim ersten Anblick) lauten die Erklärungen für die Lage der Pole für die Durchwirkung und das Auftreten von Folgepunkten (§. 10): „das wirksamste Streben zur Weckung und Anziehung magnetischer Elemente des benachbarten Mediums tritt nicht in den Grenzelementen auf, sobald das angrenzende Medium für magnetische Wellen minder geeignet ist, als der Magnet selbst. Denn in diesem Falle werden die aus den beiden Grenzelementen austretenden magnetischen Wellen theilweise in sich reflectirt, daher die an den Enden des Magnetes liegenden Elemente durch Interferenz etwas geschwächt. Somit liegen die Pole eines unarmirten Magnetes nicht in den beiden Endquerschnitten, sondern nach der grösseren oder geringeren Leitfähigkeit des angrenzenden Mediums und nach der kleineren oder grösseren Länge des Magnetstabes in einem geringeren oder grösseren Abstande von den Enden desselben. Wenn zwischen einem Magnete und einem des Magnetismus fähigen Körper ein anderer, des Magnetismus unfähiger Körper liegt, so pflanzen sich in dem letzteren elektrische Wellen fort, welche in dem des Magnetismus fähigen Körper wieder magnetische Wellen wecken (Durchwirkung).

*) Obgleich es „zur Weckung des Magnetismus in Eisen nicht absolut nothwendig ist, dass der elektrische Strom in isolirten Windungen das Eisen umkreise, sondern derselbe auch unmittelbar durch das Eisen geführt werden kann. Es ist aber ein Naturgesetz, dass der elektrische Strom, dem keine Richtung um das Eisen aufgedrungen ist, an der nächsten getroffenen Stelle in das Eisen eintrete, dasselbe in Westen aufsteigend und in Osten niedersteigend umkreise und im Eisen seinen elektrischen Wellen parallele, aber entgegengesetzt gerichtete magnetische Wellen wecke. (Magn. S. 29.)

Folgepunkte entstehen, sobald in den einzelnen Querschnitten des Stahls ungleich intensive Schwingungen hervorgerufen werden." Wenn Robida von einer Wechselwirkung zwischen „Elektricität in der Spannung und Magnetismus" spricht (§. 11, I.), so deutet er das Experiment*) ganz falsch und verwechselt Anziehung in Folge elektrischer Influenz mit einer Anziehung zwischen elektrischen Körpern und Magneten. Die Erklärung der Wechselwirkung zwischen strömender Elektricität und dem Magnet (§. 11, II.) und die der magnetoelektrischen Induction**) (§. 12) leidet an der gewohnten Unklarheit, wenn man überhaupt eine Erklärung herauszufinden im Stande ist. Die Erklärung der magnetischen Declination (§. 13) und Inclination (§. 14) stützt sich auf die Annahme einer Resultirenden der Totalelektricität, steht und fällt mit dieser. Aber (§. 15, erdmagnetische Intensität) „nicht nur eine freibewegliche, sondern auch die Declinations-Nadel wird von der ganzen Intensität***) der Totalelektricität in die Verticalebene der Resultirenden (also nach den Früheren in den geographischen Meridian) abgelenkt und darin festgehalten, weil die Unterstützungsart der Declinationsnadel die Wirkung der Resultirenden der Totalelektricität nur insofern aufhebt, als sich die magnetische Axe der Nadel mit der Richtung der Resultirenden in der Ebene des magnetischen (also doch nicht geographischen) Meridianes nicht parallel stellen kann." Zum Ueberfluss macht Robida noch ausdrücklich darauf aufmerksam (§. 16, Erdmagnetismus), dass in seiner Abhandlung die Totalelektricität der Erde dem Erdmagnetismus substituirt (in gutem Deutsch würde es heissen: mit ihm verwechselt) wurde und dann schliesst er mit den letzten Proben von Consequenz in der Willkür und von Klarheit im Ausdruck, in den Begriffen und Beweisen: — *tamen est laudanda voluntas!* Dr. Zetzsche.

---

*) „Der geladene Conductor zieht ja stets den nächsten Pol an, und die Nadel stellt sich senkrecht auf die beiden mit dem Conductor und dem Reibzeug verbundenen Polplatten, ohne Unterschied, ob dem Nordpol der Nadel der positiv oder negativ geladenen Platte zugekehrt war."

**) Ueberraschend ist es, dass „die magnetischen Flüssigkeiten geradlinig fortschreitende Wellen haben, welche die Flüssigkeitstheilchen in der Längenrichtung aneinander drängen. (Magn. S. 48.)

***) Nicht blos von der horizontalen Componente; „denn die Schwingungsdauer einer Declinationsnadel wird um so kürzer, je näher man sie einem freundschaftlichen Magnetpole bringt. Also müsste die horizontale Intensität des Erdmagnetismus um so mehr wachsen, je näher man zum magnetischen Erdpole kommt. An diesem strebt aber jede Magnetnadel ihre magnetische Axe vertical zu stellen. Somit ist die im Wachsen begriffene horizontale Componente des Erdmagnetismus ohne hinreichende Ursache plötzlich verschwunden. Daraus scheint mir klar zu folgen, dass die Declinationsnadel nicht von der horizontalen Componente allein gerichtet wird. Demnach kann die in Physikwerken angegebene Formel, in welcher die Intensität mit der Schwingungsdauer des Ablenkungstabes im reciproken Verhältnisse steht, zur Berechnung der horizontalen Componente des Erdmagnetismus im absoluten Maasse nicht geeignet sein, und wir sind einstweilen genöthigt, uns mit der relativen Totalelektricität, welche mittelst Schwingungen derselben Declinationsnadel ermittelt wird, zu begnügen." Leider!

**Das Mittelmeer.** Eine Darstellung seiner physikalischen Geographie nebst anderen geographischen, historischen und nautischen Untersuchungen. Von Dr. C. Böttger, Professor am Gymnasium zu Dessau. Mit 6 Karten und 4 Holzschnitten. Leipzig, Verlag von Gustav Mayer. 1859.

Seit den ältesten Zeiten ist das Leben der europäischen Culturvölker so eng mit dem Gestade des Mittelmeeres verbunden, dass für historische, geographische und nautische Untersuchungen kaum ein reicherer und interessantorer Stoff gedacht werden kann, als jenes Meer, an dessen Küsten die Bildung einen Kreislauf von zwei Jahrtausenden zurücklegte, um sich dann von alternden Nationen hinweg nach Norden zu wenden. Gleichwohl existirt in der deutschen Literatur kein Werk, welches das genannte Thema einigermassen erschöpfend behandelt, und nur bei den modernen Phöniziern finden wir ausser zahlreichen Monographien eine umfassendere Darstellung der physischen Geographie des Mittelmeers, nämlich: „*The Mediterranean. A Memoir Physical Historical and Nautical by Rear-Admiral W. H. Smyth, London, Parker* 1854. Es war daher jedenfalls ein sehr glücklicher Gedanke, aus den verschiedenen Quellen, sowie aus eignen Studien eine möglichst vollständige Darstellung des Gegenstandes zusammenzuarbeiten, auch ist Ref. der Ueberzeugung, dass hierzu sich gerade der Verfasser besonders gut eignete, da ihm ausser seinem Fache (Mathematik und Physik) tüchtige philologische, historische und geographische Kenntnisse zu Gebote stehen, wie derselbe schon früher bei seiner deutschen Bearbeitung von **Maury's** physikalischer Geographie des Meeres bewiesen hat.

Das ziemlich umfangreiche Werk (610 Seiten gross 8.) beginnt mit einer Einleitung („die geschlossene Thalassa und der offene Okeanos") und zerfällt im Uebrigen in acht Capitel folgenden Inhalts. Cap. I giebt eine Eintheilung des Mittelmeeres in drei Hauptbecken und charakterisirt im Allgemeinen die Configuration der Küsten längs derselben. In Cap. II erhalten wir einen chorographischen Ueberblick des gesammten Littorals mit Berücksichtigung der Produkte und des Handels. Die historischen Verhältnisse sind hier ebenso gewissenhaft wie die geographischen behandelt; bei jedem einzelnen Küstenstriche wie bei jeder Insel werden nicht nur Beschaffenheit, Cultur und Erzeugnisse des Bodens, Fischerei, Exportartikel und Handel der Bewohner geschildert, sondern auch genaue Nachweise über die früheren (auch arabischen) Namen der Landschaft, der Städte, Flüsse u. s. w. gegeben, desgleichen über Veränderungen in den Lagen der Wohnsitze u. dergl. Cap. III hat es mit dem Becken des Mittelmeeres zu thun, also mit der eigentlichen unterseeischen Topographie, den Meerestiefen und den Veränderungen, welche das Becken theils durch neptunische, theils vulkanische Kräfte erlitten hat. In Cap. IV werden die Gewässer des Mittelmeeres betrachtet, nämlich Zufluss oder Flussgebiet und sonstige Quellen des Meeres, Wasserbestandtheile und deren Differen-

zen, Temperatur, Farbe und Leuchten des Meerwassers, Ebbe und Fluth, Strömungen, Strudel, Flora und Fauna des Meeres. Cap. V. beschäftigt sich mit der Atmosphäre über dem Mittelmeere, wohin ausser Wind und Wetter auch das Küstenklima und die Krankheitserscheinungen (z. B. die *malaria*) gerechnet sind. Cap. VI. schildert die Verhältnisse der Schifffahrt und des Handels, zunächst die Wasserstrassen und die Dampfschifffahrtslinien, sowie die anliegenden Kanäle, Eisenbahnen und Caravanenstrassen. Geschichtliche Rückblicke auf den Handel von Phönizien, Griechenland, Karthago, Rom, Amalfi, Pisa etc., sowie Notizen über den gegenwärtigen Handel, Kriegs- und Handelsmarine, Telegraphenlinien etc. sind gleichfalls gegeben. Cap. VII. enthält Beiträge zur Culturgeschichte des Mittelmeeres im Allgemeinen, sowie zur Geschichte der Messungen und geographischen Untersuchungen insbesondere; endlich Cap. VIII die geographischen Ortsbestimmungen der neuesten Zeit. Noch finden sich einige Anhänge, welche einzelne Punkte betreffen, z. B. die Grahaminsel, den Suez-Kanal, die Strassen nach Centralafrika u. s. w.

Schon diese, bei weitem nicht vollständige Inhaltsangabe bezeugt den Reichthum des Werkes; rechnet man hierzu die 555 Noten unter dem Texte, in denen alle möglichen alten und neuen Schriftsteller figuriren, so glaubt man gern, wenn der Verfasser versichert, seit 20 Jahren Studien über das Meer gemacht zu haben. Wir halten es für unsere Pflicht, unsere Leser auf dieses gediegene Werk aufmerksam zu machen, welches Gelehrsamkeit und anziehende Darstellung glücklich vereinigt. Die typographische Ausstattung ist gleichfalls vorzüglich. SCHLÖMILCH.

---

**Logarithmisch-trigonometrisches Handbuch** von Dr. H. G. KÖHLER. Sechste Stereotypausgabe. Leipzig, Tauchnitz 1859.

Ein in sechster Auflage erscheinendes Buch bedarf selbstverständlich keiner Besprechung und es bleibt daher nur zu erwähnen, worin sich die neueste Auflage von den früheren unterscheidet. Es betrifft diess hier nur eine Anzahl von Verbesserungen in der letzten Decimale der Briggischen Logarithmen von 102001 bis 107999; die genannten Correctionen sind von den Herren Lefort, Ingenieur in Paris, und Dr. Houel in Caen durch Vergleichung mit den Catastertafeln der Pariser Sternwarte gewonnen worden. Für den Schulgebrauch hat übrigens Ref. die Köhler'schen Tafeln deswegen lieb gewonnen, weil sie Vieles enthalten, was in den übrigen Tafeln fehlt, aber beim Unterrichte grosse Erleichterungen verschafft, z. B. die Potenzentafel, die Tafel der Quadrat- und Cubikwurzeln, die natürlichen Logarithmen, die Coefficienten verschiedener unendlicher Reihen u. dergl. m. SCHLÖMILCH.

**Fünfstellige logarithmisch-trigonometrische Tafeln** von Professor Dr. Wittstein. Hannover, Hahn 1859.

Gewiss nicht mit Unrecht bemerkt der Verfasser (in Uebereinstimmung mit Schulrath J. H. T. Müller), dass siebenstellige Tafeln für den Unterricht einen ganz überflüssigen und schwerfälligen Ballast bilden und selbst in den meisten praktischen Fällen eine ganz unnöthige Genauigkeit darbieten. Ebenso wird man dem Verfasser beistimmen, wenn er für den ersten Unterricht in der Trigonometrie den Tafeln der natürlichen trigonometrischen Zahlen den Vorzug einräumt. Nach diesen Ansichten ist das vorliegende, nur 132 Seiten umfassende Werkchen zusammengestellt. Es enthält 1) die fünfstelligen Logarithmen der Zahlen von 1 bis 9999, 2) die natürlichen trigonometrischen Zahlen von 15 zu 15 Minuten (entsprechend der Sehnentafel des Ptolemaeus), 3) die Logarithmen der trigonometrischen Functionen von Minute zu Minute, 4) die Längen der Kreisbögen, 5) die Gauss'schen Logarithmen für Summen und Differenzen (nach einer neuen empfehlenswerthen Anordnung), 6) eine kleine Tafel der natürlichen Logarithmen, 7) eine Formelnsammlung. Zwei Vorzüge dieser Tafeln fallen auf den ersten Blick in die Augen, nämlich kleines Volumen und eine ganz ausserordentliche Deutlichkeit der Ziffern, welche theils durch deren ungewöhnliche Grösse und Stärke, theils durch den altenglischen Typenschnitt, theils durch den reichlich gesperrten Satz erzielt worden ist. Sollten sich die Tafeln als correct erweisen, woran wir bei der bekannten Genauigkeit des Verfassers nicht zweifeln, so sind sie nach unserer Ueberzeugung in jeder Beziehung die besten für Schüler, Techniker und überkaupt für Alle, deren Arbeiten nicht gerade unumgänglich eine Genauigkeit von sieben Decimalen erheischen. Schlömilch.

---

**Tables d'intégrales définies.** *Par D. Bierens de Haan. Publiées par l'Académie Royale des Sciences à Amsterdam. Amsterdam, Van der Post.* 1858.

Durch die Bemühungen einer ziemlich langen Reihe von Mathematikern aller Nationen ist die Theorie der bestimmten Integrale zu einem sehr ansehnlichen Theile der Analysis ausgebildet worden, der sich hauptsächlich durch eine grosse Mannichfaltigkeit von Methoden auszeichnet. Dieser Reichthum hat freilich für den heutigen Leser auch eine Unbequemlichkeit zur Folge; da nämlich zur Zeit kein besonderes der Empfehlung werthes Werk*) über jene Theorie existirt, so bleibt dem Leser nichts übrig, als das Studium der Originalquellen, die aber aus einer Unzahl von

*) In der allgemeinen Encyclopädie von Ersch und Gruber hat Ref. vor einigen Jahren den Artikel „Bestimmtes Integral" bearbeitet; derselbe enthält ungefähr soviel als man auf deutschen Universitäten in einem halbjährigen Collegium über bestimmte Integrale vorzutragen pflegt, macht aber auf Vollständigkeit durchaus keinen Anspruch.

Abhandlungen bestehen. Je schwerer demnach die Uebersicht über ein so grosses Gebiet ist, desto dankenswerther muss es anerkannt werden, dass der Verfasser zunächst eine tabellarische Zusammenstellung der Resultate gegeben und bei jedem derselben die Quelle namhaft gemacht hat. Die Arbeit selber mag nicht gering gewesen sein, denn die Anzahl der vom Verfasser durchgegangenen Abhandlungen beträgt über 250, die Anzahl der Resultate gegen 3200, gewiss Zahlen, nach denen man den Fleiss des Verfassers bewundern muss. Dass es bei dem enormen Umfange des Materiales einer guten Anordnung bedurfte, um dem Leser den Ueberblick, mithin auch die Aufsuchung einer gewünschten Formel zu erleichtern, versteht sich von selbst, und Referent ist der Ueberzeugung, dass der Verfasser auch in dieser Beziehung etwas Tüchtiges geleistet hat. Das Werk zerfällt zunächst in drei Hauptheile, jenachdem unter dem Integralzeichen nur eine Function, oder zwei oder mehr verschiedene Functionen vorkommen. Jeder Theil ist wieder in Abschnitte getheilt, welche in den Ueberschriften die vorkommenden Functionen angeben; im ersten Theile findet man z. B. die Abschnitte: I. Algebraische Functionen, II. Exponentialgrössen, III. Logarithmen u. s. w.; im zweiten Theile sind die Ueberschriften die Combinationen zu je zweien aus den Ueberschriften im ersten Theile u. s. w. Die Abschnitte endlich zerfallen in die einzelnen Tafeln, von denen jede ihren besonderen Titel hat, welcher die vorkommende Specialität bezeichnet (z. B. rationale oder irrationale algebraische Functionen) und zugleich die Integrationsgrenzen angiebt.

Der vorliegende, 572 Seiten zählende Quartband enthält nur einfache bestimmte Integrale; vielleicht bestimmt die Anerkennung, welche derselbe überall finden wird, den Verfasser zu einer Fortsetzung seiner Arbeit. Bei physikalischen und mechanischen Problemen kommen doppelte, drei- und mehrfache Integrale so häufig vor, dass eine Tafel für diese ganz besonders wünschenswerth erscheint; dieselbe würde übrigens von bedeutend geringerem Umfange sein. SCHLÖMILCH.

---

# Bibliographie

vom 15. Februar bis 5. Mai 1859.

---

### Periodische Schriften.

Berichte über die Verhandlungen der K. S. Gesellschaft der Wissenschaften zu Leipzig. Mathem.-Physikal. Cl. Heft 2 und 3. ⅔ Thlr.

Monatsberichte der K. Pr. Akademie der Wissenschaften zu Berlin. Jahrg. 1859. 1. Heft. Berlin, Dümmler in Comm. pro compl. 1⅓ Thlr.

Zeitschrift des Vereins deutscher Ingenieure; redig. von F. Grashof. Jahrg. 1859. Heft 1. Berlin, Gärtner in Comm. pro compl. 6 Thlr.

Annalen der Physik und Chemie, herausgeg. von Poggendorf. Jahrg. 1859. No. 1. Leipzig, Barth. pro coml. 9⅓ Thlr.

Nautisches Jahrbuch für d. J. 1861. Herausgeg. von C. Bremiker. Berlin, G. Reimer. ⅓ Thlr.

*Bibliotheca historico-naturalis, physico-chemica et mathematica.* Herausgeg. von E. A. Zuchold. Jahrg. 1858. 2. Heft. Juli-December. Göttingen, Vandenhoek & Ruprecht. ⅓ Thlr.

*Annales de l'observatoire physique central de Russie, publiées par* A. J. Kupffer. *Année* 1855. 2 *Vol. Pétersbourg,* Leipzig, Voss. 7 Thlr.

*Correspondance météorologique: publication annuelle de l'administration des mines de Russie, rédigée par* A. J. Kupffer. *Année* 1856. *Petersbourg,* Leipzig, Voss. 5 Thlr.

## Reine Mathematik.

Hirsch, Meier, Sammlung von Aufgaben etc. aus der Buchstabenrechnung und Algebra. 10. Aufl. Berlin, Duncker & Humblot. 1⅓ Thlr.

Sachs, S. Auflösungen der in M. Hirschs Sammlung enthaltenen Aufgaben. 9. Aufl. Ebendas. 1⅔ Thlr.

Lübsen, H. B., Ausführliches Lehrbuch der Arithmetik und Algebra. 4. Aufl. Hamburg, Meissner. 1½ Thlr.

Weiss, A., Handbuch der Trigonometrie. 2. Auflage. Nürnberg, J. L. Schmid's Verl. 1 Thlr.

Schwarz, A., Grundzüge der Elementararithmetik. 2. Abthlg. Hagen, Butz. 1 Thlr.

Wittstein, Th., Fünfstellige logarithmisch-trigonometrische Tafeln. Hannover, Hahn. ⅔ Thlr.

Köhler, H. G., Logarithmisch-trigonometrisches Handbuch. 6. Aufl. Leipzig, Tauchnitz. 27 Ngr.

Sohncke's Sammlung von Aufgaben aus der Differential- und Integralrechnung. 2. Aufl. Herausgegeben von Dr. Schnitzler, Theil 2. Halle, Schmidt. 26 Ngr.

Lorey, A., Der geometrische Anschauungsunterricht. Eisenach, Bärecke. 2 Thlr.

Becker, F. W., Lehrbuch der Elementargeometrie. 1. Theil. Planimetrie. Abthlg. 2. Oppenheim a. R., Kern. 16 Ngr.

Escher, P., Die Berechnung des Flächeninhaltes der Kugelzone. Ein Beitrag zu jedem Lehrbuche der Stereometrie. Zürich, Schulthess. 8 Ngr.

KRAMER, A. ,Compendium der elementaren Mathematik (Arithmetik, Geometrie, ebene und sphär. Trigon.) 2. Aufl. Nordhausen, Förstemann. 25 Ngr.

BALOGH, J., *De quadratura circuli.* Pesth, Pfeiffer in Comm. 2⅔ Thlr.

BRIOT *et* BOUQUET, *Théorie des fonctions doublement périodiques et en particulier des fonctions elliptiques. Paris, Mallet-Bachelier.* 6 Fr.

## Angewandte Mathematik.

STOEVESANDT, C. H., Lehrbuch der Perspective. Liefrg. 2. Berlin, Herbig.

MAGNUS, G., Hydraulische Untersuchungen. Theil 2. Leipzig, Barth. 9 Ngr.

STEFAN, J., Ueber die Transversalschwingungen eines elastischen Stabes. Wien, Gerold's Sohn in Comm. 6 Ngr.

Sammlung ausgeführter Constructionen aus dem Gebiete des Wasser-, Strassen- und Eisenbahnbaues. Heft 7, 8 und 9. Carlsruhe, Veith. à 2 Thlr.

WIEBE, F. K. H., Skizzenbuch für den Ingenieur und Maschinenbauer. Heft 5. Berlin, Ernst & Korn. 1 Thlr.

BERNOULLI, J. G., Vademecum des Mechanikers. 10. Aufl. Herausgegeben von AUTENHEIMER Stuttgart, Cotta. 1 Thlr. 14 Ngr.

STEINHEIL, A., Tafeln für die Radien von Fernrohrobjectiven, deren innere Flächen aneinander passen. Inauguraldissert. München, Kaiser. 6 Ngr.

Die mikrometrischen Maasse in Decimalbrüchen und in gemeinen Brüchen. Braunschweig, Vieweg. ⅛ Thlr.

LITTROW, K. v., Physische Zusammenkünfte der Planeten (1 bis 42) während der nächsten Jahre. Wien, Gerold's Sohn in Comm. 1⅓ Thlr.

WEISS, E., Ueber die Bahn des Kometen VIII. des Jahres 1858. Wien, Gerold's Sohn in Comm. 2 Ngr.

SCHULTZ, H., Declinationsbestimmungen mit dem Dollondschen Durchgangsinstrumente auf der Berliner Sternwarte. Berlin, Nicolai'sche Sort. Buchh. in Comm. 1 Thlr.

ENCKE, J. F., Ueber die Existenz eines widerstehenden Mittels im Weltenraum. Berlin, Dümmler in Comm. ⅓ Thlr.

GODILLOT, J. B., *Calcul de la résistance des poutres en tôle employées dans la construction des ponts et applications numériques de ce calcul à divers exemples de ponts pour chemins de fer. Chalons sur Saône, Montalan.* 3 Fr.

ROFFIAEN, E., *Traité théorique et pratique sur la résistance des matériaux dans les constructions. Fleurus. (Bruxelles, Muquardt.)* 1 Thlr. 24 Ngr.

LOVE, G. H., *Des diverses résistances de la fonte, du fer etc. dans les constructions.* *Paris, Lacroix & Baudry.* 8½ Fr.

## Physik.

Physikalisches Lexicon von MARBACH und CORNELIUS. 2. Auflage. Liefrg. 71, 72. Leipzig, O. Wigand. à ½ Thlr.

MOUSSON, A., Die Physik auf Grundlage der Erfahrung 2. Abth. 1. Heft. Zürich, Schulthess. 28 Ngr.

STAMMER, K., Lehrbuch der Physik. Bd. 2. Lahr, Schauenburg & Comp. 1 Thlr.

ZOLLINGER, H., Ueber die Gewitter und damit verwandte Erscheinungen im indischen Archipel. Zürich, Schulthess in Comm. 16 Ngr.

GRAILICH und v. LANG, Untersuchungen über die physikalischen Verhältnisse krystallisirter Körper. 3. und 4. Abthlg. Wien, Gerold's Sohn in Comm. 17 Ngr.

LANG, V. v., Ueber die Minimalablenkung der Lichtstrahlen durch doppelt brechende Prismen. Ebendas. 2 Ngr.

KNOCHENHAUER, K. W., Ueber den elektrischen Zustand der Nebenbatterie während ihres Stromes. Ebendas. 6 Ngr.

KREIL, K., Anleitung zu magnetischen Beobachtungen. 2. Aufl. Ebendas. 1⅓ Thlr.

FARADAY, M., *Experimental Researches in Chemistry and Physics. Reprinted from the „Philosophical Transactions of* 1821—1857, *the „Journal of the Royal Institution", the „Philosophical Magazine" and other publications. London, Taylor and F. Cloth.* 15 sh.

TIMBS, J., *The Year-Book of Facts in Science and Art; exhibiting the most important discoveries and improvements of the past year in natural philosophy, meteorology, astronomy etc. London, Kent. Cloth.* 5 sh.

# Literaturzeitung.

---

## Recensionen.

**Grundzüge einer Elementar-Arithmetik.** Ein Lehrbuch für Gymnasien und höhere Bürgerschulen von Dr. HERMANN SCHWARZ. Hagen, Druck und Verlag von Gustav Butz. 1859.

Nach den verschiedenen Schriften, mit welchen der Verfasser die mathematische Literatur schon bereichert hat, und unter welchen gleich der „Versuch einer Philosophie der Mathematik,“ Halle 1853, beim ersten Erscheinen die regste Aufmerksamkeit erweckt hat, war es dem Referenten interessant, auch die elementaren Theile der Mathematik von derselben Anschauung aus bearbeitet zu sehen, welche in dem genannten Buche freilich noch in etwas gezwungener Sprache durchdringt. Dieses vorläufige Interesse hat sich, wir beeilen uns es zu sagen, bei der genauen Lectüre des vorliegenden Werkchens im vollsten Maasse gerechtfertigt, und mit wahrem Vergnügen sind wir den logisch strengen Entwickelungen gefolgt, die in angenehmer, von Hegel'schen Floskeln gereinigter Sprache dem Leser entgegentreten. Referent glaubt deshalb auch nicht anstehen zu dürfen, in eine etwas genauere Besprechung eines Buches einzugehen, welches bei der nur zu leicht begreiflichen, durchaus unwissenschaftlichen Aufregung, welche alle Theile unseres Vaterlandes erfasste und in Spannung erhält, gar leicht weniger bekannt werden dürfte, als es gewiss sollte. Es kann dabei der unparteiischen Würdigung des Werkchens keinen Eintrag thun, dass dasselbe, wie der Verfasser so freundlich war, gegen mich zu äussern, zum Theil unter Benutzung meiner Schrift desselben Titels entstanden ist. Im Gegentheil wird diese theilweise Uebereinstimmung, und um so mehr theilweise Abweichungen Gelegenheit bieten, manche Bemerkung auszusprechen.

Der reiche Inhalt des etwa 25 Bogen starken Buches umfasst weit mehr, als früher unter dem Namen Elementarmathematik vereinigt wurde. Die wissenschaftliche Behandlung der Elemente geht in neuerer Zeit mit Recht von der Ansicht aus, dass es nicht ein blos äusserlicher Unterschied ist, der zwischen niederer und höherer Mathematik existirt, dass die Verschiedenheit vielmehr eine in der Sache selbst begründete ist, und deshalb

auch die Nothwendigkeit bedingt, schärfer als sonst zu trennen. Das sonstige Kriterium der Trennung des Leichteren von dem Schwierigeren ist geschwunden, und in Gefolge des neuen Sonderungsgrundes der Betrachtung des Gewordenen und des Werdenden, des Constanten und des Veränderlichen, des Discreten und des Continuums mussten ganze Capitel der früheren Analysis den heutigen Elementen eingefügt werden. Es gilt dieses namentlich für die Lehre von den complexen Zahlen, welche sich ihre natürliche Stellung täglich mehr sichert, sowie auch von den zahlentheoretischen Untersuchungen, welche kaum mehr entbehrt werden können. In beiden Beziehungen hat der Verfasser den strengsten Anforderungen genügt, in dem letzteren Capitel fast mehr als genügt.

Der Grundgedanke, von welchem der Verfasser ausgeht, und welcher gleichfalls ein den besseren neueren Elementarwerken gemeinsamer ist, steht im Wesentlichen in der allmäligen Erweiterung des Zahlbegriffes von der absoluten ganzen Zahl ausgehend, bis zuletzt der Veränderliche erhalten wird, welcher jede Grösse sowie jede Richtung annehmen kann. Es werden nämlich die einzelnen Operationen der Arithmetik in der Art an einander gereiht, dass je zwei inverse Operationen auf einander folgen, dass die zweite immer die Unzulänglichkeit des Zahlenbegriffes beweist, welcher in der ersten vorlag, dass somit eine Veränderung jenes Begriffes nothwendig wird, welche rückwärts wieder auf eine Verallgemeinerung jener ersten Operation drängt, so dass dieselbe an den neuen Zahlen geprüft werden muss. Unterscheidend dürfte für das vorliegende Werk die frühzeitige Einführung des Begriffes der Incommensurabilität sein, welcher aus dem Verhältnissbegriffe hergeleitet wird, bevor die Ausziehung irrationaler Wurzeln ihn nothwendig macht. Allein abgesehen von dieser principiell gewiss weniger bedeutenden Abweichung ist, wie gesagt, der Gang des Verfassers der seit einer Reihe von Jahren in der strengen Wissenschaft eingebürgerte. Referent selbst folgt diesem Gange, der in analytischem Fortschreiten vom Einfachen zum Complicirten seine grossen didactischen Vortheile besitzt.

Eine andere Frage ist alsdann die, ob nach der analytischen Entwickelung es nicht zweckmässig erscheinen dürfte, sämmtliche Operationen der Arithmetik nochmals synthetisch zusammenzufassen, und wie sie jetzt in allgemeinster Form nach allgemeinster Definition bekannt geworden, sie alle gleichmässig aus einem Gedanken herzuleiten. Die Frage dieser Zweckmässigkeit schien mir aber immer nur mit der Frage der Möglichkeit zusammenzufallen, und seit mir diese letztere sich herausstellte, hatte ich mehrfach Gelegenheit, diese Art von synthetischer Recapitulation in meinen Vorlesungen zu benutzen. Es möge mir daher gestattet sein, hier wenigstens eine Andeutung dieser methodisch wohl neuen Auffassung zu geben. Die Bildung der Zahl wird dabei als erste Operation, als Individualisirung von einer oder mehreren Einheiten bezeichnet. Von diesem

Anfange ausgehend, ergiebt sich die nächste Aufgabe, aus zwei Zahlen eine neue zu bilden, und zwar entweder so, dass das Gesetz der Bildung, wie es in der ersten Zahl schon existirt, beibehalten wird, und die zweite Zahl dieses Gesetz nur in vorgeschriebener Ausdehnung weiter anwendet (Addition) oder so, dass die zweite Zahl das Gesetz vorschreibt, wie mit der ersten verfahren werden soll. Dann kann aber mit der ersten Zahl entweder additiv so verfahren werden, wie die zweite vorschreibt (Multiplication) oder, nachdem diese Operation zur Kenntniss gelangt ist, multiplicativ (Potenzirung). Auf diese Weise erhalte ich sogleich die allgemeinsten Definitionen der einzelnen Operationen nebst ihrer, in ihnen einbegriffenen Inversen, ohne eine nachträgliche Erweiterung noch vornehmen zu müssen. Ich wiederhole übrigens ausdrücklich, dass ich diese Synthesis nicht der auch vom Verfasser benutzten Analyse substituire, sondern nur nachträglich ihr folgen lasse, ich benutze sie gewissermassen nur als mnemonischen Kunstgriff, um die allgemeinen Regeln, die in ihr so prägnant als kurz enthalten sind, in einem Satze vereinigt zu haben.

Mit Recht wohl hat der Verfasser sich erlaubt, einfache geometrische Begriffe bei der Darstellung der Arithmetik zu benutzen. Es kommt nur darauf an, dass man Zahllinie und Zahlebene als Bild, als Beispiel gebraucht, und dann ist es sicherlich wahr, was in der Vorrede ausgesprochen wir: dass man, wenn die Einführung jener geometrischen Begriffe umgangen werden soll, „entweder genöthigt ist, denselben andern, gleichfalls der „Empirie entnommenen Begriffe zu substituiren oder den vermuthlich wenig dankbaren Versuch machen muss, durch metaphysische Erörterungen den Gang der mathematischen Entwickelung zu unterbrechen.“ Bei dieser Auffassung als blosses Beispiel fallen auch von selbst die Einwürfe, welche in neuester Zeit gegen die Theorie der complexen Zahlen erhoben werden wollen, welche indessen auch in anderer Weise zu entkräften sind. Ein hauptsächlicher Einwurf bezieht sich nämlich darauf, dass eine consequente Weiterführung der Zahlenlinie und Zahlenebene nothwendig Raumzahlen ergeben müsste, dass aber die bisherigen Versuche, diese Verallgemeinerung wirklich durchzuführen, nur Widersprüche hervorbrachten. Dagegen können wir nun füglich bemerken, dass einestheils bisherige Fruchtlosigkeit nicht den Schluss auf absolute Unfruchtbarkeit einer Methode zulässt, dass aber überdies eine solche Ausdehnung nicht einmal nothwendig ist, um die Richtigkeit der bisher erhaltenen Resultate zu erhärten. Kommt es doch so häufig in der Mathematik vor, dass bei Ausdehnung eines Begriffes eine ganz andere Gedankenreihe auftritt, als man von vorn herein zu vermuthen berechtigt schien. So lässt sich ein einfaches, ein doppelt bestimmtes Integral durch räumliche Vorstellung versinnlichen; beim dreifachen Integral muss schon der der Räumlichkeit fremde Begriff der Dichtigkeit hinzutreten, wenn man eine Versinnlichung beabsichtigt; bei noch mehrfachen Integralen endlich muss man auf eine solche Versinnlichung

ganz verzichten. Müssten unsere Gegner im Gebiete der complexen Zahlen, wenn sie consequent sein wollten, nicht auch sagen: die Deutung, welche man dem einfachen, dem doppelten Integrale beilegt, kann nicht für gerechtfertigt gelten, weil sie beim dreifachen Integrale schon nicht mehr allein ausreicht, beim vierfachen uns ganz im Stiche lässt?

Ich wende mich zu Einzelheiten, welche in nicht geringer Zahl eine Erwähnung verdienen, so dass ich nur eine knappe Auswahl des Wichtigsten zu treffen gedenke.

Gleich am Anfange des Buches bei der Definition der Grösse und nicht minder im grössten Theile seines Verlaufs vermisse ich das Unendlichgrosse. Es ist sicher keine Vergesslichkeit des Verfassers die Ursache dieser Auslassung, allein mir wenigstens ist es nicht möglich, einen Grund abzusehen, wesshalb dieser der ganzen Mathematik so wesentliche Begriff aus den Elementen entfernt gehalten werden soll; warum man seine Entstehung aus der Division $\frac{a}{0}$ ignoriren soll, wenn man ihn doch später braucht, wenn man (S. 207) $x^n$ für $x > 1$ bei wachsendem $n$ eine unendlich grosse Grösse nennt, und auch den Begriff des sogenannten Unendlichkleinen in Betracht zieht. Es klingt dieses ganz besonders wunderbar, wenn man besonders (S. 506 flg.) die Theorie der unendlichen Reihen in strengster Weise angebahnt findet, welche weit eher den Elementen fremd ist, wenn man besonders (S. 211) auf das vortrefflich ausgedrückte Fundamentaltheorem der Reihenentwicklung trifft: „Bezeichnet $X$ irgend einen ge- „schlossenen Ausdruck, und ist es durch irgendwelche arithmetische Ope- „rationen möglich, denselben in zwei Theile zu zerlegen, von denen einer „eine Reihe ist, deren Gliederzahl beliebig gross genommen werden kann, „und der andere eine Grösse, die mit wachsender Gliederzahl der Reihe un- „begrenzt abnimmt, so kann man den zweiten Theil vernachlässigen, sofern „die Gliederzahl der Reihe unbegrenzt angenommen wird, d. h. der Ausdruck „$X$ ist die Summe der auf diese Art resultirenden unendlichen Reihe."

Hingegen kann ich nur beifällig erwähnen, dass (S. 2) ausdrücklich besprochen wird, dass die Eins eine Zahl sei. Haben doch bis in die letzten Jahre einzelne Autoren die Behauptung des Gegentheils wieder aufgestellt. Giebt es doch noch immer Leute, die mit dem Kopf gegen die Felswand zu rennen versuchen und, während sie mit blutender Stirn zurücktaumeln, noch läugnen, dass der Monolith eine Mauer gewesen, weil sie es mit Gemäuer verwechseln, weil sie nicht an den Unterschied von Anzahl und Mehrzahl denken. Es war deshalb wohl zweckmässig, mit klaren Worten jener unrichtigen Ansicht entgegenzutreten, deren ganze heutige Berechtigung nur darin liegt, dass sie in früheren Zeiten berühmte Vertheidiger besass, von denen ich nur B o e t h i u s und ganz besonders L u c a s P a c c i o l i nennen will. Letzterer sagt am zuversichtlichsten: *Numero e una multitudine de unita composta, et essa unita non e numero: ma ben principio de ciascun numero.*

Wenn (S. 8) die doppelte Auffassung der Subtraktion dahin ausgesprochen wird, dass man entweder frage, wie viele Einheiten dem Minuendus abgezählt werden, damit der Subtrahendus übrig bleibe, oder wie viele Einheiten dem Subtrahendus zugezählt werden müssen, damit der Minuendus herauskomme, so ist diese Ausdrucksweise doch wohl nicht klar genug. Mir scheint die Unterscheidung präciser, wonach das eine Mal gefragt wird, wie viel Einheiten übrig bleiben, wenn der Subtrahendus von dem Minuenden abgezählt wird und das andere Mal, wie viele Einheiten dem Subtrahenten zugezählt werden müssen, damit der Minuendus herauskomme. Jedenfalls ist aber überhaupt anzuerkennen, dass die doppelten Auffassungen der Subtraktion und der Division (S. 51) so ausdrücklich erwähnt werden. Letztere ist ganz besonders hübsch charakterisirt, wie die ganze Division zu den gelungensten Theilen des Buches gehört, mit einziger Ausnahme einer Stelle (S. 60), wo irrthümlich angegeben ist, es sei nicht absolut nothwendig, Division und Dividend nach demselben Gesetze zu ordnen.

Im Gefolge der Subtraktion treten natürlich die entgegengesetzten Zahlen auf, welche auch zu Betrachtungen über algebraische und über absolute Zahlen führen. Von dem vielen Vortrefflichen, welches in diesem Capitel sich findet, hebe ich die Bemerkung hervor, wonach die absolute Zahl die Einheit in einem bestimmten Sinne setzt, ohne dass man sich dessen bewusst ward, dass die Einheit auch ein Setzen im entgegengesetzten Sinne zulasse, dagegen die positive Zahl das Bewusstsein dieser Möglichkeit einschliesse (S. 13, Anmerkung). Endlich erwähne ich noch den Beweis, dass dieselbe Zahl durch die Differenz $a - b$ wie durch die Summe des positiven $a$ und des negativen $b$ erhalten wird (S. 23), welcher die Bemerkung rechtfertigt, dass es gleichgültig ist, ob man die Zeichen $+ -$ als Rechnungszeichen oder als Vorzeichen fasst (S. 20, 22, 24). Nur mit dieser Rechtfertigung ist ein derartiges Schwanken der Bedeutung auch theoretisch zu vertheidigen, während sonstige Autoren oft praktisch und unbewusst zu dieser Zeideutigkeit gelangten, welcher gegenüber es dann gewiss vorzuziehen ist, wenn man die Zeichen $+ -$ nur in einer einzigen Bedeutung benutzt. Analog zu diesem bei strenger Entwickelung also unentbehrlichen Satz, den ich noch in keinem andern Werke in solcher Durchführung antraf, ist auch bei der Rechnung mit Brüchen besonders nachgewiesen (S. 140), dass Multiplication mit einem Bruche der Division gleichbedeutend ist, oder in Zeichen, dass $a : n = \frac{a}{n} = a \cdot \frac{1}{n}$, indem $a : n$ und $\frac{a}{n}$ die zwei verschiedenen Auffassungen der Division bezeichnen, auf welche ich schon aufmerksam gemacht habe.

Eine eigenthümliche Stellung nehmen die zahlentheoretischen Untersuchungen ein, welche noch vor der Bruchrechnung auftreten. Doch möchte

ich es nicht gerade ein Vorgreifen nennen, indem allerdings die Sätze von der Theilbarkeit der Zahlen die Ausführung einer Division, welche in ganzen Zahlen nicht aufgeht, nicht vorauszusetzen braucht, indem nur die Reste einer solchen Division berücksichtigt werden; und was von Potenzresten gegeben ist, bezieht sich auch nur auf Potenzen mit ganzen positiven Exponenten, wie sie schon (S. 42) als abgekürzte Multiplicationsbezeichnung eingeführt werden. „Das Unentbehrlichste aus der Zahlentheorie" (S. 91 bis 135) dürfte demnach einen zwar weniger gewöhnlichen, aber deshalb grade nicht ungeschickten Platz einnehmen, und auch darüber wird mit dem Verfasser kaum zu rechten sein, was aus diesem Kapitel als unentbehrlich, was als entbehrlich anzusehen wäre. Das zu Viel ist dem zu Wenig sicherlich vorzuziehen, und so wollen wir dem Verfasser die vielen Kennzeichen der Theilbarkeit durch 9, 11, durch 7, 11, 13, durch 73, 137 u. s. w. (S. 199 flg.) nicht zum Vorwurfe machen, da sie ganz hübsche Beispiele eines Principes abgeben, welches dem Schüler eingeschärft zu werden verdient.

Wenn ich soweit in voller principieller Uebereinstimmung mit dem Verfasser stehe, so muss ich mich jetzt über einen Punkt aussprechen, in welchem derselbe gegen mich zu polemisiren scheint. Der Begriff des Buches wird (S. 137, Anmerkung) aus dem der Veränderlichkeit der Einheit abgeleitet, wozu das ganz passende Beispiel gewählt ist, dass 42 sowohl als 42 Einsen wie auch als 7 Sechsen aufgefasst werden kann. Daraus ergebe sich, dass bald die primäre, bald die secundäre Einheit als Einheit für den concreten Fall genommen werden könne, dass alsdann die secundäre Einheit entweder als Vielfaches der primären, oder die primäre als aliquoter Theil der secundären auftrete. Nun heisst es weiter: „dass nicht jede „empirische Einheit getheilt werden kann, kommt nicht in Betracht, ja „(wenigstens für die Theorie) nicht einmal, dass andere empirische Ein„heiten die Eigenschaft unbegrenzter Theilbarkeit haben. Vielmehr be„grifflich genügt es, dass die abstrakte Einheit sich im Verlaufe der wis„senschaftlichen Entwickelung als veränderlich zeigt und daher als abso„lute zu gelten aufhört." Es scheint damit auf die Entwickelung des Bruchbegriffes aus der unendlichen Theilbarkeit der Materien angespielt zu sein, wie andere Autoren und auch ich sie geben. Ich darf dieselbe daher wohl einigermassen vertheidigen. Zuerst könnte ich mich auf die schon angeführten aus der Vorrede des Verfassers beziehen, in welchen er die Nothwendigkeit zugiebt, Begriffe aus der Empirie zu entnehmen, um sie als Bild zu gebrauchen. Sodann aber muss ich besonders hervorheben, dass bei der frühzeitigen Berufung auf die unendliche Theilbarkeit auch der Begriff des Continuums frühzeitig geweckt wird, und somit bei der Entwickelung des Bruches das Verständniss der Incommensurabilität von Grössen derselben Art vorbereitet wird, ein Vortheil, den man entbehrt, wenn man das Verfahren einschlägt, welches den Inhalt der erwähnten Anmerk-

ung bildet, und dem man an sich die scharfsinnige Erfindung nicht absprechen kann.

Aus demselben Capitel möchte ich noch lobend hervorheben, dass beim Reduciren eines Bruches (S. 155) zuerst bewiesen ist, dass es wirklich immer einen reducirten Bruch giebt. Ferner den allgemeinen Satz, dass $\frac{a+c}{b+c}$ zwischen $\frac{a}{b}$ und 1 liegt (S. 172), welcher in dieser Fassung am lehrreichsten ist, weil er die Unterscheidung, ob $a \gtrless b$ überflüssig macht. Die Division der Brüche $\frac{a}{b} : \frac{c}{d}$ wird, wie gewöhnlich, so gelehrt (S. 161), dass man sagt, um von $\frac{c}{d}$ zur 1 überzugehen, bedarf es der Multiplication mit $\frac{d}{c}$. Von 1 zu $\frac{a}{b}$ führt Multiplication mit $\frac{a}{b}$. Folglich führt von $\frac{c}{d}$ zu $\frac{a}{b}$ Multiplication mit $\frac{d}{c} \cdot \frac{a}{b}$, welches daher der gesuchte Quotient ist. Etwas natürlicher ergiebt sich vielleicht die Regel, wenn man auch hier wie bei ganzen Zahlen die Division als fortgesetzte Subtraction auffasst, wie ich auf die Bemerkung eines meiner Zuhörer es schon seit einigen Semestern zu thun pflege, und wie es namentlich mit der Ansicht des Verfassers über Entstehung der Brüche übereinstimmen würde. Ich frage nämlich, wie oft $\frac{c}{d}$ sich von $\frac{a}{b}$ abziehen lässt und bringe dazu die beiden Brüche auf gemeinsamen Nenner: dann wird bei $\frac{bc}{bd}$ und $\frac{ad}{bd}$ der Nenner eben nur eine Benennung der Einheit sein, wie Fuss, Zoll u. s. w., es wird also der Quotient $\frac{ad}{bc}$ erscheinen müssen.

Als speciellere Brüche werden in weiteren Paragraphen die Decimalbrüche, sowie die Kettenbrüche vorgeführt. Bei ersteren vermisse ich den Grund, wesshalb bei der Addition (S. 174) nicht erst auf einen gemeinsamen Nenner reducirt wird, wie es doch bei Brüchen Regel ist; einen Grund, der eben so einfach ist, wie er selten angegeben wird, und der darin besteht, dass jene Zurückführung durch bloses Anhängen von Nullen erreicht wird, welche alsdann bei der Addition irrelevant sind, und darum *in praxi* nicht geschrieben zu werden brauchen. Die abgekürzten Methoden, worunter Fourier's geordnete Division, lehnen sich, wie der Verfasser ausdrücklich bemerkt (S. 190) an den bezüglichen Abschnitt von J. H. T. Müller's Lehrbuch der allgemeinen Arithmetik an und verbreiten sich über diesen Gegenstand mit nothwendiger Ausführlichkeit. Die Theorie der Kettenbrüche (S. 215) ist mit ganz besondererer Vorliebe bearbeitet und findet auch später (S. 284 — 291) noch Anwendung auf Wurzelausziehungen, wie in Elementarwerken wohl selten gelehrt wird.

Die nächste Folge von dem tieferen Eingehen in die Lehre von den Kettenbrüchen ist aber die Erklärung der incommensurabeln Grössen (S. 235), welche als unendliche Kettenbrüche aufgefasst werden, deren Verhältniss zur Einheit also weder durch eine ganze Zahl, noch durch einen Bruch genau dargestellt werden kann. Auch hier herrscht durchaus die erforderliche Gründlichkeit, welche zumal in dem Satze (S. 245) an den Tag tritt, welcher die Ausdehnung auf incommensurable Verhältnisse ausspricht, wofern Etwas für alle möglichen commensurablen Verhältnisse gilt.

In Beziehung auf den ganzen folgenden Abschnitt (S. 247—333), der mit eigentlichen Irrationalzahlen, sowie mit complexen Zahlen sich beschäftigt, kann ich Nichts weiter bemerken, als dass der Verfasser hier durchaus auf dem neueren Standpunkte steht, dass also dieser Theil sich wenig von den entsprechenden Theilen anderer Werke unterscheidet, die denselben Ansichten huldigen. Nur in Zusammenhang mit der Theorie der algebraischen Gleichungen, welche bis zum vierten Grade genauer (S. 333 bis 378), dann für höhere Grade nach Fourier's geordneter Division mit veränderlichem Divisor (S. 378—387) gelehrt wird, muss ich noch auf eine Vergesslichkeit aufmerksam machen. Der Verfasser stellt nämlich (S. 335) den Satz auf: „Durch eine Gleichung, sofern dieselbe keine identische ist, wird der Werth einer Unbekannten vollständig bestimmt,“ während er doch schon früher (S. 326) das Beispiel $\sqrt{3x-1}-\sqrt{x-\frac{1}{3}}=\sqrt{7x+\frac{2}{3}}$ anführt, welches einen Widerspruch enthält und deshalb keine Auflösung erlaubt, worauf er dann (S. 336 und 347 flg.) nochmals zurückkommt. Es wäre daher auch bei dem Ausspruche jenes Satzes neben der Ausnahme identischer Gleichungen noch die widersprechender Gleichungen einzuschalten.

Wenn ich mir hiermit erlaubt habe, Manches aus dem Zusammenhange zu reissen, mitunter auch Bemerkungen einfliessen zu lassen, welche nicht gerade direct auf das besprochene Buch sich beziehen, sondern nur an das Material desselben sich anschliessen, so wird doch die getroffene Auswahl schon genügen, um darzuthun, dass der Verfasser einen wirklich glücklichen Wurf gethan, und ich bedauere nur, neben dem Inhalte nicht auch gleichmässig die Sorgfalt des Druckes loben zu können. Auf der letzten Seite ist eine stattliche Anzahl von Druckfehlern bereits angegeben und noch einen nicht unbedeutenden Zuwachs derselben wird Jedem das aufmerksame Studium des Werkes selbst liefern. Möge diesem Mangel bei späteren Auflagen abgeholfen werden. CANTOR.

**Theorie der Festigkeit gegen das Zerknicken**, nebst Untersuchungen über die verschiedenen inneren Spannungen gebogener Körper und über andere Probleme der Biegungstheorie, mit praktischen Anwendungen; von Dr. HERMANN SCHEFFLER, Baurath. Mit 84 in den Text eingedruckten Holzschnitten. Braunschweig, Verlag der Schulbuchhandlung, 1858.

Die vorliegende Schrift des durch mehrfache verdienstliche Arbeiten auf dem Gebiete der reinen und angewandten Mathematik bereits rühmlich bekannten Verfassers gewährt noch mehr, als der etwas umfängliche Titel verspricht; sie enthält auf 138 Seiten eine mit Rücksicht auf das praktische Bedürfniss ziemlich vollständige Theorie der Gleichgewichtsformen und Spannungsverhältnisse gebogener prismatischer Körper. Unter Zugrundelegung der bei der Theorie der sogenannten relativen Festigkeit gültigen Annahmen werden die bei Einwirkung beliebig gerichteter Kräfte eintretenden Biegungen genauer untersucht, wobei sich eine Reihe zum Theil neuer wichtiger Fragen ergiebt, die mittelst der Grundgesetze der Elasticität ihre Erledigung finden. Die folgende Inhaltsangabe soll dazu dienen, die Reichhaltigkeit dieser Untersuchungen näher darzulegen.

Da die usuellen Formeln der Biegungstheorie hauptsächlich in dem Falle, wo prismatische Körper von Longitudinalkräften affizirt werden, mit den Erscheinungen der Wirklichkeit nicht nur nicht übereinstimmen, sondern theilweis damit in offenbarem Widerspruche stehen, so zieht der Verfasser zuerst die sogenannte Festigkeit gegen das Zerknicken unter Anwendung neuer Hülfsmittel in den Bereich seiner Betrachtung. Es wird dabei die gewöhnliche Voraussetzung, dass die neutrale Fiberschicht gebogener Stäbe durch die Schwerpunkte der einzelnen Querschnitte gehe, eine Annahme, die sich nur für den Fall, wo die biegenden Kräfte normal auf der Längenrichtung des Stabes stehen, aufrecht erhalten lässt, völlig bei Seite gelegt, und zunächst die Form der die Schwerpunkte aller Querschnitte enthaltenden geometrischen Axe genauer untersucht. Die §§. 3—5 geben die Formeln für die geometrischen Eigenschaften dieser krummen Linie, sowie die darauf bezogene Lage der neutralen Curve und die Grösse der biegenden Kraft, abhängig von der Grösse der Biegung. Hierauf wendet sich die Untersuchung zu dem Bruche durch Zerknickung und führt zu dem Schlusse, dass in allen Fällen der Wirklichkeit, wo der Bruch mit einer Biegung von fest bestimmter Grösse verbunden ist, die brechende Kraft nicht genau durch die Schwerpunkte der äussersten Querschnitte gehen kann (§. 6). Der Verfasser stellt daher rücksichtlich der Lage der Angriffslinie der biegenden Kraft, welche Lage wegen Compression der Enden des gebogenen Stabes mit der Länge desselben und der Grösse der Kraft veränderlich sein muss, eine Hypothese auf, durch welche die Resultate seiner rationellen Formeln mit den Ergebnissen der bekannten Hodgkinson'schen empirischen Formeln in eine für die Praxis ausreichende

Uebereinstimmung gebracht werden. Durch vier für die am häufigsten vorkommenden praktischen Fälle berechnete Tabellen wird diese Uebereinstimmung nachgewiesen (§. 7), so dass nun an die vorher berechneten Formeln die nöthigen Correktionen angebracht werden können (§. 8—10). In einer den vorhergehenden Betrachtungen analogen Weise werden in §. 11 und 12 die Biegungen und der Bruch unter der Wirkung schräger Druckkräfte (wo der Winkel zwischen der Richtung der biegenden Kraft und der Axe des Stabes $< 90^0$), und im §. 13 unter der Wirkung schräger Zugkräfte (für Winkel $> 90^0$) untersucht, woran sich im §. 14 der für die Praxis wichtige Fall eines durch zwei parallele Kräfte gebogenen Stabes anreiht, von denen die eine drückend, die andere ziehend wirkt. Endlich knüpfen sich hieran einige Bemerkungen über den Fall, wo ein Stab von mehreren isolirten oder auch von stetig über seine Länge vertheilten schrägen und in beliebigen Richtungen wirkenden Kräften affizirt wird (§. 15). — Die bis hierher gewonnenen theoretischen Resultate werden in den §§. 16—19 auf die in neuerer Zeit zu Eisenbahnbrücken so vielfach benutzten schmiedeeisernen Gitterbalken angewendet. Neu sind dabei namentlich die Untersuchungen über die in den Gitterstäben vorhandenen Spannungen, aus welchen rationelle Formeln für die Dimensionen dieser Stäbe hervorgehen. Naturgemäss schliessen sich hieran die analogen Betrachtungen über die inneren Spannungen in gebogenen Körpern von zusammenhängender Masse, z. B. in den beim Brückenbau ebenfalls häufig verwendeten Blechbalken (§. 20—25), woraus theilweis neue Resultate für die Dimensionen der Blechwände gewonnen werden. Da bei diesen Untersuchungen die gebogenen Balken immer als in zwei Enden unterstützt angesehen wurden, so leitet der Verfasser noch in höchst einfacher Weise aus der bekannten Abhängigkeit des Elasticitätsmomentes und des Krümmungshalbmessers der neutralen Linie eines gebogenen Stabes mehrere Sätze ab, mittelst deren jedes für einen Balken mit zwei unterstützten Enden gültige Biegungsgesetz auf einen Balken mit mehreren Stützpunkten erweitert werden kann (§. 26). Diese Sätze werden zur allgemeinen Bestimmung der Widerstände der Stützpunkte (§. 27), sowie zur Lösung der Aufgabe benutzt, die Kräfte zu bestimmen, durch welche die Biegung eines Balkens nach einer gegebenen Curve ermöglicht wird (§. 28). — Den Schluss der Schrift bildet eine Erörterung des Einflusses, welchen die Verschiebung der Längenfibern eines gebogenen Körpers auf dessen Biegungs- und Brechungserscheinungen ausübt. Da nämlich die Theorie der inneren Spannungen eines gebogenen Körpers von zusammenhängender Masse das Vorhandensein von Kräften nachgewiesen hatte, welche auf Verschiebung seiner Längenfibern wirken, so konnte die gewöhnliche Annahme nicht länger aufrecht erhalten werden, dass ein nach der Biegung normal zur neutralen Linie gelegter Querschnitt nur solche Punkte in sich enthalte, welche bereits vor der Biegung in einer normal zur Axe gelegenen Ebene enthalten

waren. Der Verfasser unterwirft deshalb die Deformationen, welche die Normalschnitte unter Verschiebung der Längenfibern erleiden, sowie die dadurch bedingten Abänderungen der Biegungs- und Brechungsverhältnisse einer strengen mathematischen Untersuchung (§. 29 — 34). Wenngleich hierbei das Resultat gewonnen wird, dass die Verschiebung der Fibern einen so unerheblichen Einfluss auf die Biegung und Tragfähigkeit der Balken äussert, dass dadurch die gewöhnliche Annahme als eine für die Praxis ausreichende Approximation gerechtfertigt ist, so behält doch die hierher gehörige Untersuchung den hohen Werth, die Zulässigkeit dieser Annäherung an die Wahrheit zur Evidenz gebracht zu haben.

Man wird aus dieser Inhaltsangabe ersehen, dass der Verfasser einerseits den ihm vorliegenden Stoff so vollständig beherrscht, dass wohl kaum irgend eine bedeutsame auf die Biegungstheorie bezügliche Frage seiner Aufmerksamkeit entgangen sein dürfte, andererseits aber die Resultate seiner theoretischen Erörterungen in fortwährende Beziehung zu den Anforderungen der Praxis zu bringen weiss, so dass dem Inhalte seiner Schrift ein gleicher Werth in wissenschaftlicher wie in praktischer Beziehung zukommt. Für Leser, welche den technischen Anwendungen der Mathematik näher stehen, hat Referent nicht nöthig, nach dieser Seite hin die Wichtigkeit des Scheffler'schen Buches besonders hervorzuheben, da sich bei ihnen der Name des Verfassers bereits einen guten Klang erworben hat. Aber auch der Theoretiker wird dasselbe nicht unbefriedigt aus der Hand legen; er wird darin neben vielen neuen Gesichtspunkten und einer durch Eleganz und Strenge sich empfehlenden mathematischen Analyse mancherlei Anregung zu weiteren theoretischen Untersuchungen finden. O. Fort.

---

**Die Auflösung der algebraischen und transcendenten Gleichungen mit einer und mehreren Unbekannten in reellen und complexen Zahlen nach neuen und zur praktischen Anwendung geeigneten Methoden.** Von Dr. Hermann Scheffler, Baurath. Braunschweig, Schulbuchhandlung (Vieweg), 1859.

Unmittelbar nach dem Erscheinen des vorliegenden Werkes schrieb Herr Professor Spitzer an die Redaction, dass die Methoden des Verfassers im Wesentlichen mit denen übereinstimmten, die er im Jahre 1851 bekannt gemacht habe; gleichzeitig übersandte Herr Baurath Scheffler folgende

---

*) Nur gegen die Begründung der Formel (59), sowie der hieraus abgeleitete (130) könnten einige Bedenken erhoben werden, die sich jedoch erledigen, wenn man, was wohl auch mit der Ansicht des Verfassers übereinstimmt, erstere als eine blosse Hypothese ansieht, welche aufgestellt ist, um die theoretischen Resultate mit den Ergebnissen der Hodgkinsonschen Versuche in Einklang zu bringen.

**Erklärung.**

„Nachdem ich vom Herrn Regierungsrath v. Ettinghausen zu Wien benachrichtigt bin, dass Herr Professor Spitzer daselbst sich darüber beschwere, dass ich in meiner vor Kurzem erschienenen Schrift über die Auflösung der Gleichungen seiner früheren Arbeiten über diesen Gegenstand, welche in einigen der K. K. Akademie der Wissenschaften überreichten Abhandlungen, insbesondere aber in der Schrift über die allgemeine Auflösung der Zahlengleichungen vom Jahre 1851 niedergelegt seien, nicht erwähne, obgleich ihm doch für gewisse Operationen das Prioritätsrecht der Erfindung gebühre; so beeile ich mich, hierauf folgende Erklärung abzugeben:

Die fraglichen Arbeiten des Herrn Professor Spitzer waren mir nicht bloss ihrem Inhalte nach völlig unbekannt; ich hatte auch nicht einmal Kenntniss von ihrer Existenz überhaupt. Ob dies mehr durch eine unvollkommene buchhändlerische Verbreitung jener Schriften, oder durch eine ephemere Besprechung derselben in den Journalen, oder durch die allgemeine Ablenkung der Aufmerksamkeit in jenen politisch bewegten Zeiten veranlasst ist, muss ich dahingestellt sein lassen, und kann nur bedauern, dass es unter solchen Umständen für mich eine Unmöglichkeit war, die Verdienste des Herrn Professor Spitzer hervorzuheben.

Was die Sache selbst betrifft, so überzeuge ich mich durch die mir jetzt vorliegende oben erwähnte Schrift, dass in Beziehung auf die Verallgemeinerung der Horner'schen Methode behuf Berechnung der complexen Wurzeln einer Gleichung mit einer Unbekannten und der Wurzeln eines Systems von Gleichungen mit mehreren Unbekannten dem Herrn Professor Spitzer die Priorität gebührt. Ob nun die Unbekanntschaft mit den Untersuchungen des gedachten Herrn hinsichtlich derjenigen Partieen meiner Schrift, welche mit jenen Grundgedanken kongruiren, für die Wissenschaft insofern von Nutzen gewesen sei, als zwei selbstständige Forschungen auf demselben Gebiete eigenthümliche Details der Entwicklung darbieten, überlasse ich der kritischen Vergleichung der Sachkenner.

Braunschweig, den 9. Juni 1859.

Dr. H. Scheffler."

Hiernach durfte eine ausführliche Besprechung des vorliegenden Werkes überflüssig erscheinen. Dass von einem Plagiate nicht die Rede sein kann, versteht sich bei dem durchaus ehrenwerthen Charakter des Verfassers von selbst und es ist nur zu bedauern, dass die Spitzer'sche Schrift ausserhalb Oesterreich so wenig bekannt geworden ist, wie dem Unterzeichneten auch von anderen Seiten her mehrfach bestätigt wurde.

Schlömilch.

**Die Anwendung der Algebra auf Geometrie.** Eine Anleitung zum Auflösen geometrischer Aufgaben vermittelst der algebraischen Analysis. Von W. Berkhan, Oberlehrer am Gymnasium zu Blankenburg. Halle, Schmidt.

Der Natur der Sache nach wird man von einem Buche, welches „Lehrern und Schülern hinlängliches Material liefern“ soll, keine besondere Originalität verlangen; stufenweiser Fortschritt vom Leichten zum Schweren und gute Darstellung dürften die einzigen ganz berechtigten Forderungen sein. In der ersten Beziehung haben wir nichts gegen des vorliegende Werkchen zu sagen, mit der Darstellung aber sind wir nicht durchweg einverstanden. Sehr häufig stellt der Verfasser mehrere ganz verschiedene Lösungen einer und derselben Aufgabe neben einander, wie es kommt, ohne den inneren Zusammenhang derselben nachzuweisen. Ein solcher Nachweis ist aber gerade das pädagogisch Wichtigste. Wenn bei der einen Behandlung eine complicirte, bei der andern eine einfache Endformel zum Vorschein kommt, so ist dies doch kein Zufall und die Aufsuchung des Grundes dieser Erscheinung hat gerade sehr viel Lehrreiches; bei einiger Uebung darin lernt man nämlich eine Aufgabe geschickt anfassen. Auf S. 88 erklärt der Verfasser sogar bei derselben Aufgabe, die man auf S. 120 in Jahrgang I. der Zeitschrift findet, die algebraische Auflösung sei zu complicirt und folgende geometrische einfacher. Das heisst freilich, sich die Sache compilatorisch leicht machen, während es Pflicht des Verfassers gewesen wäre, diejenige algebraische Auflösung zu suchen, welche der geometrischen Lösung adäquat ist. — Einen besondern pädagogischen Werth können wir hiernach der Berkhan'schen Schrift nicht zuerkennen, sie enthält indessen auf kleinem Raume ziemlich viel Material (86 Aufgaben), welches manchem Lehrer willkommen sein wird.

Schlömilch.

# Bibliographie

vom 5. Mai bis 15. Juni 1859.

---

### Periodische Schriften.

Abhandlungen der mathematisch-physischen Classe der K. Sächs. Gesellschaft der Wissenschaften. 4. Bd. Leipzig, Hirzel in Comm. 7⅓ Thlr.

Denkschriften der kaiserl. Academie der Wissenschaften in Wien. Mathem.-naturw. Classe. Bd. 16. Gerold's Sohn in Comm. 8⅔ Thlr.

Sitzungsberichte der Kaiserl. Academie der Wissenschaften. Mathem.-naturw. Classe. Jahrg. 1859, No. 1—5. Ebendas. pro compl. 16 Thlr.

Astronomische Beobachtungen auf der Sternwarte zu Königsberg. 32. Abthlg. Leipzig, Rein'sche Buchhandlung. 2 Thlr.

*Mémoires de l'Académie de St. Petersboury. Sciences mathématiques et physiques. Tome IX. et Tome VII. Pétersbourg.* Leipzig, Voss in Comm. 10 Thlr.

*Mélanges mathématiques et astronomiques de l'Academie de Pétersbourg. Tome II, livr.* 6. Ebendas. 12 Ngr.

*Mélanges physiques et chimiques de l'Academie de Petersbourg. Tome III, livr.* 4. Ebendas. 12 Ngr.

### Reine Mathematik.

Heidenreich, A. v., Elemente der reinen Arithmetik. 1. Cursus. Leipzig, Gräbner. ⅓ Thlr.

—— Dasselbe. 2. Cursus. Ebendas. 12 Ngr.

Breymann, K., Lehrbuch der Elementarmathematik für Forstleute. 1. Theil. Arithmetik und Algebra. Wien, Gerold's Sohn. 1⅓ Thlr.

Sadebeck, M., Lehrbuch der Arithmetik und Algebra für Gymnasien. Breslau, Aderholz. 16 Ngr.

Aschenborn, K. H. M., Lehrbuch der Arithmetik und Algebra. Berlin, Decker'sche Hofbuchdruckerei. 1½ Thlr.

Wiegand, A., Lehrbuch der Mathematik. Allgemeine Arithmetik. 4. Aufl. Halle, Schmidt. 12½ Ngr.

Heidenreich, A. v., Elemente der niedern Geometrie. 1. Cursus. Leipzig, Gräbner. 12 Ngr.

DILLING, A., Resultate der Beispiele zu den Aufgaben über das rechtwinklige Dreieck. Halle, Pfeffer. ⅙ Thlr.

MEHLER, F. G., Hauptsätze der Elementarmathematik. Berlin, Reimer. 12½ Ngr.

STUBBA, A., Lehrbuch der Geometrie. 3. Aufl. Leipzig, Kummer. 28 Ngr.

FISCHER, J. G., Leitfaden zum Unterrichte in der Elementargeometrie. 2. Cursus. 2. Aufl. Hamburg, Perthes, Besser & Mauk. 6 Ngr.

GRAILICH, J., Ueber symmetrische Functionen, welche zur Darstellung gewisser physikalischer Verhältnisse krystallisirter Körper dienen. (Acad.) Wien, Gerold's Sohn in Comm. 4 Ngr.

LÖFFLER, A., Ueber die Methode, die grössten und kleinsten Werthe unbestimmter Integralformeln zu finden. (Acad.) Wien, Gerold's Sohn in Comm. 6 Ngr.

STRAUCH, G. W., Anwendung des sogenannten Variationscalculs auf zwei- und dreifache Integrale. Ebendas. 2⅙ Thlr.

SCHEFFLER, H., Die Auflösung der algebraischen und transcendenten mit einer oder mehreren Unbekannten. Braunschweig, Vieweg. 24 Ngr.

CLAUSIUS, R., Die Potentialfunktion und das Potential. Leipzig, Barth. 24 Ngr.

PETZVAL, J., Integration der linearen Differentialgleichungen. 6. Lief. (Akad.) Wien, Gerold's Sohn in Comm. 2⅔ Thlr.

HECHEL, C., Die ebene analytische Geometrie; für höhere Lehranstalten bearbeitet. Stettin, Grassmann. 18 Ngr.

SCHELL, W., Allgemeine Theorie der Curven doppelter Krümmung in rein geometrischer Darstellung. Leipzig, Teubner. 24 Ngr.

VEGA's logarithmisch-trigonometrisches Handbuch. 43. Aufl. Herausgegeben von BREMIKER. Berlin, Weidmann. 1¼ Thlr.

RÜHLMANN, M., Logarithmisch-trigonometrische Tafeln. 6. Ausg. Leipzig, Arnoldische Buchhandlung. ⅔ Thlr.

FAA DE BRUNO, *Théorie générale de l'elimination. Paris.* (Leipzig, Brockhaus,) 2½ Thlr.

BOOLE, G. A., *Treatise on differential equations. London.* (Leipzig, Brockhaus.) 5 Thlr. 18 Ngr.

## Angewandte Mathematik.

LANG, V. v., Einige Bemerkungen zu Dr. Stefan's Abhandlung über die Transversalschwingungen eines elastischen Stabes. (Akad.) Wien, Gerold's Sohn in Comm. 2 Ngr.

PETZVAL, J., Ueber die Schwingungen gespannter Saiten. (Akad.) Wien, Gerold's Sohn in Comm. ⅙ Thlr.

STOEVESANDT, C. H., Lehrbuch der Perspective. 3. Lief. Berlin, Herbig. 1 Thlr.

ENCKE, J. F., Ueber die Erscheinungen der Kometen. Ein Vortrag. Berlin, Besser. ¼ Thlr.

LÖWY, M., Ueber die Bahn des Kometen V—1858. (Akad.) Wien, Gerold's Sohn in Comm. 2 Ngr.

SCHODER, H., Die Elemente des Kometen VI—1857. (Akad.) Wien, Gerold's Sohn in Comm. 4 Ngr.

RÜMKER, C., Neue Folge der mittleren Oerter von Fixsternen für den Anfang von 1850. Hora VI. Hamburg, Perthes, Besser & Mauke. 8 Ngr.

KEPLERI, J., *Astronomi opera omnia ed. C. Frisch. Vol. II, pars 2.* Frankfurt a. M., Heyder & Zimmer. 3 Thlr.

SANDER, E., Handbuch der mathematischen Erdkunde. Wien, Gerold's Sohn in Comm. 2⅚ Thlr.

Triangulation von Thüringen; ausgeführt in den Jahren 1851—1855 vom K. Pr. Generalstabe. Berlin, Dümmler in Comm. 3⅓ Thlr.

JONES, D., Leibrenten- und Lebensversicherungen. Deutsch von K. HATTENDORF. Hannover, Hahn. 2 Thlr.

DIETERICI, C. F. W., Ueber den Begriff der mittleren Lebensdauer und deren Berechnung für den preussischen Staat. Berlin, Dümmler in Comm. 24 Ngr.

REDTENBACHER, F., Principien der Mechanik und des Maschinenbaues. 2. Aufl. Mannheim, Bassermann. 3 Thlr. 2 Ngr.

WEISBACH, J., Lehrbuch der Ingenieur- und Maschinenmechanik. 3. Aufl. Bd. 2, Lief. 11. Braunschweig, Vieweg. ⅓ Thlr.

LANGER, J., Die bogenförmigen Gitterbrücken mit Trägern von gleichem Widerstande. Wien, Selch's Buchhandlung in Comm. 1 Thlr.

MOLINOS et BRONNIER, *Traité de la construction des ponts metalliques. Paris.* (Leipzig, Brockhaus.) 30 Thlr.

KRAFT, J., *Roue hydraulique à aubes courtes, système Poncelet. Considérations théoriques et règles pratiques. Liège.* 1⅙ Thlr.

ARMINJON, F. v., *Essai sur les boulets creux à percussion et théorie d'une nouvelle fusée à percussion pour les projectiles sphériques. Gênes.* (Leipzig, Brockhaus.) 1⅙ Thlr.

MAXWELL, J., *On the stability of the motions of Saturn's rings; an essay which obtained the Adam's prize. London.* (Leipzig, Brockhaus.) 2 Thlr. 20 Ngr.

## Physik.

Die Naturwissenschaften, dargestellt von DIPPEL, GOTTLIEB, KOPPE etc. Lief. 29 und 30. Essen, Bädeker. à ⅙ Thlr.

Encyclopädie der Physik, bearbeitet v. BRIX, DECHER etc. Herausgegeben von KARSTEN. 5. Lief. Leipzig, Voss. 2⅔ Thlr.

Physikalisches Lexicon von MARBACH und CORNELIUS, 2. Auflage. Lief. 73 und 74. Leipzig, O. Wigand. à ⅙ Thlr.

CRÜGER, F. C. J., Grundzüge der Physik mit Rücksicht auf Chemie. 6. Aufl. Erfurt, Körner. ½ Thlr.

WESTBERG, H., Grundzüge der Physik für die Kreisschulen des Dorpater Lehrbezirks. Reval, Kluge. ⅔ Thlr.

DOVE, H. W., Anwendung des Stereoscops, um falsches Papiergeld vom echten zu unterscheiden. Berlin, G. F. W. Müller's Verlag. ⅓ Thlr.

STUDER, B., Einleitung in das Studium der Physik. Zürich, Schulthess. 24 Ngr.

LANG, v., Die Aenderungen der Krystallaxen des Arragonits durch die Wärme. (Akad.) Wien, Gerold's Sohn in Comm. ⅙ Thlr.

WEISS, A. und E. WEISS, Untersuchungen über den Zusammenhang in den Dichten und Brechungsexponenten im Gemengen von Flüssigkeiten. (Akad.) Wien, Gerold's Sohn in Gomm. ⅙ Thlr.

MURMANN, A. und L. ROTTER, Untersuchungen über die physikalischen Verhältnisse krystallisirter Körper. (Akad.) Wien. Gerold's Sohn in Comm. ⅔ Thlr.

GAVARRET, J., Lehrbuch der Elektricität. Deutsch bearbeitet von R. ARENDT. 2. Lief. Leipzig, Brockhaus. 1 Thlr.

HANKEL, W. G., Elektrische Untersuchungen. 4. Abthlg. Leipzig, Hirzel in Comm. ⅔ Thlr.

KNOCHENHAUER, W., Ueber den Strom der Nebenbatterie. (Akad.) Gerold's Sohn in Comm. 3 Ngr.

ROLOFF, J. F., Die Mechanik des Elektromagnetismus. 2. Aufl. Berlin, Springer in Comm. ⅔ Thlr.

LAMONT, J., Untersuchungen über die Richtung und Stärke des Erdmagnetismus an verschiedenen Punkten des südwestlichen Europa. München, Franz in Comm. 4⅔ Thlr.

BUCHNER, O., Die Feuermeteore. Giessen, Ricker. ⅔ Thlr.

BALLO, M. O., Einfluss der atmosphärischen Ebbe und Fluth auf den Barometerstand und die astronomische Refraction. Königsberg, Theile in Comm. ⅔ Thlr.

---

# Mathematisches Abhandlungsregister.

---

Ausser den früher benutzten Zeitschriften wurden in diesem Register noch die *Annali di Matematica pura ed applicata publicati da Barnaba Tortolini, Roma,* berücksichtigt, für welche die Abkürzung: *Annali mat.* gebraucht ist. Da die Nummern der Abhandlungen immer während eines Jahres in fortlaufender Reihenfolge stattfinden, so sind die Verweisungen auf das frühere Register (Literaturzeitung S. 10 flgg.) nur durch eckige Klammern unterschieden, z. B. [vgl. Nr. 209].

---

## 1858.

### Zweite Hälfte: 1. Juli bis 31. December.

### A.

#### Analytische Geometrie (der Ebene).

244. Grundgesetze der Configuration der algebraischen Curven. A. Müller. Wien. Acad. Ber. XXIX, 40.
245. *Théorème général sur les courbes planes et sur les surfaces.* Terquem. *N. ann. math. XVII,* 441.
246. Ueber ein elementares Theorem der analytischen Geometrie. Joachimsthal. Crelle LVI, 280.
247. *On the double tangents to plane curves.* Salmon. *Phil. Mag. XVI,* 318.
248. Ueber einen merkwürdigen allgemeinen Satz von den Curven. Völler. Grun. Archiv XXXI, 449. — Grunert ibid. 454.
249. Einige geometrische Sätze über Curven. O. Böklen. Zeitschr. Math. Phys. III, 320.
250. *Construction mécanique de la parabole cubique.* Foucaut. *N. ann. math. XVII,* 274.
251. *Sopra alcune curve Algebriche, delle quali la lemniscata è un caso particolare.* Tortolini. *Annali mat. I,* 178.
252. *Discussion de la courbe représentée par l'équation* $y = \sin[(2n+1)\operatorname{arc}\sin x] + 1$. De Foville. *N. ann. math. XVII,* 326.
253. *De la courbe à équation polaire* $\varrho^2 = \frac{1}{\sqrt{1 - c^2 \sin \varphi^2}}$. Dupain. *N. ann. math. XVII,* 315.

Vergl. Determinanten in geometrischer Anwendung, Ellipse, Evolution, homogene Functionen 371, Hyperbel, Kegelschnitte, Kettenlinien, Krümmungskreis, Rectification.

#### Analytische Geometrie (des Raumes).

254. Ueber die Transformation durch reciproke Radienvectoren. Böklen. Zeitschr. Math. Phys. III, 258.
255. Ueber die mittleren Radien der Linien, Flächen und Körper. Drobisch. Sächs. Acad. Ber. X, 124.
256. Ueber geodätische Linien. Böklen. Zeitschr. Math. Phys. III, 257.
257. *Sulle linee del terzo ordine a doppia curvatura* Cremona *Annali mat. I,* 161, 278.
258. Ueber die Raumcurven dritter Klasse und dritter Ordnung. Joachimsthal. Crelle LVI, 44.

259. Ausdehnung eines Satzes vom ebenen Vierseit auf räumliche Figuren. Hermes. Crelle LVI, 204.
260. Ueber homologe Tetraeder. Hermes. Crelle LVI, 218.
261. Das Fünffach und Fünfeck im Raume entsprechend dem Vierseit und Viereck in der Ebene. Hermes. Crelle LVI, 247.
262. *Proprietà dei centri conjugati principali e dei piani principali conjugati de dotta dalla considerazione degli assi dei pennelli luminosi, ed applicazione di essi al calcolo degli stromenti ottici composti di più lenti, delle cui grossezze si debba tener conto. Mossotti. Annali mat. I,* 265.
Vergl. Kegelschnitte 385, Oberflächen, Oberflächen zweiten Grades.

**Approximation.**

263. Einfache Ableitung von Poncelet's Theorem über Quadratwurzeln. Zeuner. Zeitschr. Math. Phys. III, 383.

**Arithmetische Reihen.**

264. *Tous les nombres impairs étant livisés en groupes qui successivement contiennent,* 1, 2, 3 .... *nombres, la somme le chaque groupe est un cube. Gérono. N. ann. math. XVII,* 353.
265. *Determiner les valeurs numériques des trois côtés d'un triangle rectiligne tel, que ses trois côtés et sa surface soient quatre termes consécutifs d'une progression arithmétique ayant pour raison l'unité. Gérono. N. ann. math. XVII,* 395.
Vergl. Zahlentheorie 484.

**Astronomie.**

266. Bestimmung des Fadenintervalles an einem astronomischen Winkel-Instrumente. Wastler. Grun. Archiv XXXI, 57.
267. Einige Beobachtungen und Bemerkungen über Personaldifferenz. J. Hartmann. Grun. Archiv XXXI, 1.
268. *Mémoire sur les formules propres à déterminer la parallaxe annuelle des étoiles simples ou optiquement doubles. Plana.* Astr. Nachr. XLIX, 373.
269. Ueber die Constante $gm'$ in Laplace's *Mécanique céleste I,* 276. Peters. Astr. Nachr. XLIX, 301.
270. Offene Antwort auf das offene Schreiben des Herrn Director Hansen. Encke. Astr. Nachr. XLIX, 192 [vgl. Nr. 20].
271. Ueber den Streit, der sich zwischen den Herrn Professoren Encke und Hansen in Betreff der Theorie erhoben hat, welche den von Herrn Dr. Brünnow herausgegebenen Floratafeln zu Grunde liegt. Peters. Astr. Nachr. XLIX, 197.
272. *On the problem of three bodies. Hargreave. Phil Mag. XVI,* 466.
273. *Sur les distances respectives des orbites des planètes. Reynaud. Compt. rend. XLVII,* 957, 1074.
274. *Extension de la loi de Bode. Durand. N. ann. math. XVII,* 269.
275. *Sur l'hypothèse du milieu résistant. Encke. Compt. rend. XLVII,* 763, 1050. — *Faye ibid.* 836, 939, 1043. — *Leverrier ibid.* 891.

**Attraktion.**

276. Anwendung des dritten Differentials $d^3s = f'''(t)\,dt^3$ der Function der geradlinigen Bewegung $s = f(t)$ auf die Physik der allgemeinen Schwere. Gensler. Grun. Archiv XXXI, 234.
277. *Sur les corps qui exercent des attractions égales sur un point materiel. Hirst. Compt. rend. XLVII,* 274. — *Phil. Mag. XVI,* 161, 266.
278. *Sur l'équation de la trajectoire que décrit un mobile soumis à l'action de plusieurs centres fixes. Desboves. Compt. rend. XLVII,* 708.

**B.**

**Bessel'sche Function.**

279. Ueber ein Integral der Differentialgleichung $\frac{d^2I}{dx^2} + \frac{1}{x}\frac{dI}{dx} + I = 0$. Lipschitz. Crelle LVI, 189.

**Bestimmte Integrale.**

280. *Rapport sur le Recueil d'intégrales de M. Bierens de Haan. J. Bertrand. Compt. rend. XLVII,* 434.

281. *Note sur l'évaluation des intégrales* $\int xy\,dm$, $\int xz\,dm$, $\int yz\,dm$, $\int x^2dm$, $\int y^2dm$, $\int z^2dm$ *pour une pyramide triangulaire, dont la base est située dans le plan des* $xy$, *une des arètes étant prise pour axe des* $x$. *Lobatto.* Grun. Archiv XXXI. 249.
282. *Sur une application de la formule du binôme aux intégrales eulériennes. Catalan. Compt. rend. XLVII,* 545.
283. *Note sur une formule d'Abel. Bertrand. Annali mat. I,* 156.
284. *Sur des intégrales définies doubles. Besge. Journ. Mathém.* 324, 416.
Vergl. Euler'sche Summenformel, Reihen 450, 452.

## C.

### Combinatorik.

285. *Théorème sur le nombre des combinaisons sans répétition. Faure. N. ann. math. XVII,* 348.
286. Ueber eine Steiner'sche combinatorische Aufgabe (Crelle XLV, 181). Reiss. Crelle LVI, 326.
287. Bestimmte Gleichungen des ersten Grades mit $n$ Unbekannten gelöst mittelst der Permutationslehre. Simerka. Wien. Acad. Ber. XXXIII, 277.

### Cubatur.

Vergl. Stereometrie 459, 460, 461.

## D.

### Determinanten.

288. *Invariants. De Blerzy. N. ann. math. XVII,* 301.
289. *Remarques historiques sur un point de la théorie des équations. Tortolini. Compt. rend. XLVII,* 598.
290. Ueber die Zeichen der einzelnen Glieder einer Determinante. Zehfuss. Zeitschr. Math. Phys. III, 249.
291. Ueber eine gewisse Determinante. Zehfuss. Zeitsch. Math. Phys. III, 298.
292. *Sullo sviluppo di un determinante. Brioschi. Annali mat. I,* 9.
Vergl. Differentialgleichungen 298, Functionen 331, Gleichungen, Methode der kleinsten Quadrate 412.

### Determinanten (in geometrischer Anwendung).

293. *Application de la nouvelle analyse aux surfaces du second ordre. Painvin. N. ann. math XVII,* 370, 403, 457.
294. *Transformation des propriétés métriques des figures. Faure. N. ann. math. XVII,* 276, 381.
295. Einige Sätze über die Tangenten algebraischer Curven. Bischoff. Crelle LVI, 166.

### Differentialgleichungen.

296. Studien über Differentialgleichungen. S. Spitzer. Zeitschr. Math. Phys. III, 224.
297. *Mémoire sur l'intégration des équations différentielles simultanées. Painvin. Compt. rend. XLVII,* 693.
298. Ein Satz über Differentialgleichungen. Zehfuss. Zeitschr. Math. Phys. III, 248.
299. *Sur l'intégration de l'équation différentielle* $(Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F)\,dx+(A_1x^2+B_1y^2+C_1xy+D_1x+E_1y+F_1)\,dy=0$. *Björling. Journ. Mathém. XXIII,* 417.
300. Ueber die Ableitung der Grundformeln der Logarithmen und der Trigonometrie aus der Differentialgleichung $\frac{dx}{\sqrt{1\pm x^2}}+\frac{dy}{\sqrt{1\pm y^2}}=0$. Durège. Zeitschr. Math. Phys. III, 241.
301. Ueber die lineare Differentialgleichung $(a_2+b_2x)\,y''+(a_1+b_1x)\,y'+(a_0+b_0x)y=0$. S. Spitzer. Zeitschr. Math. Phys. III, 393.
303. Zur Integration der linearen Differentialgleichung $a^m\frac{d^mz}{dt^m}=x^{2m}\frac{d^mz}{dx^m}$. Weiler. Grun. Archiv XXXI, 44.
Vergl. Bessel'sche Function, Hydrodynamik 373, Hypergeometrische Reihe 375.

### Differentialquotient.

303. *Sur le changement de la variable indépendante dans les dérivées d'une fonction.* Schlömilch. *Journ. Mathém. XXIII,* 385.
304. *Sopra due formule di calcolo differenziale.* Fergola. *Annali mat. I,* 370.
305. *Sui differenziali a indice qualunque.* Tardy. *Annali mat. I,* 135.

### Differenzengleichungen.

306. Neue Integrations-Methode für Differenzengleichungen, deren Coefficienten ganze algebraische Functionen der unabhängigen Veränderlichen sind. S. Spitzer. Wien. Acad. Ber. XXIX, 53.

### Discontinuirliche Functionen.

307. Ueber die Schwingungen gespannter Saiten. Petzval. Wien. Acad. Ber. XXIX, 160.
308. Ueber die Darstellung einer willkürlichen Function durch unendliche Reihen. Dienger. Grun. Archiv XXXI, 274.

### Doppeltangenten.

Vergl. Analytische Geometrie der Ebene 247.

## E.

### Elasticität.

309. Ueber das Gleichgewicht und die Bewegung eines unendlich dünnen elastischen Stabes. Kirchhoff. Crelle LVI, 285.
310. Ueber die Transversalschwingungen eines elastischen Stabes. Stefan. Wien. Acad. Ber. XXXII, 207.

### Elimination.

311. Bemerkungen über das indirecte Eliminiren bei geodätischen Arbeiten. Gerling. Zeitschr. Math Phys. III, 377.

### Ellipse.

312. Verallgemeinerung des Fermat'schen geometrischen Satzes. A. Krüger. Grun. Archiv XXXI, 61.
313. *Une propriété des normales de l'ellipse.* O. Böklen. *N. ann. math. XVII,* 356 [vgl. Nr. 222].
314. *Théorèmes d'Appollonius sur les diamètres conjugués.* Rouché. *N. ann. math. XVII,* 436.
315. Ueber Sectoren und Segmente der Ellipse mit Rücksicht auf conjugirte Durchmesser. Zehme. Zeitschr. Math. Phys. III, 311.
316. *Une hyperbole équilatère homofocale à une ellipse intercepte sur les côtés d'un angle droit circonscrit à l'ellipse deux cordes égales.* A. Terquem. *N. ann. math. XVII,* 432.

### Elliptische Functionen.

317. *On the geometry of the elliptic equation.* Merrifield. *Phil. Mag. XVI,* 198.
318. *Sur diverses équations analogues aux équations modulaires dans la théorie des fonctions elliptiques.* Brioschi. *Compt. rend. XLVII,* 337. *Joubert ibid* 341.
319. *Sulle equazioni del moltiplicatore per la trasformazione delle funzioni ellitiche.* Brioschi. *Annali mat. I,* 175.
320. *Nuove ricerche relative alla sostituzione lineare per la riduzione delle funzioni ellitiche di prima specie.* Tortolini. *Annali mat. I,* 57.
321. Ueber rationale Verbindungen der elliptischen Transcendenten. C. O. Meyer. Crelle LVI, 314.
322 *Sur les fonctions elliptiques et sur la théorie des nombres.* Kronecker. *Journ. Mathém. XXIII,* 265.
323. Ueber einige Gattungen elliptischer Integrale. Röthig. Crelle LVI, 197.
Vergl. Gleichungen 360, Rectification.

### Euler'sche Summenformel.

324. Ueber die Darstellung gewisser Functionen durch die Euler'sche Summenformel. Lipschitz. Crelle LVI, 11.

### Evolution.

325. *Equation des développées en coordonnées linéaires.* Dewulf. *N. ann. math. XVII,* 428.

## F.

### Facterielle.

326. Ueber den Quotienten zweier Facultäten. Schlömilch. Zeitschr. Math. Phys. III, 322.

### Functionen.

327. *Sur le nombre des valeurs que peut acquérir une fonction quand on permute ses variables de toutes les manières possibles. E. Mathieu. Compt. rend. XLVII,* 698.
328. Ueber den Grenzwerth von $n\left(a^{\frac{1}{n}}-1\right)$ für $n=\infty$. Schlömilch. Zeitschr. Math. Phys. III, 387.
329. Versuch einer Erweiterung der Begriffe von $\cos x$ und $\sin x$. Beyssell. Grun. Archiv XXXI, 299.
330. *Sur la marche des valeurs d'une fonction implicite définie par une équation algébrique. Marie. Compt. rend. XLVII,* 145.
331. *Sur les fonctions $X_n$ de Legendre. E. Rouché. Compt. rend. XLVII,* 917 [vgl. Nr. 206].
    Vergl. Discontinuirliche Functionen, Elliptische Functionen, Kugelfunctionen, Lamé'sche Functionen, Stereometrie 459, Ultraelliptische Functionen.

## G.

### Geodäsie.

332. Berichtigungen einiger falschen Behauptungen. v. Krusper. Grun. Archiv XXXI, 50.
    Vergl. Elimination.

### Geometrie (descriptive).

333. *Interno alla questione: riportare in una superficie plana o sferica una figura situata in una superficie qualunque di rivoluzione talmente che le parti dell' imagine e della figura abbiano le aree in rapporto costante. Codazzi. Annali mat. I,* 89.
    Vergl. Perspective.

### Geometrie (höhere).

334. Vermischte Sätze und Aufgaben. Steiner. Berl. Acad. Ber. 1858, 419. *N. ann. math. XVII,* 443.
335. *Note relative à la construction de diverses courbes à trois points multiples et théorème relatif à ces courbes. De Jonquières. Annali mat. I,* 110.
336. Ueber die Raumcurven dritter Klasse und dritter Ordnung. Schroter. Crelle LVI, 27.
337. *Note relative à une courbe du sixième ordre qui se présente en astronomie. De Jonquières. Annali mat. I,* 112.
    Vergl. Determinanten in geometrischer Anwendung 294, Imaginäres, Kegelschnitte 379, Krümmungskreis 389.

### Geschichte der Mathematik.

338. Zur Geschichte der Zahlzeichen. Cantor. Zeitschr. Math. Phys. III, 325.
339. *De l'application du pendule aux horloges mécaniques. Biot. Compt. rend. XLVII,* 433.
340. *Généalogie de Bernoulli. Terquem. N. ann. math. XVII. Bulletin de bibl.* 85.
341. *Pietro Antonio Cataldi, mathématicien du XVII ième siècle. Terquem. N. ann. math. XVII. Bulletin de bibl.* 68.
342. *Sur Benjamin Bramer. Terquem. N. ann. math. XVII. Bulletin de bibl.* 57.
343. *Leonelli (Zechini). Bellavitis. N. ann. math. XVII. Bulletin de bibl.* 88.
    Vergl. Astronomie 268, Determinanten 289.

### Gleichungen.

344. *On a proof of the existence of a root in every algebraic equation. De Morgan. Phil. Mag. XVI,* 232.
345. *Sopra i Covarianti delle forme binarie. Betti. Annali mat. I,* 129.
346. *Sui Covarianti delle forme a più variabili. Brioschi. Annali mat. I,* 158.
347. *La teorica dei covarianti e degli invarianti delle forme binarie e la sue principali applicazioni. Brioschi. Annali mat. I,* 296, 349.

348. Ueber einige Sätze von den ganzen rationalen algebraischen Functionen nach Cauchy, *Résumés analytiques*. Grunert. Grun. Archiv XXXI, 27.
349. *Sopra le funzioni simmetriche delle solluzioni communi a piu equazioni algebriche*. Betti. *Annali mat. I*, 193.
350. *On the theory of matrices*. Cayley. *Phil. Mag. XVI*, 223.
351. *Note sur la théorie des équations*. Catalan. *Compt. rend. XLVII*, 797.
352. Einfachere Ableitung der früher mitgetheilten Sätze über die reellen Wurzeln der dreigliedrigen algebraischen Gleichungen. Drobisch. Sächs. Acad. Ber. X, 82.
353. *Sur quelques moyens propres à abréger certains calculs dans la solution numérique des équations*. Montucci. *Compt. rend. XLVII*, 655.
354. *Sur les conditions de réalité des trois racines de l'équation* $x^3 + px + q = 0$. Gérono. *N. ann. math. XVII*, 281.
355. Ueber cubische Gleichungen mit rationalen Coefficienten. Kronecker. Crelle LVI, 188.
356. *Sulla risoluzione algebrica dell' equazioni del terzo é quarto grado*. Tortolini. *Annali mat. I*, 310.
357. Lagrange's Auflösung der vollständigen biquadratischen Gleichungen. Grunert. Grun. Archiv XXXI, 477.
358. *Sur le double système de valeurs qu'on obtient en résolvant l'équation du quatrième degré*. Vallès. *Compt. rend. XLVII*, 30.
359. *Sur l'équation aux carrés de différences des racines d'une équation du quatrième degré*. M Roberts. *N. ann. math. XVII*, 268.
360. *Sur la résolution des équations du quatrième degré*. Lebesgue. *N. ann. math. XVII*, 386.
361. *Remarque sur la résolution des équations biquadratiques*. Aronhold. *N. ann. math. XVII*, 391.
362. *Sur la résolution de l'équation du quatrième degré par les fonctions elliptiques*. Lebesgue. *Journ. Mathém. XXIII*, 391.
363. *Sulla determinazione dei coefficienti della trasformata di Tschirnhaus: applicazione alla ridotta di Jerrard dell' equazione generale di quinto grado*. Lavagna. *Annali mat I*, 238.
364. *Sur l'équation au carré des différences des racines d'une équation du degré n*. M. Roberts. *N. ann. math. XVII*, 440.
365. Ueber imaginäre Wurzeln einer Gleichung des $n^{ten}$ Grades. Toeplitz. Grun. Archiv XXXI, 222.
366. *Sulla risultante di due equazioni di quarto grado*. Faà di Bruno. *Annali mat. I*, 362.
367. *Sopra l'Equazioni algebriche con più incognite*. Betti. *Annali mat. I*, 1.
Vergl. Analytische Geometrie der Ebene 252, Determinanten.

## H.

### Homogene Functionen.

368. Zur Theorie der ganzen homogenen Functionen. Hesse. Crelle LVI, 263.
369. *Sopra i Combinanti*. Betti. *Annali mat I*, 344.
370. *Note sur une fonction homogène entière*. Catalan. *Compt. rend. XLVII*, 1073.
371. *On the algebraical theory of derivative points of curves of the third degree*. Sylvester. *Phil. Mag XVI*, 116.

### Hydrodynamik.

372. Ueber die Integration der hydrodynamischen Gleichungen. Clebsch. Crelle LVI, 1.

### Hyperbel.

373. *Solution d'un problème sur les ondes permanentes*. Popoff. *Journ. Mathém. XXIII*, 251.
Vergl. Ellipse 316.

### Hypergeometrische Reihe.

374. *On a theorem relating to hypergeometric series*. Cayley. *Phil. Mag. XVI*, 356.
375. Untersuchungen über die Differentialgleichung der hypergeometrischen Reihe. C. G. J. Jacobi. Crelle LVI, 149.

## I.

### Imaginäres.

376. *Nouvelle théorie des fonctions de variables imaginaires.* ***Marie.*** *Journ. Mathém. XXIII*, 361.
Vergl. Gleichungen 365.

## K.

### Kegelschnitte.

377. Theorie der Kegelschnitte nach einer neuen Methode analytisch entwickelt. Grunert. Grun. Archiv XXXI, 67.
378. Ueber confocale Curven und Flächen zweiten Grades. Heilermann. Zeitsch. Math. Phys. III, 341.
379. *Deux systèmes de sept points qui se correspondent sur un plane étant donnés, trouver deux points qui soient les centres de faisceaux homographiques.* ***De Jonquières.*** *N. ann. math. XVII*, 399.
380. Beitrag zu den Sätzen über die einen Kegelschnitt doppelt berührenden Kreise. Heilermann. Crelle LVI, 365.
381. *Sur le cercle focal des sections coniques.* ***J. Mention.*** *N. ann. math. XVII*, 322.
382. *Sur un théorème focal.* ***Dewulf*** *N. ann. math. XVII*, 435 [vgl. Nr. 132].
383. *Note sur les normales d'une conique.* ***Cayley.*** Crelle LVI, 182.
384. *Théorème sur les coniques.* ***Grouvelle.*** *N. ann. math XVII*, 285.
385. *Généralisation du théorème de Newton sur le quadrilatère inscrit dans une conique.* ***Faure.*** *N. ann. math. XVII*, 368.
386. *Théorème sur deux coniques touchant les trois côtés de deux triangles adjacents.* ***Faure.*** *N. ann. math. XVII*, 347.
Vergl. Ellipse, Hyperbel.

### Kettenbrüche.

387. *Sur les fractions continues.* ***Tchebichef.*** *Journ. Mathém. XXIII*, 289.
Vergl. Reihen 451.

### Kettenlinie.

Vergl. Mechanik 406.

### Krümmungskreis.

388. Ueber die Chasles-Transon'sche Methode zur Construction der Normalen und Krümmungsradien an gewissen ebenen Curven. Wiegers. Zeitschr. Math. Phys. III, 252.
389. *Construction du centre de courbure de la courbe, lieu des points dont les distances à deux courbes données sont dans un rapport constant.* ***Mannheim.*** *Annali mat. I*, 364.
390. Vom Krümmungshalbmesser. Schlechter. Grun. Archiv XXXI, 327.
391. Zur Theorie des Krümmungskreises. L. Z. Grun. Archiv XXXI, 218,

### Krystallographie.

392. Ueber die graphische Linien-Ellipsen-Methode. Ditscheiner. Wien. Acad. Ber. XXXII, 76.
393. Ueber die Minimum-Ablenkung der Lichtstrahlen durch doppelt brechende Prismen. v. Lang. Wien. Acad. Ber. XXXIII, 155.
394. Ueber symmetrische Functionen, welche zur Darstellung gewisser physikalischer Verhältnisse krystallisirter Körper dienen können. Grailich. Wien. Acad. Ber. XXXIII, 657.

### Kugelfunctionen.

Vergl. Reihen 451.

## L.

### Lamé'sche Function.

395. Ueber die Lamé'schen Functionen. Heine. Crelle LVI, 79.
396. Einige Eigenschaften der Lamé'schen Functionen. Heine. Crelle LVI, 87.

### Logarithmen.

Vergl. Differentialgleichungen 300.

## M.

### Maxima und Minima.

397. *Solution de quelques problèmes de trigonométrie.* *Gérono.* *N. ann. math. XVII,* 364.
Vergl. Approximation.

### Mechanik.

398. Ueber das Gauss'sche Grundgesetz der Mechanik. H. Scheffler. Zeitschr. Math. Phys. III, 197, 261.
399. Dynamische Untersuchungen über den Stoss der Körper. Poinsot. Zeitschr. Math. Phys. III, 274 [vgl. Nr. 162].
400. *Mémoire sur les suraccélérations.* *H Resal.* *Compt. rend. XLVII,* 436.
401. *Mémoire sur les intégrales communes à plusieurs problèmes de mécanique relatifs au mouvement d'un point sur une surface.* *Rouché.* *Journ. Mathém. XXIII,* 337.
402. *Sur les équations de condition qui définissent un système de points.* *Bourget.* *N. ann. math. XVII,* 449.
403. *De problemate quodam mechanico quod ad primam integralium ultraellipticorum classem revocatur.* *C. Neumann.* Crelle LVI, 46.
404. *Teoria de' moti piccoli d'un galleggiante omogeneo.* *Codazzi.* *Annali mat. I,* 205.
405. *Experimental and theoretical researches on the Equilibrium — figures of a liquid chass without weight.* *Plateau.* *Phil. Mag. XVI,* 23.
406. *On the mechanical conditions of the Deposit of a Submarine Cable.* *Airy.* *Phil. Mag. XVI,* 1.
407. *Sur la théorie de la roue hydraulique en dessous à aubes planes.* *Rachmaninow.* *Journ. Mathém. XXIII,* 395.
408. *Mémoire sur les voutes en berceau portant une surcharge limitée à un plan horizontal.* *Denfert.* *Compt. rend. XLVII,* 903.
409. *Sur la temperature des liquides en mouvement.* *Duhamel.* *Compt. rend. XLVII,* 5, 129, 175.
410. Die Electricitätslehre vom Standpunkte der Undulationstheorie. Zetzsche. Zeitschr. Math. Phys. III, 365.
411. *Sur la distribution de l'électricité à la surface des corps conducteurs en partant de l'hypothése d'un seul fluide.* *Renard.* *Compt. rend. XLVII,* 414.
Vergl. Bestimmte Integrale 281, Elasticität, Hydrodynamik.

### Methode der kleinsten Quadrate.

412. *Intorno ad alcuni punti della teoria dei minimi quadrati.* *Casorati.* *Annali mat. I,* 329.
413. Ueber die Ermittelung des wahrscheinlichen Fehlers bei Längenmessungen. Dienger. Grun. Archiv XXXI, 225.
414. Ueber drei durch Messung gefundene Grössen von theoretisch bekannter Summe. Grun. Archiv XXXI, 480.

### Mittelgrössen.

415. Ueber die Vergleichung zwischen dem arithmetischen, dem geometrischen und dem harmonischen Mittel. Grebe. Zeitschr. Math. Phys. III, 297 [vgl. Nr. 173].
416. Ueber Mittelgrössen verschiedener Ordnung. Schlömilch. Sächs. Acad. Ber. X, 77. — Zeitschr. Math. Phys. III, 301.

### Modulargleichungen.

417. *Sur la théorie des équations modulaires.* *Schroeter.* *Journ. Mathém. XXIII,* 258.

## O.

### Oberflächen.

418. *Note sur la surface des ondes.* *J. Bertrand.* *Compt. rend. XLVII,* 817.
419. *On the surface which is the envelope of planes through the points of an ellipsoid at right angles to the radii vectores from the centre.* *Cayley.* *Phil. Mag. XVI,* 383.

### Oberflächen zweiten Grades.

420. *Propriétés focales des surfaces du deuxième ordre.* *Heilermann.* *N. ann. math. XVII,* 242.
421. Ueber die Focalpunkte der Flächen zweiten Grades. Heilermann. Crelle LVI, 345.

422. *Surfaces du second degré; problèmes, solutions.* Vannson. *N. ann. math. XVII*, 331.
423. *Trouver les conditions qui doivent être remplies par les coefficients de l'équation générale du second degré à trois variables pour que cette équation représente 1. le système de deux plans parallèles; 2. une surface de révolution.* Gérono. *N. ann. math. XVII*, 341.
424. *Equation d'une surface du deuxième degré passant par neuf points.* Poudra. *N. ann. mat. XVII*, 297.
425. Ueber die Linien gleicher Helle. O. Böklen. Zeitschr. Math. Phys. III, 321.
426. *Surface décrite par la droite, qui passe par deux positions simultanées de points parcourant deux droites.* Journeaux. *N. ann. math. XVII*, 264.

Vergl. Determinanten in geometrischer Anwendung 293, Quadratur 446.

## P.

**Perspective.**

427. Zur Theorie der stereographischen Projection. L. D. Grun. Archiv XXXI, 217.

**Planimeter.**

428. *Proof of the principle of Amslers's planimeter.* Adams. *Phil. Mag. XVI*, 230.

**Planimetrie.**

429. Ein rechtwinkliges ebenes Dreieck zu bestimmen, dessen Seiten in stetiger Proportion stehen, und worin eine Seite die gegebene Grösse $a$ hat. Grunert. Grun. Archiv XXXI, 472.
430. Ueber eine durch einen Eckpunkt eines Dreiecks gezogene Linie. Völler. Grun. Archiv XXXI, 470 [vgl. Nr. 194].
431 Beweis eines Satzes vom Dreiecke. A. Krüger. Grun. Archiv XXXI, 66.
432. Zum Fermat'schen Lehrsatze. Blindow. Grun. Archiv XXXI, 295.
433. Construction der mittleren Proportionallinien zwischen zwei gegebenen Linien. Grunert. Grun. Archiv XXXI, 476.
434. Erweiterung der Sätze über harmonische und anharmonische Proportionen. Heis. Grun. Archiv XXXI, 30.
435. Aufgaben und Sätze über geometrische Oerter für Punkte, deren Summe der Entfernungen von gegebenen geraden Linien oder gegebenen Ebenen eine constante ist. Heis. Grun. Archiv XXXI, 228.
436. *Théorème relatif à la droite qui joint les centre des cercles inscrit et circonscrit à un triangle.* Challiot. *N. ann math. XVII*, 447.
437. *Sur l'hexagone inscrit.* Bergis. *N. ann. math. XVII*, 263.
438. *On the treatment of some geometrical problems.* *Phil. Mag. XVI*, 231.

**Produktenfolge.**

439. Ueber die elementare Entwickelung der unendlichen Produkte für die trigonometrischen Functionen. Schlömilch. Zeitschr. Math. Phys. III, 389.
440. *Trouver la limite du produit* $\cos a \,.\, \cos \frac{a}{2} \,.\, \cos \frac{a}{4} \ldots$ Gérono. *N. ann. mathém. XVII*, 283.

Vergl. Factorielle.

## Q.

**Quadratische Formen.**

441. Auflösung einer Aufgabe in der Composition der quadratischen Formen. Arndt. Crelle LVI, 64.
442. Ueber die Anzahl der Genera der quadratischen Formen. Arndt. Crelle LVI, 72.
443. Bemerkung zu den Formeln von Dirichlet, durch welche die Klassenzahl bei positiven Determinanten ausgedrückt wird. Arndt. Crelle LVI, 100.
444. Die Perioden der quadratischen Zahlformen bei negativen Determinanten. Simerka. Wien. Acad. Ber. XXXI, 33.

**Quadratur.**

445. *Quadratures par approximation.* Dupain. *N. ann. math. XVII*, 287.
446. *Aires de deux ellipsoides de révolution.* Grillo. *N. ann. math. XVII*, 272.

Vergl. Planimeter.

## R.

**Rectification.**

447. Ueber die Construction von Bögen rectificabler Differenz auf der gewöhnlichen Fusspunktencurve der Hyperbel. Wiegers. Zeitschr. Math. Phys. III, 308.

**Reihen.**

448. Summirung einiger unendlichen Reihen. Zehfuss. Zeitschr. Math. Phys. III, 247, 249.
449. *Décomposition d'une fraction en série finie de fractions. Brault. De Virieu. N. ann. math. XVII,* 296, 393.
450. Entwickelung von $e^{\lambda x + \frac{u}{x}}$ in unendliche Reihen. S. Spitzer. Zeitschr Math. Phys. III, 244.
451. Von den Coefficienten der Reihen von Kugelfunctionen einer Variablen. Bauer. Crelle LVI, 101.
452. Zur Lambert'schen Reihe. Schlömilch. Zeitschr. Math. Phys. III, 248.
453. Notiz über die harmonische Reihe. Schlömilch. Zeitschr. Math. Phys. III, 251. *Cornet. Lebesgue. N. ann. math. XVII,* 463, 465.
454. Ueber eine in zahlentheoretischer Beziehung interessante Reihe. Zehfuss. Zeitschr. Math. Phys. III, 247.
    Vergl. Arithmetische Reihen, Discontinuirliche Functionen 308, Euler'sche Summenformel, Hypergeometrische Reihe, Stereometrie 460, Taylor'sche Reihe.

## S.

**Schwerpunkt.**

455. *Si l'on divise d'une manière quelconque un polyèdre homogène en tétraèdres et si l'on suppose la masse de chaque tétraèdre réunie au centre de la sphère circonscrite à ce tétraèdre le centre de gravité de ce systeme de points matériels est toujours le même. N. ann. math. XVII,* 354.

**Sphärik.**

456. *Formules fondamentales de l'analyse sphérique. Vannson. N. ann. math. XVII,* 243, 307 [vgl. Nr. 209]

**Stereometrie.**

457. Stereometrische Sätze entsprechend den planimetrischen Sätzen über harmonische und anharmonische Proportionen. Heis. Grun. Archiv XXXI, 37.
458. Sätze über das irreguläre Tetraeder. Heis. Grun. Archiv XXXI, 41.
459. *Sachant que le volume d'un segment sphérique à une base est une fonction entière du troisième degré de la hauteur du segment, déterminer cette fonction. Gérono. N. ann. math XVII,* 305.
460. *Volume d'un segment sphérique. N. ann. math. XVII,* 438.
461. Ueber die Inhaltsbestimmung einer gewissen Klasse von Körpern. Grunert. Grun. Archiv XXXI, 481.

## T.

**Tabellen.**

462. Multiplicationstafeln zur Berechnung der Proportionaltheile zu den 7stelligen logarithmischen-trigonometrischen Tafeln. J. Hartmann. Grun. Archiv XXXI, 63.

**Taylor'sche Reihe.**

463. *Note sur la formule de Taylor. Roche. Journ. Mathém. XXIII,* 271. — *Schlömilch ibid.* 384.

**Trigonometrie.**

464. *Sur le triangle dont les côtés sont des multiples du rayon du cercle inscrit. Gérono. N. ann. math. XVII,* 360.
465. Ueber eine geometrische Aufgabe. Escher. Grun. Archiv XXXI, 46.
466. *Faire le calcul d'un quadrilatère dont deux côtés et une diagonale sont donnés de grandeur et de position. Bardin. N. ann. math XVII,* 319.
467. *Quelques nouveaux théorèmes sur les polygones. O. Verner. N. ann. math. XVII,* 322.
    Vergl. Differentialgleichungen 300.

## U.

### Ultraelliptische Functionen.

468. *Sur la théorie de la transformation des fontions abeliennes.* Brioschi. *Compt rend.* *XLVII*, 310.
469. *Sulle funzioni Abeliane complete di prima e seconda specie.* Brioschi. *Annali mat.* *I*, 12.
470. *Sopra alcune proprietà delle funzioni Abeliane.* Brioschi. *Annali mat.* *I*, 20.
471. *Sopra una costruzione del teorema di Abel.* Genocchi. *Annali mat.* *I*, 33.
472. *Dimostrazione di una formola di Jacobi.* Brioschi. *Annali mat.* *I*. 117.
Vergl. Mechanik 403.

## V.

### Variationsrechnung.

473. Ueber die zweite Variation vielfacher Integrale. Clebsch. Crelle LVI, 122.
474. Anwendung des sogenannten Variationscalculs auf zweifache und dreifache Integrale. Strauch. Wien. Acad. Ber. XXX, 310.
Vergl. Hydrodynamik 373.

## W.

### Wahrscheinlichkeitsrechnung.

475. *Mémoire sur la probabilité des erreurs dans la somme ou dans la moyenne de plusieurs observations.* Jullien. *Annali mat.* *I*, 76, 149, 227.

## Z.

### Zahlentheorie.

476. *On the equation in numbers of the first degree between any number of variables with positive coefficients.* Sylvester. *Phil. Mag.* *XVI*, 369.
477. Unbestimmte Gleichungen des ersten Grades mit zwei Unbekannten, gelöst mittelst der Congruenzlehre. Simerka. Wien. Acad. Ber. XXXIII, 282.
478. *On the problem of the virgins and the general theory of compound partition.* Sylvester. *Phil. Mag.* *XVI*, 371.
479. *Solubilité de l'équation* $x^n = y^n \pm z^n + w^n \pm \ldots$ Paulet. *Compt. rend.* *XLVII*, 116.
480. Einfacher Beweis für die Irreductibilität einer Gleichung in der Kreistheilung. Arndt. Crelle LVI, 178.
481. Ueber den Fermat'schen Satz. L. D. Grun. Archiv XXXI, 219.
482. *Note sur une question de théorie des nombres.* Liouville. *Journ. Mathém.* *XXIII*, 357.
483. *Sur quelques formules générales qui peuvent être utiles dans la théorie des nombres.* J. Liouville. *Journ. Mathém.* *XXIII*, 241, 273, 325.
484. *Etant donnée une progression arithmétique dont le premier terme et la raison sont premiers entre eux, on y peut trouver un nombre illimité de termes premiers avec un nombre donné quelconque.* Chanson. *N. ann math.* *XVII*, 396.
485. *Une circonférence étant divisée en m parties ou peut passer par tous les points de division au moyen de cordes sous-tendant n parties, pourvu que m, n soient premiers entre eux.* Gérono. *N. ann. math* *XVII*, 351.
486. Ueber die Ergänzungssätze zu den allgemeinen Reciprocitätsgesetzen. Kummer. Crelle LVI, 270.
487. Tabellarische Berechnung der reducirten binären kubischen Formen und Classification derselben für alle successiven negativen Determinanten ($-D$) von $D=3$ bis $D=2000$. Arndt. Grun. Archiv XXXI, 335.
488. *Addition à la note sur la composition du nombre 47 par rapport aux vingt-troisièmes racines de l'unité* Cayley. Crelle LVI, 186 [vgl. Nr. 241].
Vergl. Elliptische Functionen 322, Gleichungen 355, Modulargleichungen, Quadratische Formen, Reihen 452, 454.

# Literaturzeitung.

## Recensionen.

**L. A. Sohncke's Sammlung von Aufgaben von der Differential- und Integralrechnung.** Zweite verbesserte und vermehrte Auflage, herausgegeben von Dr. H. J. Schnitzler. Halle, Druck und Verlag von H. W. Schmidt, 1859.

Schon die erste Auflage dieser Sammlung wurde bei ihrem Erscheinen mit einstimmigem Lobe der Sachkenner begrüsst. Sie wurde seither vielfach als Lehrmaterial benutzt, zum Theil sogar, wie wir hören, in einer Weise benutzt, welche eigentlich das genauere Citiren des Werkes zur Ehrensache machen müsste, wenn nicht mitunter beim Abdrucken sich Irrthümer einschlichen, welche es für das Original schmeichelhafter machen, nicht genannt zu werden. Die zweite Auflage konnte sonach nur erwünscht sein, zumal die Sorgfalt, welche der neue Herausgeber auf dieselbe verwandte, eine bedeutende Anzahl von Versehen und Druckfehlern beseitigte, welche das erste Mal stehen geblieben waren. Man wird diese verbessernde Hand an vielen Stellen bemerken, wenn auch nur bei aufmerksamerer Vergleichung.

Wenn nun Referent nach diesen allgemein anerkennenden Bemerkungen noch weiter über das vorliegende Werk sich aussprechen soll, so kann dieses nur in der Weise geschehen, dass eine Parallele zwischen dieser Sammlung und anderen ähnlichen Inhaltes gezogen würde. Unter diesen sind aber, wie es scheint, „die Materialien zum Gebrauche bei und nach dem Unterrichte aus der höheren Analysis von J. Rogner. Gratz 1853, zweite Auflage 1858“ vor allen Anderen vorzuziehen, und es möge ein weiterer Beweis für den Beifall sein, den wir dem vorliegenden Buche schenken, dass wir es nur mit dem zuletzt genannten in Vergleich bringen wollen.

Ein mehr äusserlicher als innerer Unterschied der beiden Sammlungen besteht darin, dass Herr R. nicht von allen Aufgaben die Auflösung giebt und sämmtliche Antworten an das Ende zusammenstellt, während Herr S. an jede Aufgabe sogleich das Resultat anknüpft. In dieser Beziehung sind wir mit Herrn S. ganz einverstanden, indem der Bequemlichkeit der Benutzung doch auch Rechnung getragen werden muss, wo sie keinem sonstigen Einwande Raum bietet. Und ein solcher lässt sich hier

kaum erheben. Wer das Resultat wissen will, ohne selbst zu rechnen, scheut auch die Mühe nicht, den Anhang noch aufzuschlagen. Ganz besonders aber müssen wir uns dagegen als unzweckmässig verwahren, dass Herr R. die betreffenden Auflösungen mitunter nicht blos wegen der Einfachheit der Aufgabe weglässt, sondern um dem Lehrer dadurch anzudeuten, dass er die Behandlung auf mancherlei Weisen unternehmen solle.

Der Inhalt beider Werke ist ein in manchen Theilen verschiedener. Zunächst enthält die R.'sche Sammlung einige Kapitel, in welchen Aufgaben aus der Gleichungen und aus der sogenannten algebraischen Analysis vorgelegt werden. Dass diese eigentliche Materialien der Analysis in einer Sammlung von Aufgaben aus der Differential- und Integralrechnung fehlen, kann der letzteren nicht zum Vorwurfe gemacht werden. Allein auch in den Aufgaben, welche der Tendenz beider Werke entsprechen, zählt die R.'sche Sammlung bei Weitem mehr Nummern.

Trotzdem dürfte ihr die S.'sche Sammlung an Reichhaltigkeit kaum nachstehen, indem in ihr die Beispiele unter sich wesentlicher verschieden sind und kaum Eines ein Resultat liefert, welches aus früheren Beispielen fast ohne weitere Rechnung sich darstellen liesse, wie z. B. bei R., wo unter einander die vier Differentialquotienten von $x^m.\sqrt[n]{x}$, von $\frac{x^m}{\sqrt[n]{x}}$, von $\frac{a}{x^m.\sqrt[n]{x}}$ und von $\frac{\sqrt[n]{x}}{x^m}$ gesucht werden, denen dann zum weiteren Ueberfluss die Function $\frac{\sqrt{x}}{x\sqrt[3]{x}}$ folgt.

Einen wirklichen Mangel bemerkte ich unter den sogenannten unbestimmten Formen, unter welchen bei S. nur 3 Beispiele von $0^0$ (Aufgabe 79, 84, 86) angeführt sind, welche sämmtlich den Werth 1 besitzen, während man vergebens nach den freilich selteneren Fällen sucht, in denen ein anderer Werth auftritt. Ferner vermisse ich ungern jede Anwendung des Taylor'schen Satzes auf Reihenentwickelung, sowie endlich bei den Aufgaben aus der Integralrechnung die Integration von Differentialgleichungen. Lauter Gegenstände, deren Uebung von unbedingter Nothwendigkeit ist, und welchen auch Herr R. den gebührenden Raum gewidmet.

Andererseits sind die nicht minder wichtigen Anwendungen auf Geometrie nur in der S.'schen Sammlung in schönster Auswahl vorhanden, während sie bei R. gänzlich fehlen. Und auch die Auswerthung bestimmter Integrale bildet eine hervorragende Zierde unseres Werkes.

Man kann daher die Parallele wohl dahin zusammenfassen, dass beide Sammlungen einander vollständig ebenbürtig sind; dass keine die andere unnöthig macht, indem sie einander ergänzen, und dass nur ein gemeinsamer Gebrauch die beiderseitigen Vorzüge, aber auch die beiderseitigen Schwächen erkennen und vermeiden lässt. CANTOR.

**Das Phantom der Imponderabilien in der Physik.** Von Ph. Spiller in Posen.

Mit grösserer Umsicht und Klarheit als Robida (vergl. Literaturzeitung S. 35 ff.) tritt Ph. Spiller als Kämpfer gegen die Materialität der Wärme, der Elektricität und des Magnetismus auf in einem gegen Ende des verflossenen Jahres erschienenen Schriftchen, welches den Titel führt: Das Phantom der Imponderabilien in der Physik.*)

Die äussere Form der Darstellung könnte etwas strenger geregelt, die häufigen Wiederholungen vermieden und einzelne Ungenauigkeiten im Ausdruck beseitigt sein.

In einer kurzen Einleitung nennt Spiller den Zweck des angegebenen Schriftchens: einen Beitrag zu liefern zur Beantwortung der Frage, worin das Wesen des Magnetismus und der Elektricität bestehe. Dann weist er darauf hin, wie die wunderbare Oekonomie der Natur, welche mit wenigen Mitteln so unendlich viel zu schaffen verstehe, die Auffindung der Gesetze und des Wesens der Erscheinungen so schwierig mache, wie aber das Räthselhafte an jeder einzelnen Erscheinung um so mehr verschwinde, je mehr wir sie im Zusammenhange mit anderen Thatsachen betrachten; wir müssen daher nach den gemeinschaftlichen Principien forschen, um Einheit in die Mannigfaltigkeit der Erscheinungen zu bringen. Nun haben wir aber Ursache, Zweifel an der Materialität der Wärme des Magnetismus und der Elektricität zu hegen**); wir finden dagegen, dass Schall, Wärme, Licht, Magnetismus und Elektricität durch gleiche Mittel entstehen, dass eine innige Verwandtschaft***) zwi-

*) Posen 1858, bei Gebr. Scherk. — Schon 1855 hat Spiller seine Ansichten der Hauptsache nach niedergelegt in: „Gemeinschaftliche Principien für die Erscheinungen des Schalles, des Lichtes, der Wärme, des Magnetismus und der Elektricität." Posen, Mittler'sche Buchhandlung.

**) Die meisten, welche Spiller aufführt, sind unter denen enthalten, welche S. 366—368 des III. Jahrg. d. Zeitschr. besprochen worden sind; die übrigen, soweit sie nicht ihre Widerlegung durch den Einwand der Dualisten finden können, dass bei der Erregung der Elektricität die elektrischen Materien nicht erzeugt, sondern blos geschieden werden, lauten: Legt man Eis auf die Löthstelle einer Wismuth-Antimonkette, so erhält man in der Kette Magnetismus; nimmt man statt des Eises eine glühende Kohle, so erhält man ebenfalls Magnetismus. — Die Wirkungen des elektrischen Stromes (und der Wärme) sind so gewaltige, als von einem unserer Wahrnehmung sich gänzlich entziehenden Stoffe wohl schwerlich ausgehen können. — Rein mechanische Vorgänge erzeugen zugleich oder nacheinander Töne, Wärme, Licht und unter Umständen Elektricität und Magnetismus; wie können durch denselben rein mechanischen Vorgang (z. B. den der Bewegung, wie bei der Reibung oder beim Druck) verschiedene Stoffe zugleich entstehen? Das Körperliche kann man nicht schaffen, sondern nur in einen Zustand versetzen; wenn nun Bewegung am Ruhenden den Zustand ändert, ohne eine fortschreitende Bewegung zu erzeugen, so kann es nur ein Bewegungszustand der Moleküle sein. — Die Materialität der Wärme und Elektricität würde dem Gesetz der Undurchdringlichkeit seine Allgemeinheit nehmen.

***) Vergl. S. 369—377 des III. Jahrg. dieser Zeitschrift. Ausserdem heben wir noch hervor: werden Stahlstäbe durch einen elektrischen Strom discontinuirlich magnetisirt, so tönen sie, ebenso die Flaschen einer Nebenbatterie, wenn die Ladung durch einen Funkenmesser geschieht (wobei, weil das Glas in Longitudinalschwing-

schen ihnen besteht, insofern „jedes von ihnen nicht nur sich selbst gewissermassen als Resonanz, sondern auch die anderen mit oder ohne einen irdischen Zwischenkörper erzeugt, oder doch gleichzeitig mit anderen auftritt;“ es muss daher „etwas Gemeinsames in ihnen existiren, dessen äusserliche Verschiedenheit nicht in dem Grundprincipe, sondern nur in der Verschiedenheit der Körperwelt und der Intensität der erregenden Kräfte zu suchen ist,“ es kann auch in den verschiedenen Mitteln der Erzeugung für jedes Einzelne die Verschiedenheit nur eine scheinbare sein, und weil nun Töne nur dadurch entstehen, dass die kleinsten Massentheilchen eines Körpers in schwingender Bewegung sind, und da durch Wärme, Magnetismus und Elektricität Töne erzeugt werden, so sind diese Erscheinungen unstreitig auch Bewegungs- und, weil keine fortschreitenden, so Molekularbewegungserscheinungen.*) Das rege Molekularleben können wir sehen bei leuchtenden Körpern, hören bei tönenden und fühlen bei warmen. Wenn eine der fünf Erscheinungen die anderen erzeugt, so ist dies nur als ein „Umwandlungsprocess**) für die Veränderung des Zustandes anzusehen. Die Verschiedenheiten sind nur durch die Körper, welche die Uebertragung vermitteln, bedingt. „Bei jedem Körper haben nämlich die Massentheilchen im Gleichgewichtszustande eine bestimmte und bei verschiedenen Körpern eine verschiedene Lage. Bei

---

ungen geräth, das Ohr am besten in der Richtung der Glasflächen zu halten ist); der Schall wird in der Nähe eines kräftigen Elektromagneten verstärkt. — Sowie in verschiedenen Gasen die Schallgeschwindigkeit verschieden ist und daher eine bestimmte Pfeife mit verschiedenen Gasen erfüllt auch verschiedene Töne giebt, so ist auch das elektrische Licht in verschiedenen Dämpfen und Gasen verschieden gefärbt (d. h. hat verschiedene Schwingungszahlen), z. B. im Alkohol- oder Aetherdampf grünlich, im Kohlensäuregas lebhaft grünlich blau, im Wasserstoffe karmoisin und matt, im Stickstoffe purpurroth oder intensiv blau, in Salzsäure fast weiss. — So wie die Luft den Schall entweder nur fortpflanzt oder selbst schallt (in Pfeifen), so ist es auch in Beziehung auf das Licht im Aether der Fall: er pflanzt z. B. das Sonnenlicht im Weltenraume und in allen für weisses Licht durchsichtigen Körpern fort, aber er leuchtet auch selbst im elektrischen Funken, wie im elektrischen Eie, oder bei der Compression von Luft, Wasser u. a. In beiden Fällen sind dort fortschreitende, hier stehende Wellen. Selbst die kurze Dauer ($\frac{1}{15000}$ Secunde) des Blitzes ist hinreichend, eine grosse Menge (800 Millionen) äusserst rasch aufeinanderfolgender Schwingungen geschehen zu lassen. Dass in elektrischen Funken der Aether selbst leuchtet, d. h. in stehenden Schwingungen begriffen ist, geht daraus hervor, dass der elektrische Funke sich auch da zeigt, wo eine eigentliche Verbrennung unmöglich ist, z. B. im Stickstoffe, im kohlensauren Gase, in Aetherdämpfen (mit den bekannten Schichtungen), im Wasser.

*) Die Molekularkräfte äussern sich ohne Rücksicht auf die Schwere und stehen zu den Schwerkräften, denen alle Körper als solche unterworfen sind, nur insofern in einer gewissen Beziehung, als sie sich dann nicht auf messbare Entfernungen wirksam äussern können (?), wenn ihre Summe die Summe der Schwerkräfte der Atome des afficirten Körpers nicht übersteigt. (Elektrische und magnetische Anziehung.) Die Wirkungen auf unmessbare kleine Entfernungen sind oft bedeutend; sie sind theils mechanische (Capillarattraction sprengt Felsen), theils chemische. Vergl. Jahrg. IV d. Zeitschr., S. 151 ff.

**) Die S. 17 angeführte „Umwandlung der Wärme in Spannungselektricität“ zeigt nur, dass die Wärme das Auftreten der Reibungselektricität in dem auf eine heisse Ofenkachel gelegten und mit der trockenen Hand gestrichenen Papiere erleichtert.

Körpern mit krystallinischem Gefüge lässt sich dieses an dem Blätterdurchgange leicht äusserlich sogar warnehmen und ist bei anderen aus den Lichtbrechungs- und Polarisationsgesetzen zu schliessen," nach welchen „die Lage der Molekel eine solche sein muss, dass sie den Lichtschwingungen bei der Brechung den Eintritt gestatten, was nur geschehen kann, wenn die Schwingungen in der Richtung der Lagerungen, also mit ihnen parallel geschehen, während bei der vollständigen Polarisation durch Reflexion die Lichtwellen senkrecht auf jene Schichtungen (nicht auf die Begrenzungsfläche des Körpers) treten müssen, um vollständig polarisirt*) zu werden. Bei jedem krystallinischen Körper müssen also die Schichtungen der aus Atomen bestehenden (?) Molekel gegen die natürlichen Grenzflächen stets einen Winkel bilden, der die Ergänzung des Brechungswinkels zu 90 Graden ist.**) So wie nun eine Kraft die natürliche Anordnung der aus Atomen bestehenden Gruppen der Moleküle bei irgend einem Körper, mag er in seinem natürlichen Zustande erscheinen, oder durch künstliche Mittel dargestellt worden sein (Glas, Papier, Siegellak, Stahl) vorübergehend ändert, so treten je nach den Umständen und der Natur der in Wechselwirkung stehenden Körper die Erscheinungen des Schalles, der Wärme, der Elektricität und des Magnetismus auf und sind unter allen Umständen wesentlich eine Folge des Bestrebens aller Massentheilchen einer jeden constituirten Masse, in der Gleichgewichtslage zu verharren, woraus sich nur einfache oder zusammengesetzte oscillatorische Erscheinungen ergeben können. Je gleichmässiger ferner ein Medium ist, und je weniger von fremdartigen Körpern unterbrochen, desto besser pflanzt es eine Erscheinung fort. In den schlechten Leitern sind die Molekularbewegungen einem häufigen Wechsel ausgesetzt, wodurch sie abgeändert werden, in den guten nicht. Dort werden stehende Bewegungen gebildet, hier sind nur fortschreitende."***) Der Aether kann seine Schwingungen durch eine fortdauernde Einwirkung auf die Theilchen der verschiedenen Körper übertragen; der Grad aber, in welchem dies geschieht, hängt von der Natur des Stoffes, von der inneren Struktur und von der Oberflächenbeschaffenheit wesentlich ab; je rauher besonders die Oberfläche ist, desto leichter nimmt der Körper von aussen kommende

---

*) Da nun Elektricität und Magnetismus die Polarisationsebene drehen, so beweisst diess, dass sie die Gleichgewichtslage der Molekel ändern.

**) „Die merkwürdige Erscheinung, dass eine Glasscheibe doppelt brechend wird, wenn sie durch Longitudinalschwingungen zum Tönen gebracht wird, lässt sich aus diesem Gesichtspunkte leicht erklären. Die durch das Tönen der Scheibe erzeugten Schwingungen der Moleküle gestatten dem auf sie fallenden Lichtstrahle ausser dem gewöhnlichen Wege der Refraction noch auf einem zweiten den Durchgang."

***) Und doch sollte im elektrischen Funken der Aether selbst (für sich oder in Nichtleitern?) in stehenden Schwingungen begriffen sein. — Damit bringt Spiller auch das Auftreten der magnetischen (am Stahl) und elektrischen (am Harz) Zonen in Verbindung und leitet es aus der Unfähigkeit des Stahls und des Harzes zu leiten ab.

Schwingungen auf, desto leichter giebt er aber auch seine eigenen nach aussen ab. Nach Massgabe seiner Natur also wird jeder Körper die an ihn gelangenden Schwingungen aufnehmen oder nicht, ungeändert lassen oder in andere umwandeln. Für den Schall sind nur die irdischen Körper Träger, für die übrigen Erscheinungen aber ist auch der kosmische Aether ein Fortpflanzungsmittel; demnach ergeben sich ausser dem Schall bereits folgende Schwingungsarten:

Licht ohne Wärme, d. h. blose Aetherschwingungen;

Wärme ohne Licht, d. h. Schwingungen irdischer Körper mit einer für Licht noch unzureichenden Schwingungszahl des den Körper durchdringenden Aethers.

Licht mit Wärme, d. h. vereinte Schwingungen des Aethers und der von ihm durchdrungenen Körper.

Als Träger der Lichtschwingungen kann nur der Aether angesehen werden; als der der Wärme der Aether und die irdischen Körper; die Verbreitungsweise der Wärme in jenem nennt man Strahlung, in diesem Leitung.*) Der leere Raum kann also nicht leiten, sondern nur strahlen.

Der Unterschied zwischen der Wärme, der Elektricität und dem Magnetismus liegt in der Form der Schwingungen; die Gestalt der Schwingungsbahn aber ist dabei nur insofern von Einfluss, als sie eben die Bahn einer einfachen Schwingung oder einer zusammengesetzten ist. Während nämlich beim Schall und beim Lichte nichts über die Lage des Punktes vorausgesetzt wurde, um welchen die Theilchen schwingen (wir wollen ihn mit Spiller den Gleichgewichtspunkt nennen), so kommt für Wärme, Elektricität und Magnetismus die Bedingung hinzu, dass der Gleichgewichtspunkt ausserhalb der natürlichen Gleichgewichtslage des Körper- oder Aethertheilchens liege, in welcher das Theilchen zur Ruhe gelangen würde. Wenn nun der Gleichgewichtspunkt mit dem Theilchen zugleich um die Gleichgewichtslage schwingt, so ist jede Schwingung des Theilchens eine Wärmeschwingung; macht der Gleichgewichtspunkt mit den um ihn schwingenden Theilchen selbst eine Viertelschwingung, so bedeutet jede Schwingung der Theilchen einen vorübergehenden, momentanen, die Aufeinanderfolge der Schwingungen aber einen dauernden elektrischen Strom; schwingen endlich die Theilchen um den in irgend einer Lage ausserhalb der Gleichgewichtslage fixirten Gleichgewichtspunkt, so sind dies magnetische und statisch elek-

*) Dieser Unterschied zwischen Strahlung und Leitung lässt sich auch für die Elektricität beibehalten, indem man zugleich annimmt, dass das Elektrischsein ein Schwingen der Körpertheile voraussetze, während in der elektrischen Strahlung nur die Aethertheilchen schwingen. Weil aber bei letzterer die elektrischen Nichtleiter unelektrisch bleiben, so muss man wohl die durchsichtigen Körper mit den Nichtleitern auf gleiche Stufe stellen, nicht mit den Leitern, wie es Spiller (S. 12) thut. Für das Licht giebt es in diesem Sinne keine Leiter, da bei ihm stets blos der Aether schwingt. Vergl. 372 des Jahrg. III d. Zeitschr.

trische Schwingungen, welche unter sich ganz gleich bedeutend sind.*) Schall, Licht und Wärme beruhen also auf Schwingungen um die Gleichgewichtslage, der Magnetismus und die Spannungselektricität auf Schwingungen um einen ausserhalb der Gleichgewichtslage fixirten Gleichgewichtspunkt und der elektrische Strom auf Schwingungen um einen selbst wieder um die Gleichgewichtslage schwingenden Gleichgewichtspunkt. Hören wir nun zunächst, wie Spiller aus diesen Erklärungen die Einzelnheiten ableitet, um daran einige Bemerkungen zu reihen.

### 1. Wärme.

Unter Zurückweisung der Annahme besonderer Wärmesphären, welche die ruhenden Atome wirbelnd umkreisen, giebt Spiller folgende Erklärung: „Durch Druck oder Reibung kommen die Molekel der Körper aus ihrer natürlichen Gleichgewichtslage und vollführen, indem sie wieder in dieselbe zurückkehren wollen, so lange oscillatorische Bewegungen nicht um**) ihre Gleichgewichtspunkte, sondern mit diesen Punkten, bis das

---

*) Spiller giebt weder eine Zusammenstellung der Verschiedenheiten, noch für jede Schwingungsart eine ausführliche und erschöpfende Angabe ihrer charakteristischen Merkmale; die obige Zusammenstellung ist den an verschiedenen Stellen mit nicht allzugrosser Klarheit zerstreuten Andeutungen über die Eigenschaften der Schwingungen angepasst worden und hoffentlich der Ausdruck der Ansicht Spillers, obgleich sie von den, in seinem um 1 Jahr früher erschienenen Grundrisse der Physik (Triest 1857) aufgestellten Erklärungen etwas abweicht. Dort sagt Spiller: bei dem Schalle, dem Licht und der Wärme sind die Schwingungen fortschreitend; daher ist in dem fortpflanzenden Medium ein Widerstand vorhanden; es entstehen Maxima und Minima der Verdichtung (?); die Fortpflanzung ist eine allmälige. Bei dem Magnetismus und der Elektricität sind stehende Schwingungen der untrennbaren Massentheilchen um ihren Schwerpunkt; daher ist der Widerstand unendlich klein, und die Schwingungen müssen sich in einem Körper, welcher ein ununterbrochenes Ganze bildet, fast momentan fortpflanzen. Cohäsionsverhältnisse und die Natur eines Stoffes können es bewirken, dass die in ihm beginnenden Oscillationen fixirt worden; so ist es beim Magnetismus; er ist eine fixirte ½ Oscillation sämmtlicher Massentheilchen um ihren Gleichgewichtspunkt nach einerlei Richtung, so dass die Oscillationen aller mit ihren gleichgerichteten Enden nach einer gewissen Richtung dort den Nordpol, die Oscillationen nach der entgegengesetzten Seite den Südpol geben. Die Weite der Schwingung bedingt die Stärke des Magnetismus. Der Zustand bei Magnetismus und elektrischen Spannungserscheinungen ist ein statischer; in den elektrischen Stromerscheinungen findet ein fortwährendes Oscilliren jenseits und diesseits der Gleichgewichtslage statt, es ist ein oscillatorisches Erzittern jenseits und dieser Lage, eine theilweise und zeitweise Fixirung der einseitigen Lage und desshalb erfolgt auch ein Magnetisiren.

**) Ich vermuthe fast, dass Spiller hat schreiben wollen: nicht allein um etc.... Was sollte man sonst unter einer Schwingung eines Theilchens mit seinem Gleichgewichtspunkte verstehen? Und welche Lage haben dabei die Theilchen gegen ihre Gleichgewichtspunkte? Spiller giebt zwar im „Phantom" keine Erklärung des Wortes Gleichgewichtspunkt, doch geht aus der Erklärung der Form der elektrischen Schwingung (S. 34) deutlich genug hervor, dass der Mittelpunkt der Schwingung darunter zu verstehen ist. Wenn aber die Theilchen nicht auch um ihre Gleichgewichtspunkte schwingen, so ist es ganz überflüssig, zu sagen, dass sie mit ihren Gleichgewichtspunkten schwingen, denn dann treten eben überhaupt keine Gleichgewichtspunkte auf oder sind wenigstens von den Theilchen selbst nicht zu sondern. Wenn ferner „die Wärme in Schwingungen der Moleküle jenseits und diesseits ihrer natürlichen Gleichgewichtslage, Elektricität in Schwingungen jenseits oder diesseits dieser Lage besteht" (S. 46) und bei den elektrischen Schwingungen „die Moleküle um ihre Gleich-

Gleichgewicht aller desselben Körpers und selbst der umgebender Körper wieder hergestellt oder bis Temperaturausgleichung erfolgt ist. Die Erscheinungen am Thermophon dienen zu einem directen Beweise davon, dass die Wärme in Schwingungen der irdischen Körper besteht, wobei die Gleichgewichtspunkte der Molekel selbst nach jenseits und diesseits der Gleichgewichtslage in allen beliebigen Ebenen schwingen." Allein die Coincidenzstösse und Töne, welche am Thermophon entstehen, beweisen nicht unbedingt, dass die Wärme aus Schwingungen besteht, sondern nur, dass sie Schwingungen veranlasst; denn die Ursache der Stösse und Töne könnte auch eine abwechselnde Ausdehnung und Zusammenziehung, Hebung und Senkung der von den kalten Theilchen zunächst berührten warmen Theilchen sein, wodurch eben die kalten in Schwingungen versetzt werden. Die Schwingungsform aber lässt sich vollends daraus nicht entnehmen, wenn man nicht etwa die Wärmeschwingungen als mit den tönenden gleichbedeutend gelten lassen will, sie nicht als zusammengesetzte, sondern als einfache Schwingungen betrachtet.

Nun folgen die Erklärungen der Wärmeerscheinungen.

*a*) „Der Temperaturgrad ist proportional der Schwingungszahl."

*c*) „Die Amplitude der Wärmeschwingungen ist bei einer bestimmten Temperatur von dem Stoffe abhängig und wächst mit wachsender Temperatur an einem bestimmten Stoffe, d. h. dehnt ihn mehr und mehr aus."

*c*) „Jeder Körper befindet sich nach der Natur seines Stoffes und nach seinem Aggregatzustande in einem gewissen thermischen Schwingzustande, oder er hat einen gewissen Grad gebundener Wärme, d.h. er hat, wenn auch die Wärmeschwingungen in ihm ruhen, eine gewisse Fähigkeit durch eine gewisse Wärmequelle zu verschiedenen Wärmeschwingungen angeregt zu werden."

Da jeder Körper immer irgend eine Temperatur hat, so ist er demnach

---

gewichtspunkte jenseits oder diesseits der Gleichgewichtslage" (S. 36) schwingen, wenn endlich kaum irgendwo mit Bestimmtheit die Wärmeschwingungen als einfache bezeichnet werden, so liegt es nicht eben fern, bei den „doppelseitigen Wärmeschwingungen mit wachsender Elongation" (S. 45) auch an ein Schwingen der Theilchen um die Gleichgewichtspunkte zu denken, weil sonst nicht Schwingungen jenseits und Schwingungen diesseits, sondern nur Schwingungen nach jenseits und diesseits der Gleichgewichtslage vorhanden wären, die sich in Nichts von den Schall- und Lichtschwingungen unterschieden. Auch stimmt die Erklärung mit der Lesart: nicht allein um besser zu dem daraus gezogenen Folgerungen besonders zu S. 37: „der elektrische Strom enthält ferner die Bedingungen zu Wärmeschwingungen; denn die ausserhalb des Gleichgewichtspunktes der Molekel liegenden Atome schwingen jedes für sich jenseits und diesseits; ja es lässt sich denken, dass bei einer bedeutenden elektromotorischen Kraft die Gleichgewichtspunkte selbst auch in Schwingungen gerathen, wodurch die Temperatur erhöht wird;" zu S. 48: „bei der Abgleichung der elektrischen Gegensätze (+ und —) schwingen die Moleküle zu beiden Seiten der Gleichgewichtslagen der Act der Neutralisation ist daher eine Umwandlung von Elektricität in Wärme;" und zu Seite 51: „so dass die ausserhalb der Gleichgewichtslage schwingenden Atome der Moleküle (!) die Wärmeerscheinungen hervorrufen, welche sodann die Moleküle mit ihren Gleichgwichtspunkten erfasst."

beständig in Wärmeschwingungen begriffen, gelangt nie zur Ruhe, höchstens zur Beharrung, und dann bedingen die Temperatur und die Beschaffenheit des Stoffs durch ihren Einfluss auf die Amplitude das Volumen und bei Temperaturveränderungen die relative Ausdehnung. Bei verschiedenen Körpern ist also bei gleicher Temperatur das Volumen und bei gleicher Temperaturänderung die durch deren Einfluss auf die Amplitude erzeugte relative Ausdehnung verschieden. Bei gleichen Körpern von verschiedener Grösse und bei gleich grossen verschiedenen Körpern wird also auch durch eine bestimmte ihnen zugeführte Wärmemenge (d. h. durch ein bestimmtes auf sie übertragenes Schwingungsmoment) die Schwingungszahl in verschiedener Weise abgeändert, also eine verschiedene Temperaturerhöhung hervorgebracht werden, es haben also die Körper verschiedene Wärmecapacität,*) aber die Atome der chemischen Elemente haben alle dieselbe Wärmecapacität. Der Einfluss des Stoffes auf die Füglichkeit der Fortpflanzung von Wärmeschwingungen in ihm bedingt die Leitengsfähigkeit; Strahlung und Leitung unterscheiden sich in der früher angegebenen Weise und der Grad der Leitungsfähigkeit wird nach der Geschwindigkeit bemessen, mit welcher die Fortpflanzung erfolgt. Obwohl Spiller den ursächlichen Zusammenhang zwischen Amplitude, Schwingungszahl, Temperatur, Ausdehnung u. s. w. nicht weiter begründet hat, so ist es doch leicht denkbar, dass ein solcher vorhanden sein kann, und dann sind die daraus gezogenen Folgerungen richtig. Misslicher steht es um die Erklärung der gebundenen Wärme. Zuvörderst, wie soll man sich den thermischen Schwingungszustand des Körpers vorstellen, wenn die Schwingungen in ihm ruhen, weil der Körper irgend eine Temperatur haben muss? Fällt die Erklärung der gebundenen Wärme nicht mit jener der Wärmecapacität zusammen? Es liess sich aber die Schwierigkeit wohl umgehen, wenn man etwa sagte: jeder Körper bedarf zu seinem Bestehen in einer gewissen Form (Grösse und Aggregatzustand) einer gewissen Amplitude und Schwingungszahl seiner Wärmeschwingungen und diese sind gebunden, d. h. sie können ihm nicht genommen werden, so lange er in dieser Form bestehen soll und muss; wird ihm Wärme genommen oder neue zugeführt, so muss sich seine Form ändern; wird durch äussere Kräfte seine Form geändert, so wird durch die äusseren Kräfte das Volumen und mit diesem die Amplitude vergrössert oder verkleinert, und, da das Schwingungsmoment im Körper ungeändert geblieben ist, so wird die Schwingungszahl vermindert oder vermehrt, d. h. die Temperatur fällt oder steigt, und es wird entweder von der Umgebung aufgenommen oder an sie abgesetzt, was der Körper an Wärme bedarf oder überflüssig hat, es wird Wärme gebunden oder frei. So ist es auch bei der

*) Die Körper von grosser Wärmecapacität ähneln den elektrischen Isolatoren; beide lassen sich schwer in Schwingungen versetzen, schwingen dann aber auch um so länger.

Aenderung des Aggregatzustandes und zwar in erhöhtem Maasse; desgleichen bei chemischen Verbindungen und Zersetzungen, bei Lösungen, bei Ausscheidung oder Aufnahme von Wasser bei der Krystallisation oder bei chemischen Vorgängen (Krystallisations- oder Constitutionswasser). Daran schliesst sich endlich ganz natürlich der Einfluss der Wärme auf das Zustandekommen oder die Lösung chemischer Verbindungen; es regulirt nämlich die Wärme theils die Entfernung, theils die Geschwindigkeit der Bewegung der einzelnen Theilchen und macht sie für die chemische Verbindung mehr oder weniger geeignet.

2) Der elektrische Strom.

Der thermoelektrische und ebenso der contactelektrische Strom entsteht „durch den Conflict der einander entgegenkommenden Wärmeschwingungen der beiden Metalle miteinander und mit der in dem Beharrungsvermögen der Moleküle des Leiters liegenden dritten Kraft und besteht aus zusammengesetzten Schwingungen der Moleküle ausserhalb (d. h. diesseits oder jenseits) der Gleichgewichtslage um ihre Gleichgewichtspunkte. Es entfernen sich also zunächst die Gleichgewichtspunkte aus der Gleichgewichtslage *ab* (s. Taf. IV, Fig. 13) in eine neue Lage *cd* (Hauptschwingung), um welche dann zwischen *mn* und *op* die Moleküle schwingen (Nebenschwingung), „wobei die Erlangung der von *ab* entfernteren Lage *mn* die Ladung und die der näheren *op* die angestrebte Entladung bedeutet, indem *ab* die vollständige Entladung ist.“ Diese Erklärung*) ist offenbar der Erklärung der Wärmeschwingungen nachgebildet. Dort fehlte die Begründung und selbst die Erläuterung des Schwingens der Gleichgewichtspunkte um die Gleichgewichtslage. Hier findet sich eine anderweitige Unbestimmtheit. Das Wort „ausserhalb“ scheint nämlich anzudeuten, dass *cd* eine, wenigstens für eine gewisse Zeitdauer bleibende Lage sei, und S. 47 sagt Spiller, dass „bei der Reibungselektricität die Spannung (Hauptschwingung) grösser sei, d. h. die Moleküle auf die Dauer weiter aus ihrer Gleichgewichtslage gebracht seien, als bei der durch Berührung erzeugten.“ Dagegen lässt die Bezeichnung als „Hauptschwingung“ und die Bemerkung, dass dieselbe mit der Wärmedifferenz der Löthstellen wachse (S. 35),

*) Eine Art Beweis folgt S. 36: „Davon, dass der elektrische Strom wirklich in einer lebendigen Oscillation der Moleküle um ihre Gleichgewichtspunkte jenseits oder diesseits besteht, giebt die Erscheinung der Elektricität an den Knotenlinien der Klangfiguren einen klaren Beweis, indem zwei durch eine Knotenlinie geschiedene Theile entgegengesetzte Schwingungsphasen besitzen, die für die Moleküle in der Knotenlinie durch Rückwirkung der Cohäsion und Elasticität des Stoffes nicht blos einfache Oscillationen (Hauptschwingung) bleiben können, sondern ausserdem in (Neben-) Schwingungen ausserhalb der Gleichgewichtslage übergehen müssen.“ — Hier fehlt es wohl an Klarheit. Die Knotenlinien sind doch in Ruhe, da sich in ihnen die entgegengesetzten Antriebe zu Schwingungen auszugleichen, oder sind sie blos rücksichtlich der tönenden Schwingungen in Ruhe und zugleich in elektrischen Schwingungen begriffen?

vermuthen, dass *cd* selbst um *ab* schwinge. Da ferner „der elektrische Strom in Bewegung begriffener Magnetismus sein," und da er „durch die während des Stromes einseitig bleibende Hauptschwingung dargestellt werden" soll, da endlich im Magnetismus eine Vierteloscillation (Hauptschwingung) fixirt ist, so dürfte auch während der Dauer des Stroms $\frac{1}{4}$ der Hauptschwingung vollendet werden. In Fig. 13 wurde *cd* in zwei verschiedenen Lagen gegen *ab* gezeichnet, um damit die Existenz von positiven und negativen Strömen anzudeuten; denn wenn die Massentheilchen auf entgegengesetzten Seiten der natürlichen Lage schwingen, so sind die Ströme entgegengesetzt. Auf Seite 40 ist ein momentaner elektrischer Strom*) als eine einzelne Schwingung ausser der Gleichgewichtslage und auf S. 41 als eine einseitige (d. h. $\frac{1}{4}$) Oscillation (der Hauptschwingung) bezeichnet. Endlich scheint aus der Stelle: „bei der Untersuchung der Wirkungen eines solchen Stroms kommt es auf die Elongation der Hauptschwingung an, oder wie weit sich jedes Molekül um den Gleichgewichtspunkt dreht, und auf die Amplitude und Schwingungszahl der Nebenschwingungen**) um diese neue Lage. Jene bedingt die sogenannten Intensitäts- (mechanische, physiologische Wirkung), diese die Quantitätserscheinungen (chemische Wirkung, Licht, Wärme)" fast zu folgen, dass Spiller weniger jedem Theilchen eine selbstständige Schwingung zugesteht,***) als vielmehr in Uebereinstimmung mit der bildlichen Darstellung in Fig. 13 sich eine Reihe hintereinanderliegender Theilchen wie ein Doppelpendel schwingend vorstellt; dann würde aber wohl jedes solche Doppelpendel beide Elektricitäten an seinen Enden und dazwischen im Durchschnittspunkte *c* eine Indifferenzzone zeigen.

### 3) Magnetismus.

Auch die Erklärung des Magnetismus leidet an Unbestimmtheit; sie lautet: „Endlich liegt in den Schwingungen des elektrischen Stromes noch ein sehr wichtiges Moment. Die Atomgruppen oder Molekel schwingen nämlich nicht blos um ihre Gleichgewichtspunkte, sondern theils jenseits, theils diesseits derselben†) und sind, wie lange der elektrische Strom durch den Leitungsdraht geht, so lange entweder nur jenseits und††) nur

---

*) Eine Erklärung des continuirlichen Stromes findet sich nirgends, blos die Andeutung, „dass die Moleküle, so lange der Strom durch den Draht geht, entweder nur diesseits oder nur jenseits schwingen." Wie soll man nach dem Obigen einen dauernden Strom definiren?

**) „Dass zu jedem Strome auch eine gewisse Schwingungszahl der Nebenschwingungen gehört, beweist der Umstand, dass nicht die Länge des von discontinuirlichen Strömen durchflossenen Drahtes, sondern die Intensität des Stromes die Höhe des Tones bestimmt."

***) Doch haben wenigstens „alle Moleküle gleichzeitig dieselbe Elongation der Hauptschwingung und dieselbe Amplitude in der Nebenschwingung."

†) Wessen? der Gleichgewichtspunkte oder der Gleichgewichtslage?

††) Soll wohl heissen: oder.

diesseits jener Lage. Diese vorübergehend fixirte Schwingung ist der Thermo- oder Elektromagnetismus, und wenn die Fixirung dieser Vierteloscillation auf die Dauer geschieht und nach der Natur der Körper ohne neue Erregungen in ihnen festgehalten wird, der gewöhnliche Magnetismus, der sich aber seinem Wesen nach von jenen nicht unterscheidet. Die Grösse der Elongation bedingt seine Stärke." Dass hier nur von Fixirung einer Vierteloscillation der Hauptschwingung die Rede ist, zeigt S. 39.*) Ist denn aber eine fixirte Schwingung überhaupt noch eine Schwingung?**) Oder fallen die Nebenschwingungen weg? Dann wären aber Magnetismus und Elektricität wesentlich verschieden, was sie aber nach S. 42 nicht sein sollen. Sie stehen vielmehr in folgender Wechselbeziehung: „Der elektrische Strom ist in Bewegung begriffener Magnetismus und Magnetismus ist zur Ruhe gebrachte Elektricität.***) Diesen Satz sucht Spiller aus den Inductionserscheinungen zu beweisen; allein es kann auch dieser Versuch nicht als gelungen und genügend bezeichnet werden. Zuerst nämlich wird doch die „zur Ruhe gebrachte magnetische Vierteloscillation" bei der magnetomagnetischen Induction nur dadurch inducirt, dass sie eben gemacht wird; bevor sie fixirt werden kann, muss sie gemacht werden; während sie aber gemacht wird, ist sie Magnetismus in Bewegung, d. h. ein momentaner elektrischer Strom. Wenn dabei ferner in der angegebenen Weise durch rasche Umkehrung der z. B. den durch Erdmagnetismus magnetisch gewordenen Stange aus einer Lage in der Inclinationsrichtung in die entgegengesetzte, die Theilchen der Stange selbst „eine einzelne Schwingung ausserhalb der Gleichgewichtslage machen, d. i. einen momentanen elektrischen Strom zeigen," so müsste eben dieser, sowie der in der Stange beim ersten Auftreten des Magnetismus entstehende Strom, wieder in einem benachbarten Leiter zwei Ströme wecken, einen bei seinem Beginn und einen zweiten bei seinem Verschwinden; darüber ist nichts bekannt; vielleicht heben sich beide bei ihrer schnellen Aufeinanderfolge wegen ihrer entgegengesetzten Richtung auf, sonst müssten sie wenigstens einen modificirenden Einfluss auf den im Leiter durch das Entstehen des Magnetismus hervorgerufenen, freilich eben-

*) „Man kann sich vorstellen, dass die um eine Vierteloscillation aus der Gleichgewichtslage gebrachten Moleküle in dieser neuen Lage gewissermassen arretirt werden;" „die während des Stromes einseitig bleibende Hauptschwingung stellt den Magnetismus dar." „Die Wärme lockert die Fixirung und gestattet eine Rückkehr aus der erzwungenen zur natürlichen Gleichgewichtslage;" „die zum Magnetismus nöthige Vierteloscillation."

**) Spiller scheint selbst daran gedacht zu haben, weil er S. 46 sagt: „der starre Magnetismus ist einer Hemmung oder Ableitung durch Berührung unfähig," und S. 47: „Beim Magnetismus kann nicht, wie bei der Elektricität, von der Geschwindigkeit der Fortpflanzung die Rede sein, sondern nur insofern, als er nach den allgemeinen Gesetzen eine momentane Wirkung auf die Entfernung in einer beschränkten Sphäre ausübt." Der letzte Zusatz war nöthig wegen der magnetischen Influenz und Induction.

***) Ein ähnlicher Ausspruch, aber in etwas verschiedener Bedeutung findet sich im IV. Jahrg. d. Zeitschr. S. 159

falls nur momentanen Strom äussern. Bei der Erklärung der magneto-elektrischen Induction stört der Machtspruch, dass die durch den bewegten Magnet aus der Gleichgewichtslage *or* (Fig. 14. Taf. IV) in eine neue *cd* gerückten Theilchen des Leiters gerade nur mit einer ¼ Schwingung *cof* und *drg* in ihre natürliche Gleichgewichtslage zurückgehen*); und wenn „dies auch einen vorübergehenden Strom geben könnte, indem bei dieser ¼ Schwingung die Bewegungsrichtung der ersten ³/₄ eine andere, als die des letzten ¼ ist, was einer einseitigen Oscillation entspricht", so fragt man doch gewiss mit Recht, warum der Strom „erst beim Aufhören der Bewegung des Magneten durch die rückwärts, also entgegengesetzt gerichtete Oscillation eintritt", und warum „die durch das Hinbewegen des Magneten entstandene Vierteloscillation von *or* bis *cd* nicht der Strom, sondern nur die vorübergehende Spannungslage" sein soll. Eine Oscillation ist doch sonst keine Lage!

## 4) Spannungselektricität.

Das Wesen der Spannungselektricität erklärt Spiller wie folgt: In den schlechten Leitern stauen sich gewissermassen die elektrischen Schwingungen oder werden zu fixirten. Wenn z. B. die beiden Poldrähte eines elektromagnetischen Inductionsstromes nach einander mit den beiden Belegungen einer Leydener Flasche in Berührung gebracht werden, so hindert der zwischenliegende Isolator die Fortpflanzung und Ausgleichung der beiden Bewegungen, es haben die Moleküle in den beiden Belegungen eine entgegengesetzte, aber zur Ruhe gebrachte Schwingung erhalten: „es ist eine Spannung vorhanden, die aufhören muss, sowie die beiden Belegungen durch einen guten Leiter verbunden werden. Dieser Zustand ist vollkommen der beim Magnetismus, bei welchem die Ausgleichung der Spannungen der beiden Pole durch den Anker aus weichem Eisen geschieht, während Luft und andere Körper sie isoliren. Der Unterschied wird nur durch die Natur der Körper hervorgebracht, an welchen die zur Ruhe gebrachte oder in Ruhe gehaltene Vierteloscillation erscheint. Der Nordpol eines Magneten verhält sich wie positive, der Südpol wie negative Elektricität. Die innige Verwandtschaft, ja Identität des Magnetismus und der Elektricität zeigt sich auch darin, dass die Tragfähigkeit eines Magnetpols in der Nähe eines geladenen Conductors geschwächt oder verstärkt wird, wie wenn man ihm beziehungsweise den ungleichnamigen oder gleichnamigen Pol eines anderen Magneten nähert. Stellt man die Glasscheibe der Elektrisirmaschine in den magnetischen Meridian (um den Einfluss des Erdmagnetismus zu beseitigen) und dreht sie von Süd nach unten,

---

*) Auch bei der elektro-elektrischen Induction soll nur eine ¼ Schwingung geschehen; desgleichen bei der Funkenentladung in dem zwischen den beiden + und — elektrischen Körpern liegenden Körper, es wird hier aber wenigstens den Theilchen noch eine unmerkliche Schwankung um die Gleichgewichtslage erlaubt.

nach Nord u. s. f., so bekommen die Massentheilchen des Glases durch die Reibung in der Südhälfte der Scheibe sowohl, als auch an der Ost- und Westseite eine Richtung, die der in der Nordhälfte entgegengesetzt ist. In dieser durch die Natur des Glases fixirten Spannungslage müssen die beiden Quadranten der Südhälfte auf der Ost- und Westseite gegen eine mit ihnen parallel gehaltene kurze Magnetnadel ein anderes Verhalten zeigen, als in den beiden Seiten der Nordhälfte; jene ziehen den Südpol, diese den Nordpol der Nadel an. Dreht man die Scheibe umgekehrt, so ist auch die Anziehung umgekehrt*). Bringt man einen Tropfen heissen Siegellacks auf den elektrischen Conductor einer in Thätigkeit versetzten Maschine, so bilden sich Fäden von verschiedener Feinheit, die man durch Wegziehen mit einer Siegellackstange verlängern kann. Die feinsten zeigen unter dem Mikroskope hohle Spiralen, die stärkeren nur an der Oberfläche, und zwar gehen sie auf dem positiven Conductor von links nach rechts, auf dem negativen umgekehrt; die äusseren Spiralen zeigen dort breitere eingedrückte, hier breitere erhabene Windungen**). Wird geschmolzenes Siegellack dem electrischen Conductor gegenüber gehalten und zieht man Fäden aus, so sind natürlich die Windungen denen im vorigen Falle entgegengesetzt gerichtet. Erwärmtes Siegellack wird negativ, Glas positiv; daher giebt jenes in ausgezogenen Fäden äussere Spiralen von rechts nach links, dieses umgekehrte."

Wenn die eben mitgetheilten Thatsachen streng wahr sind, so gewinnt die Ansicht Spiller's über die Identität des Magnetismus und der Elektricität eine grosse Wahrscheinlichkeit. Experimentell nachzuweisen bleibt aber z. B. immer noch, dass der Erdmagnetismus nicht allein auf vom Strome durchflossene Leiter, sondern auch auf positiv elektrische oder negativ electrische, oder wenigstens auf Körper, welche positive und negative Elektricität zugleich (mit einer Indifferenzzone dazwischen) haben, seine Richtkraft eben so gut äussert, wie auf bewegliche Magnete.

---

Obgleich demnach im Vorhergehenden sattsam nachgewiesen wurde, dass Spiller seine Ansicht über die Natur der Wärme, der elektrischen und magnetischen Schwingungen nicht allein in bestimmteren und erschöpfenderen Definitionen hätte niederlegen, sondern dass er sie auch mit grösserer Consequenz, besonders rücksichtlich des Unterschiedes zwischen Haupt- und Nebenschwingung, hätte durchführen sollen; obgleich die dynamische

*) Es ist aber doch die Scheibe überall gleichnamig electrisch. — Die Scheibe scheint also nicht von dem Erdmagnetismus magnetisch influenzirt worden zu sein.

**) Spiller erklärt dies als natürliche Folge der von allen Theilchen nach derselben Richtung hin ausgeführten einseitigen Schwingungen; die Rotation aber einer Flüssigkeit um den Leitungsdraht, durch welchen der Strom geht, als Folge der einseitigen Stösse nach derselben Richtung. Da hierbei die Stösse im Querschnitte des Leiters tangential sein müssten, so lassen sich beide Erscheinungen als weitere Stützpunkte für die im IV. Jahrgang dieser Zeitschrift S. 159 ausgesprochene Ansicht benutzen.

Ursache für die angenommene Form der Schwingungen nicht angegeben, die Kräfte nicht bezeichnet wurden, welche die Theilchen veranlassen, gerade so zu schwingen; obgleich selbst die auf die Definitionen gestützten Erklärungen noch so Manches zu wünschen übrig lassen und sogar manche Erklärung hinzuzufügen wäre (z. B. über die Beziehung der positiven und negativen Elektricität, des Nord- und des Südmagnetismus zu einander; über das Auftreten beider Elektricitäten bei der Influenz; über den Grund, weshalb „die elektrischen und magnetischen Erscheinungen nur an der Oberfläche der Körper zur Wahrnehmung und Wirkung gelangen" können und dennoch die magnetischen Pole nicht in den Endflächen liegen, u. s. w.); obgleich daher die (indessen auch keineswegs direct widerlegte) Ansicht Spiller's noch nicht gegründeten Anspruch auf allgemeine Anerkennung machen darf: so liefert dieselbe doch gewiss manches neue gewichtige Moment für die Behauptung, dass die Undulationstheorie zur Anwendung auf Elektricität und Magnetismus nicht allein berechtigt, sondern auch berufen ist. Ich meinestheils habe mich gefreut, als ich in „dem Phantom der Imponderabilien" rücksichtlich der Begründung der eben wiederholten Behauptung und selbst in Hinsicht auf manche allgemeinere Eigenschaften der elektrischen Schwingungen eine so grosse Uebereinstimmung mit den kürzlich in dieser Zeitschrift über denselben Gegenstand veröffentlichten Artikeln fand. So wenig, als Spiller in Posen von dem Entstehen meiner Arbeit wusste, so wenig war mir während meines Aufenthalts in Italien, wo ich jene Artikel schrieb, etwas von seinem bereits erwähnten Schriftchen: „Gemeinschaftliche Principien u. s. w." bekannt geworden, und das Erscheinen des „Phantoms" fällt erst nach dem Abschluss meiner Arbeit. — Wenn aber einmal die Berechtigung einer Anwendung der Undulationstheorie auf Elektricität und Magnetismus zur Genüge dargethan ist, so dürfen wir um so getroster an die nächste Aufgabe gehen: die Natur der Schwingungen zu erforschen, aus welcher sich die elektrischen und magnetischen Erscheinungen ungezwungen erklären lassen. Die Lösung dieser Aufgabe hoffen und erwarten wir von der Zukunft.

Nicht unbemerkt jedoch möge es bleiben, wie günstige Folgerungen sich machen lassen, wenn man die Erklärungen etwa so formulirt:

1) Wenn jedes Theilchen um einen ausserhalb der Gleichgewichtslage fixirten Gleichgewichtspunkt schwingt, so bedeuten die Schwingungen Magnetismus oder Spannungselektricität.

2) Wenn aber jedes Theilchen nicht blos um den Gleichgewichtspunkt (Nebenschwingung), sondern dieser selbst zugleich mit um die Gleichgewichtslage schwingt (Hauptschwingung), so bedeuten die zusammengesetzten Schwingungen:

*a*) Wärme, sobald die Gleichgewichtspunkte volle Schwingungen vollbringen;

*b*) einen elektrischen Strom, sobald nur ein Stück der Amplitude

bis höchstens ½ Schwingung umfasst, welche nach einer bestimmten, unverändert beibehaltenen Richtung erfolgt; die eine halbe Schwingung (Hergang) ist der positive, die andere halbe Schwingung (Hingang) ist der negative Strom; mit jedem Richtungswechsel in der Hauptschwingung schlägt also das Vorzeichen des Stroms in das entgegengesetzte um.

Jeder Körper ist nun zwar stetig in Wärmeschwingungen begriffen, allein die dadurch erzeugten Ströme von verschiedenem Vorzeichen wechseln so schnell, dass der Körper unelektrisch erscheint, so lange er über und über gleiche Temperatur hat. Hat dagegen eine Stelle eine höhere oder niedere Temperatur als die andere, so bewegt sich die Wärme von oder zu ihr, d. h. die Amplitude der Hauptschwingung wächst in dieser Richtung, daher zeigt sich ein (thermo-) elektrischer Strom. — Wenn ein Strom entsteht, so dauert er so lange als die ¼ Hauptschwingung; wird der Gleichgewichtspunkt in seiner äussersten Lage fixirt, so ist nicht der Strom mehr vorhanden, sondern Spannungselektricität oder Magnetismus (Polarität des Leitungsdrahtes). Ist diese fixirte Elongation der Hauptschwingung so gross, dass die Elasticität der Theilchen ein Zurückgehen veranlasst, so entstehen ganze Hauptschwingungen, d. h. der Strom erwärmt. Dabei ist der Strom selbst nicht mehr vorhanden. Magnetismus und Spannungselektricität können nur die ihnen innewohnenden Schwingungen induciren, elektrische Ströme aber erst dann wecken, wenn die Bewegung des magnetischen oder elektrischen Körpers oder die Bewegung des Schwingungszustandes über den Körper eine Hauptschwingung hinzufügt. Magnetismus und Spannungselektricität müssen alle Wirkungen des dauernden (galvanischen) Stromes hervorbringen können, so die chemischen; Anziehung oder Abstossung in die Ferne; — parallele oder gleichgerichtete Ströme verhalten sich zu einander wie zwei Magnete mit analoger Lage der Pole, (vergl. Fig. 15 Taf. IV); andere Wirkungen bringt nur der momentane (Reibungs-, Inductions-, Thermo-) Strom hervor, z. B. die mechanischen, physiologischen. Nur die letzteren Ströme induciren wieder Ströme; jedes Nachlassen in der Intensität ist ein Strom nach entgegengesetzter Richtung. Beim Aufhören des dauernden Stroms machen die Theilchen zunächst ¼ Hauptschwingung rückwärts; die folgenden Viertelschwingungen heben sich je zwei und zwei auf und die Elongationen nehmen dabei nach und nach bis auf Null ab (vergl. Fig. 16 Taf. IV). — Lichterscheinungen treten auf, wenn die (Haupt- oder Neben-) Schwingungen schnell genug auf einander folgen. — Zonen entstehen, wenn die Hauptschwingung von verschiedenen Punkten in verschiedenen Schwingungsstadien fixirt wird (vergl. Fig. 17 Taf. IV); bei Isolatoren pflanzt sich ja die Elektricität sehr langsam fort. Dr. Zetzsche.

**Die Potentialfunction und das Potential.** Ein Beitrag zur mathematischen Physik; von Dr. CLAUSIUS, Professor an der Universität und am eidgenössischen Polytechnicum zu Zürich. Leipzig, Verlag von J. A. Barth.

Je mehr es gelingt, die physikalischen Erscheinungen aus den Wirkungen von Elementarkräften zu erklären und damit auf einfache mechanische Principien zurückzuführen, desto wichtiger wird auch die specielle Untersuchung solcher Functionen, die bei jenen Arbeiten eine bevorzugte Rolle spielen. Hierher gehören besonders das Potential und die Potentialfunction, und es bedarf nur einer flüchtigen Ansicht der älteren Untersuchungen von Green und Gauss, sowie der neueren von Neumann, Kirchhoff, Helmholtz, Thomson u. A., um sich von der Richtigkeit dieser Bemerkung zu überzeugen. Andererseits ist nicht zu leugnen, dass das nöthige Material zu einer Theorie jener Functionen etwas zerstreut umherliegt, und man muss es daher dem Verfasser Dank wissen, dass er eine geordnete Zusammenstellung gegeben hat. Der Vorrede zufolge macht der Verfasser keinen Anspruch darauf, neue Resultate mitzutheilen, und bezeichnet nur die Art der Zusammenstellung und einen grossen Theil der Beweisführung als neu; Referent erlaubt sich, hinzuzusetzen, dass auch, wenn letzteres nicht der Fall wäre, das Schriftchen immerhin eine sehr willkommene Erscheinung gewesen sein würde. Der Verfasser bemerkt ferner, dass er hier und da, den Physikern zu Gefallen, etwas breitere Auseinandersetzungen gegeben habe, als es für Mathematiker von Fach nöthig gewesen wäre — wir glauben aber, dass sich der Verfasser darüber vollständig beruhigen kann. Referent wenigstens ist mit jener Ausführlichkeit und Weitläufigkeit, die in den Werken mancher bekannten Schriftsteller dem Leser zum Ekel wird, ebensowenig einverstanden, als mit einer neuerdings Mode gewordenen Vornehmthuerei, die absichtlich an schweren Stellen mit einem „man findet leicht" sich den Schein der Genialität geben will. Die Mittelstrasse, wie sie z. B. in Euler's Abhandlungen dem Leser so wohlthuend wirkt, ist freilich nicht leicht einzuhalten, der Verfasser des vorliegenden Schriftchens dürfte sie aber recht gut getroffen haben.

SCHLÖMILCH.

---

# Bibliographie

vom 16. Juni bis 15. August 1859.

---

### Periodische Schriften.

CRELLE's Journal für reine und angewandte Mathematik, fortgesetzt von BORCHARDT. 57. Bd. I. Heft. Berlin, Reimer. pro compl. 4 Thlr.

Astronomische Nachrichten, begründet von SCHUMACHER, fortgesetzt von HANSEN und PETERS. 51. Bd. No. 1. Hamburg, Perthes, Besser & Mauke. pro compl. 5 Thlr.

*Mémoires de la Société royale des sciences de Liège. Tome XIV. Bruxelles,* Leipzig, Gand. 3⅓ Thlr.

Monatsberichte der Königl. Akademie der Wissenschaften zu Berlin. Jahrg. 1859. Berlin, Dümmler in Comm. pro compl. 1⅓ Thlr.

Archiv der Mathematik und Physik, von GRUNERT. 33. Theil. 1. Heft. Greifswald, Koch. pro compl. 3 Thlr.

Abhandlungen der Königl. Akademie der Wissenschaften zu Berlin. Aus dem Jahre 1854. 2. Supplementband. Berlin, Dümmler in Comm. 6⅔ Thlr.

### Reine Mathematik.

HOFFMANN, L., Mathematisches Wörterbuch. 8. Lieferung. Berlin, Bosselmann. ⅓ Thlr.

SALOMON, J., Lehrbuch der Arithmetik und Algebra. 6. Auflage. Wien, Gerold's Sohn. 2⅔ Thlr.

SIMERKA, W., Lösung zweier Arten von Gleichungen. (Akad.) Wien, Gerolds Sohn in Comm. 2 Ngr.

STUBBA, A., Sammlung algebraischer Aufgaben nebst Anleitung zur Auflösung derselben durch Verstandesschlüsse. 4. Aufl. Sagan, Julien's Buchhandlung. ⅓ Thlr.

HERSCHEL, J. F. W., Aufgaben aus der endlichen Differenzen- und Summenrechnung. Deutsch von SCHNUSE. Braunschweig, Leibrock. 1½ Thlr.

MANN, F., Das rechtwinklige Parallelepiped. Eine Monographie. Frauenfeld, Huber in Comm. 6 Ngr.

BOYMANN, J. R., Lehrbuch der Geometrie. 2. Theil. Ebene Trigonometrie und Stereometrie. Schwann's Verlagshandlung in Cöln und Neuss. ¾ Thlr.

KIESER, F. v., Die ebene Geometrie. 4. Auflage, umgearbeitet von BOHNENBERGER. Stuttgart, Oetinger. ⅝ Thlr.

RUMMER, F., Lehrbuch der Elementargeometrie mit Sammlung von Aufgaben. 1 Th. Ebene Geometrie. 4. Aufl. Heidelberg, Mohr. 14 Ngr.

SPITZ, C., Lehrbuch der ebenen Trigonometrie. Leipzig, C. F. Winter'sche Verlagshandlung. 14 Ngr.

Anhang dazu, Resultate und Auflösungen enthaltend. 4 Ngr.

NOEGGERATH, E., Leitfaden für den Unterricht in der ebenen Trigonometrie. Saarbrücken, Neumann. ¼ Thlr.

ADERHOLDT, A. E., Lehrbuch der analytischen Geometrie. Weimar, Böhlau. ⅝ Thlr.

HECHEL, C., Die ebene analytische Geometrie. Riga, Leipzig, Volkmar. 18 Ngr.

A. DUPRÉ, *Examen d'une proposition de Legendre relative à la théorie des nombres, suivi d'un mémoire sur la résolution des équations numériques. Paris, Mallet-Bachelier.* 4 Frcs.

## Angewandte Mathematik.

HESSEL, J. F. C., Die merkwürdigen arithmetischen Eigenschaften der wichtigsten Näherungsreihe für die Sonnenabstände der Planeten und die ihnen entsprechenden astronomischen Entdeckungen. Marburg, Elwert'sche Universitäts-Buchhandlung. ⅛ Thlr.

Atlas des nördlichen gestirnten Himmels, für den Anfang des J. 1855 entworfen auf der K. Sternwarte zu Bonn. 4. Lieferung. Bonn, Marcus. 3 Thlr.

MURMANN, A., Ueber die Bahn der Europa. (Akad.) Wien, Gerold's Sohn in Comm. 3 Ngr.

ENCKE, J. F., Ueber den Längenunterschied zwischen den Sternwarten von Brüssel und Berlin, auf telegraphischem Wege abgeleitet im Jahre 1857. (Akad.) Berlin, Dümmler in Comm. 22 Ngr.

PRESTEL, M. A. F., Das astronomische Diagramm, ein Instrument zur Bestimmung der Mittagslinie, der Zeit etc. Braunschweig, Vieweg & Sohn. 3⅝ Thlr.

STOEVESANDT, C. H., Lehrbuch der Perspektive. 4. Lief. Berlin, Herbig. 1 Thlr.

WIEBE, F. K. H., Skizzenbuch für den Ingenieur und Maschinenbauer. 7. Heft. Berlin, Ernst & Korn. 1 Thlr.

## Physik.

Fortschritte der Physik im Jahre 1856. Dargestellt von der physikalischen Gesellschaft in Berlin. Redigirt von A. Krönig. 2. Abth. Berlin, Reimer. 2½ Thlr.

Bericht über die 32. Versammlung deutscher Naturforscher zu Wien im September 1856. Herausgegeben von Hyrtl und Schrötter. Wien, Gerold's Sohn in Comm. 5 Thlr.

Lamont, J., Untersuchungen über die Richtung und Stärke des Erdmagnetismus in Norddeutschland, Belgien, Holland und Dänemark, im Sommer 1858 ausgeführt. München, Franz in Comm. 2⅔ Thlr.

Dove, H. W., Optische Studien (als Fortsetzung der „Farbenlehre"). Berlin, G. W. F. Müller. ½ Thlr.

Hagen, G., Ueber Ebbe und Fluth in der Ostsee. (Akad.) Berlin, Dümmler in Comm. 8 Ngr.

Lachmann, W., Die Jahreszeiten in ihrer klimatischen und thermischen Begrenzung. Ein Beitrag zur Meteorologie. Braunschweig, Leibrock in Comm. 12 Ngr.

Arago's sämmtliche Werke, herausgegeben von W. G. Hankel. 10. Bd. Leipzig, O. Wigand. 1⅔ Thlr.

Arago, F., *Oeuvres complètes, publiées de* J. A. Barral. *T. XII.* Leipzig, O. Weigel. 2 Thlr.

Becquerel, M., *Recherches sur les causes de l'électricité atmosphérique et terrestre.* (*Extrait des Mémoires de l'Académie, T.* 27, 2. *partie.*) *Paris.*

# Literaturzeitung.

---

## Recensionen.

**Elemente der Vermessungskunde.** Von Dr. C. M. Bauernfeind. 1. Band. München. Cotta. 452 S. 2 Thlr. 24 Ngr.

Nach der Einleitung zerfällt dieses Werk in folgende drei Hauptabtheilungen: I. Mittel zur Messung oder die Messinstrumente, II. Die Anwendung dieser Mittel oder Berechnung der Messungen, III. Herstelung der Pläne und Charten. — Die erste Abtheilung bildet den ersten Band, die beiden andern fallen dem zweiten zu.

Der erste Band, von welchem hier zunächst allein die Rede sein wird, erörtert in der vom Verfasser gewählten Reihenfolge in einzelnen Kapiteln: 1) Die Bestandtheile der Messinstrumente; 2) die Mittel zur Bezeichnung der Punkte auf dem Felde; 3) die Instrumente zum Winkelmessen, 4) zum Längenmessen (Nivellirinstrumente, Barometer) und 6) die Instrumente zu Geschwindigkeits-Messungen. Was zunächst die Bildung der drei Hauptabschnitte des ganzen Werkes betrifft, so entspricht dieselbe durchaus der praktischen Natur des Gegenstandes, welche bei der stets wachsenden Menge der Materien eine strengere Scheidung derselben erheischt und selbst im Unterrichte die bisher nahezu in allen Büchern dieser Art gebräuchlichen Mischungen nicht mehr zweckmässig erscheinen lässt.

Bezüglich der Unterabtheilungen, in welche die Materien des vorliegenden ersten Bandes zu bringen sind, kann man von verschiedenen Ansichten ausgehen, je nachdem man den Zweck eines eigentlichen Lehrbuches mehr oder weniger scharf ins Auge fasst. Man kann, wie in angegebener Weise der Verfasser thut, alle diejenigen Instrumente in die gleiche Kategorie bringen, welche für denselben Zweck oder zur Lösung einer und derselben Art von Aufgaben dienen, also z. B. alle Instrumente, welche zum Winkelmessen, sodann alle, welche zum Längenmessen dienen, zusammenstellen. Und dieser Gang lässt sich ganz gut befolgen, obgleich es schwer zu vermeiden ist, dass in der Darstellung Instrumente von ganz verschiedener Genauigkeit und wesentlich verschiedenem Bau, z. B. die Messschnüre und der Distanzmesser sich begegnen, oder dass gewisse Anticipationen vorkommen, indem von manchen Instrumenten die Rede sein

muss, welche erst später beschrieben werden, dass die Maassstäbe, Messkette etc. nach dem Messtische und Theodolithen zum Vortrage gelangen etc. Obgleich Referent selbst die Erfahrung machte, dass viele dieser kleinen Uebelstände wegfallen, wenn man überhaupt nur insoweit an einem Eintheilungsprincip festhält, dass stets die einfacheren den complicirteren Instrumenten vorangehen und mit der Beschreibung, Prüfung und Berichtigung die praktische Anwendung jedes einzelnen Instrumentes zur Lösung der elementaren Aufgaben, für welche es vorzugsweise dient, unmittelbar verbunden wird; so ist gleichwohl über diesen Punkt nicht zu rechten: wer es je unternommen hat, eine praktische Disciplin, wie die vorliegende, ja selbst nur eine besondere Parthie, wie z. B. das Fernrohr, vollständig und als Lehrgegenstand so zu bearbeiten, dass ebenso den wissenschaftlichen Anforderungen wie den nothwendigen Rücksichten auf den Lernenden entsprochen werde, hat ohne Zweifel die hierin liegenden eigenthümlichen Schwierigkeiten wahrgenommen. Nun scheint das vorliegende Werk seiner ganzen Anlage nach keineswegs als Lehrbuch bestimmt zu sein und es mochten daher die für andere Leser besonders wünschenswerthe Uebersichtlichkeit und grössere Vollständigkeit wichtiger erscheinen, als gewisse pädagogische Subtilitäten.

Beziehen sich diese Bemerkungen auf die Anordnung des Werkes im Allgemeinen, so muss bezüglich der Darstellungsweise der einzelnen Materien anerkannt werden, dass dasselbe durch Vollständigkeit und Gründlichkeit, sowie durch seine vorzügliche und in Hinsicht der in den Text gedruckten Abbildungen durchaus musterhafte Ausstattung alle bis dahin in diesem Zweige der Literatur in Deutschland erschienenen Werke übertrifft, und dieses Urtheil erscheint um so mehr gerechtfertigt, als die sorgfältige und erschöpfende Behandlung der Einzelheiten sich nicht auf bereits vorliegendes Material beschränkt, sondern, wie der Verfasser in der Vorrede mit Recht bemerkt, ein grosser Theil des Textes, wie z. B. die Artikel über das Prismenkreutz, Winkelprisma, den Spiegelkreis, Distanzmesser, Stromquadrant und die Pitot'schen Röhre als Original-Abhandlungen über diese Gegenstände betrachtet werden können. Hierunter kann in vieler Beziehung auch der von der einzelnen Linse und dem Fernrohr handelnde Abschnitt des Buches gezählt werden, denn in keinem Werke dieser Art findet sich in solcher Ausführlichkeit die elementare Dioptrik, wie sie Jeder kennen muss, dessen Beruf es mit sich bringt, dass er optische Instrumente zu beurtheilen und richtig zu behandeln im Stande sei. Es liegt indessen in der Natur der Sache, dass über manche Punkte der Lehre von den Instrumenten, insoweit sie deren Genauigkeit, oder die Würdigung ihrer praktischen Brauchbarkeit oder die daran noch möglichen Verbesserungen betrifft, die Akten keineswegs geschlossen sind und gar Manches zu wünschen übrig bleibt. Wenn wir also in dieser Hinsicht auf die Methoden für die Theilung der Latte eines Distanzmessers mit festen Fäden,

oder auch die Untersuchung des von Hogrewe erfundenen (sogenannten Stampfer'schen) Nivellirinstrumentes etc. hinweisen, so liegt darin nichts weniger als ein Tadel gegen das vorliegende Werk.

Die vorzüglichen und bei Weitem der Mehrzahl nach neuen Zeichnungen über Instrumente, wie solche von Ertl in München in grosser Vollkommenheit hergestellt werden, sind wohl jedem für die Sache sich näher interessirenden Leser um so willkommener, als in fast allen bisherigen Publicationen nur die Abbildungen der aus den Werkstätten norddeutscher Mechaniker hervorgegangenen Instrumente berücksichtigt worden sind.

Ein in solchen Werken ganz neues Kapitel ist jenes über die Instrumente zum Messen der Geschwindigkeit des fliessenden Wassers, und es wird ohne Zweifel vielen Lesern schon darum erwünscht kommen, weil in den betreffenden Zeichnungen zugleich auch die Art der Aufstellung resp. Befestigung jener Instrumente bei ihrem Gebrauche angedeutet ist.

Wir schliessen diese Bemerkungen, worin aus Rücksicht auf den Raum die ausführlichere Besprechung mancher anderen Punkte, in welchen sich dieser erste Band vor ähnlichen Werken wesentlich zu seinem Vortheil unterscheidet, vermieden wurde, in der Ueberzeugung, dass dieses Buch sowohl für Studirende als praktisch ausübende Geometer, Ingenieure und Maschinisten, überhaupt für Alle, welchen an einer genaueren Kenntniss der Messinstrumente gelegen ist, die vorzüglichste Empfehlung verdient.

Dr. A. Winckler.

---

**Ausführliches Lehrbuch der Arithmetik und Algebra**, zum Selbstunterricht und mit Rücksicht auf die Zwecke des praktischen Lebens bearbeitet von H. B. Lübsen. Vierte Auflage. Hamburg, O. Meissner. 1859.

Die verschiedenen Lehrbücher des Verf. haben theilweis mehrere Auflagen erlebt und scheinen sich in gewissen Kreisen einer grossen Beliebtheit zu erfreuen; von ihrer Einführung in höhern Unterrichtsanstalten hat zwar Ref. nichts gehört, desto häufiger findet man sie dagegen in den Händen von Architekten, Technikern etc. und besonders bei solchen, denen es an gründlicher Vorbildung für fachwissenschaftliche Akademien, polytechnische Schulen u. dergl. gefehlt hat. Für solche Schüler dürften sich jene Lehrbücher auch vorzugsweis eignen und zwar hauptsächlich durch die im Ganzen sehr klare Darstellung und eine behäbige Breite, die selbst Excurse in fremde Gebiete und nöthigenfalls auch schlechte Witze nicht verschmäht. Weit geringer ist andererseits der wissenschaftliche Werth der Lübsen'schen Bücher; immer nur geleitet von dem Bestreben, es dem Leser so bequem als irgend möglich zu machen, kommt der Verfasser nicht selten zu wunderlichen Anordnungen des Stoffes und zum Gebrauche von Methoden, welche der Forderung nach mathematischer Strenge nur in sehr

beschränktem Maasse genügen. Dieses allgemeine Urtheil hat Ref. aus der Gesammtansicht der Lübsen'schen Lehrbücher abstrahirt und es wird durch die Recension des vorliegenden Bandes, sowie der übrigen Werke seine Bestätigung finden.

Der Verf. erklärt im Anfange die Mathematik für eine Wissenschaft aus reinen Begriffen und meint, ihre Schwierigkeit liege in der ununterbrochenen Aufmerksamkeit, die sie verlange. Von diesen Behauptungen dürfte keine mehr als halb wahr sein Ein Begriff ist der Inbegriff aller nothwendigen und hinreichenden Merkmale einer ganzen Classe von Objecten; seine Bestandtheile sind jene Merkmale und diese können möglicherweise wieder Begriffe sein, setzt man aber bei mathematischen Begriffen diese Zerlegung fort (etwa wie der Chemiker seine Analysen), so kommt man zuletzt auf einfache Vorstellungen sogen. reine Anschauungen (figürliche in der Geometrie, schematische in der Arithmetik) und gerade diese sind das Fundament der Mathematik. Eine Wissenschaft aus reinen Begriffen allein ist nur die Philosophie; die Mathematik erfordert Begriffe und gleichzeitig reine Anschauungen. Darin liegt auch die Schwierigkeit unserer Wissenschaft; mit der Virtuosität, Begriffe zu analysiren, logisch sicher zu schliessen etc., kann man wohl ein guter Jurist werden, aber bei combinatorischen oder stereometrischen Untersuchungen würde man damit allein nicht weit kommen, vielmehr ist hier die combinatorische oder stereometrische Anschauung gerade die Hauptsache.

In den ersten 9 Büchern des vorliegenden Werkes findet sich das gewöhnliche Zahlenrechnen abgehandelt, was wir nicht näher besprechen wollen; darauf folgt X. Gleichungen ersten Grades mit einer Unbekannten in Zahlen, XI. Eingekleidete Aufgaben, die zu derartigen Gleichungen führen, XII. Die vier Species in Buchstaben, XIII. Von den Functionen und Formeln, (zugleich lineare Buchstabengleichungen enthaltend), XIV. Gleichungen ersten Grades mit mehreren Unbekannten, XV. Vorläufige Begriffe von Potenzen und Wurzeln, Ausziehung der Quadrat- und Cubikwurzeln, XVI. Potenzen und Wurzeln im Allgemeinen, XVII. Die quadratischen Gleichungen*), XVIII. Die Progressionen, XIX. Die Logarithmen, XX. Logarithmische Rechnungen, XXI. Zinseszinsen. Den Beschluss macht ein Anhang mit Zusätzen und Bemerkungen verschiedenen Inhalts. Wie man sieht, ist die Anordnung des Stoffes eine ziemlich willkührliche, nur aus äusserlichen Motiven entsprungene; namentlich vermissen wir jene streng wissenschaftliche Auseinandersetzung der

---

*) Hier kommt auch ein Witz vor. S. 172 behandelt der Verf. die Aufgabe: „Eine Dame wurde um ihr Alter befragt und sie antwortete: das 53fache meiner Jahre übertrifft die Zahl 696 um gerade soviel als das Quadrat meiner Jahre beträgt. „Wie alt war die Dame?" und bemerkt zu der Auflösung

$$x = \tfrac{1}{2}(53 \pm \sqrt{25})$$

hier muss aus Höflichkeit das untere Zeichen genommen werden."

Stufenfolge der Operationen und den damit verbundenen Nachweis der Nothwendigkeit, das Zahlengebiet zu erweitern. Im Vergleiche mit andern Werken der neueren Zeit scheinen die Belehrungen des Verf. mehr eine praktische Abrichtung als eine wissenschaftliche Erkenntniss zu bezwecken; in letzterer Hinsicht könnte der Verf. z. B. von Th. Wittstein, J. H. T. Müller (s. Jahrg. I. d. Zeitschr.) sehr viel lernen.

Gänzlich verunglückt erscheint uns das vier Seiten lange Gerede über die Gleichung $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots$ *in inf.* $= 1$, wo der Verf. beweisen will, dass die Glieder der Reihe am Ende „wirklich Null werden“ und uns u. A. auch belehrt, dass das Differential eine Sache ist, „die eine Grösse sein oder werden will, es aber nicht ist.“ Hier liegt der Fehler einfach darin, dass der Verf. den Begriff der Grenze nicht kennt; das allgemeine Glied der Reihe convergirt gegen den asymptotischen Werth Null, die Summe der Reihe convergirt gegen die asymptotische Grenze Eins, und mit diesen zwei präcisen Ausdrücken ist die Sache abgemacht und klar. Das ganze Raisonnement des Verf., wonach die Reihe mit den vorletzten Gliedern exspirirt u. dergl., dient keineswegs dazu, jene angeblich übersinnlichen (!) Vorstellungen zu erläutern, sondern höchstens, um einen guten Kopf confus zu machen; der Verf. dürfte sich nicht wundern, wenn Jemand aus dieser Verworrenheit schlösse, dass Herr Lübsen zwar ein guter Elementarlehrer aber keineswegs zum Unterrichte in der höheren Mathematik befähigt sei.

SCHLÖMILCH.

# Bibliographie

vom 15. August bis 1. November 1859.

## Periodische Schriften.

Denkschriften der Kaiserl. Akademie der Wissenschaften zu Wien. Mathem.-naturw. Classe. 17. Bd. Wien, Gerold's Sohn in Comm. 16 Thlr.

Sitzungsberichte der Kaiserl. Akademie der Wissenschaften zu Wien. Mathem.-naturw. Cl. Register zu den Bänden 21—30. Ebendas. ⅙ Thlr.

Abhandlungen der Senckenbergischen naturforschenden Gesellschaft. 3. Bd. 1. Lief. Frankfurt a. M. Brönner. 3 Thlr.

Repertorium für Meteorologie. Herausgegeben von der Kaiserl. geographischen Gesellschaft zu Petersburg, redigirt von F. Kämtz. 1. Bd. 1. Heft. Dorpat, Leipzig bei Köhler. pro 1.—4. Heft. 6 Thlr.

*Annales de l'observatoire physique centrale de Russie, publiées par* A. T. Kupffer. *Année* 1856. *Pétersbourg*, Leipzig, Voss. 7 Thlr.

*Correspondance météorologique. Publication annuelle redigée par* A. T. Kupffer. *Année* 1857. Ebendas. 5 Thlr.

*Bibliotheca historico-naturalis, physico-chemica et mathematica. Ed.* E. A. Zuchold. 9. Jahrg. 1. Heft. Januar bis Juni 1859. Göttingen, Vandenhoeck & Ruprecht. 11 Ngr.

## Reine Mathematik.

Ruland, N., Auflösungen der in Dr. Heis' Sammlung von Beispielen enthaltenen Gleichungen 1. und 2. Grades nebst den diophantischen Gleichungen. Bonn, Henry & Cohen. 1 Thlr. 18 Ngr.

Kambly, L., Elementarmathematik. 1. Theil: Arithmetik und Algebra. 4. Aufl. Breslau, Hirt. 12½ Ngr.

Decker, A., Lehrbuch der Algebra für Obergymnasien und Oberrealschulen. Troppau, Schüler's Buchhandlung. 1 Thlr. 24 Ngr.

Thomas, K., Das pythagoräische Dreieck und die ungerade Zahl. Berlin, Herbig. 1 Thlr.

KAMBLY, L., Theorie der Harmonikalen. Breslau, Hirt. ⅙ Thlr.

HOFER, J., Anfangsgründe der Stereometrie. Wien, Sallmayer & Comp. ⅙ Thlr.

PFAFF, H., Die ebene Trigonometrie. Erlangen, Bläsing. 3⅓ Thlr.

LÜBSEN, E. H., Ausführliches Lehrbuch der analytischen Geometrie. 4. Aufl. Hamburg, O. Meissner. 12 Ngr.

HOFFMANN, L., Mathematisches Wörterbuch. 9. Liefrg. Berlin, Bosselmann.

STURM, K., *Cours d'analyse de l'école polytechnique, publié par* E. PROUHET. *Tome II.* Paris. 2 Thlr.

LAMÉ, H., *Leçons sur les cordonnées curvilignes et leurs diverses applications. Paris, Mallet Bachelier.* 5 Frcs.

## Angewandte Mathematik.

SCHNEDAR, R., Grundzüge der darstellenden Geometrie nebst Schattenbestimmung, Linear- und Parallelperspective. 2. Aufl. Brünn, Winiker. 1 Thlr. 4 Ngr.

JÄGER, L., Die Polygonometrie und deren Anwendung auf die Vermessung grosser Waldungen, nebst Anleitung zum trigonometrischen Höhenmessen. Marburg, Elwert'sche Universitäts-Buchhandlung. 25 Ngr.

BAURMEISTER, G. A., Die Ursachen der zunehmenden Fallgeschwindigkeit bei Körperbewegungen. Leipzig, E. H. Mayer. ⅙ Thlr.

LÜBSEN, H. B., Einleitung in die Mechanik. 4.—6. Theil. Hamburg, O. Meissner. 1⅙ Thlr.

WERNICKE, A., Lehrbuch der Mechanik in elementarer Darstellung mit Uebungen und Anwendungen etc. 2. Theil. Mechanik flüssiger Körper. Braunschweig, Vieweg. 1⅙ Thlr.

FAIRBAIRN, W., Die eisernen Träger und ihre Anwendung beim Hochbau und Brückenbau, gestützt auf Versuche über die relative Festigkeit das Gusseisens und Schmiedeeisens. Nach der 2. Aufl. des Originals bearb. von Dr. BRAUNS. Braunschweig, Vieweg. 1 Thlr.

FINK, P., Construction der Maschinentheile. Wien, Gerold's Sohn. 4 Thlr.

WIEBE, K. H., Skizzenbuch für den Ingenieur und Maschinenbauer. 8. Heft. Berlin, Ernst & Korn. 1 Thlr.

HERBART, J. F., Die metaphysischen Anfangsgründe der Theorie der Elementarattraction. Aus dem Lateinischen übersetzt von K. THOMAS. Berlin, Herbig. ⅚ Thlr.

WIEGAND, A., Mathematische Grundlagen für Eisenbahnpensionskassen. Halle, Schmidt. 1 Thlr.

ADHÉMAR, J., *Nouvelles études de perspective. Paris.*

## Physik.

POGGENDORF, J. G., Biographisch-literarisches Handwörterbuch zur Geschichte der exacten Wissenschaften. 3. Lief. Leipzig, Barth. 1⅙ Thlr.

Fortschritte der Physik im Jahre 1857. Dargestellt von der physikalischen Gesellschaft in Wien. Redigirt von A. KRÖNIG und O. HAGEN. 1. Abthlg. Berlin, G. Reimer. 1½ Thlr.

Die Naturwissenschaften, bearbeitet von DIPPEL, GOTTLIEB, KOPPE etc. 2. Aufl. 1. Bd., 1. Abthlg. Essen, Bädeker. 1 Thlr.

Physikalisches Lexicon von MARBACH und CORNELIUS. 75.—78. Lief. Leipzig, O. Wigand. à ½ Thlr.

ARAGO's sämmtliche Werke, herausgeg. von W. G. HANKEL. 7. Bd. Leipzig, O. Wigand. 1⅔ Thlr.

EISENLOHR, W., Lehrbuch der Physik. 8. Aufl. 1. Hälfte. Stuttgart, Krais & Hoffmann. pro compl. 2⅔ Thlr.

PISKO, F. J., Lehrbuch der Physik für Unterrealschulen. 4. Aufl. Brünn, Winiker. 1 Thlr. 4 Ngr.

GAVARRET, J., Lehrbuch der Elektricität. Deutsch bearbeitet von ARENDT. 3. Lief. Leipzig, Brockhaus. 1 Thlr.

PERGER, A. v., Ueber die Lichtempfindlichkeit des Asphalts. (Akad.) Wien, Gerold's Sohn in Comm. 3 Ngr.

ROHRER, Ueber Regentropfen und Schneeflocken. (Akad.) Wien, Gerold's Sohn in Comm. 5 Ngr.

JEITTELES, L. H., Bericht über das Erdbeben am 15. Januar in den Karpathen und Sudeten. (Akad.) Wien, Gerold's Sohn in Comm. 18 Ngr.

DOVE, H. B., Ueber die nichtperiodischen Aenderungen der Temperaturvertheilung an der Erdoberfläche von 1729—1855. 6. Theil. Berlin, Dümmler in Comm. 2⅚ Thlr.

LAMONT, J., Monatliche und jährliche Resultate der an der Königl. Sternwarte bei München von 1825—1856 angestellten meteorologischen Beobachtungen. 3. Supplem. zu den Annalen der Münchener Sternwarte. München, Franz in Comm. 1 Thlr. 23 Ngr.

POUILLET, M., *Mémoire sur la densité de l'alcool sur celle des mélanges alcooliques et sur un nouveau mode de graduation de l'aréomètre à degrés égaux. Paris, Didot frères, fils & Comp.* 1½ Thlr.






72570
QA1
Z4
v.4
UNIVERSITY OF CALIFORNIA LIBRARY